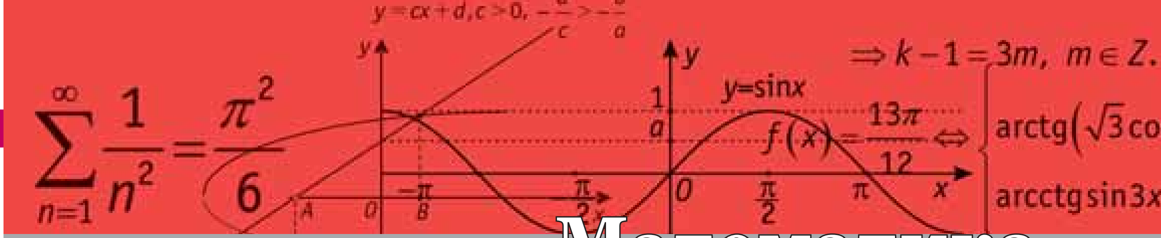

Шарыгин Георгий Игоревич
Выпускник МГУ, кандидат физико-математических наук, преподаватель СУНЦ МГУ, сотрудник ИТЭФ. *Автор был частично поддержан грантами РФФИ 04-01-00702 и НШ-8004.2006.2.*

Четырёхугольники и теорема Понселе

Как известно, далеко не у всех четырёхугольников есть вписанная и описанная окружность, не говоря уж о том, чтобы присутствовали они обе. Эта статья посвящена обсуждению как раз такого редкого случая – вписанно-описанным четырёхугольникам. Оказывается, такие четырёхугольники не только существуют (примером их может служить, в частности, квадрат), но и обладают интересными свойствами. Например, радиусы этих (вписанной и описанной) окружностей и расстояние между их центрами удовлетворяют красивому уравнению, аналогичному формуле Эйлера, выражающей расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника через радиусы этих окружностей.

Для начала напомним читателям, как выглядит эта формула Эйлера для треугольника.

Теорема 1. *В любом треугольнике расстояние d между центрами описанной и вписанной окружностей удовлетворяет соотношению*

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где R – радиус описанной, а r – радиус вписанной окружности данного треугольника.

Для доказательства нам потребуется следующее вспомогательное утверждение, называемое иногда леммой Мансиона.

Утверждение 1. *Продолжим биссектрису AA' треугольника ABC до пересечения с описанной окружностью этого треугольника. Обозначим получающуюся точку буквой D. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда выполняется $DB = DC = DI$.*

Доказательство. Прежде всего, $BD = DC$ как хорды, лежащие против равных вписанных углов в одной окружности (AD – биссектриса, см. рис. 1). С другой стороны, так как угол BID – внешний для треугольника ABI, он равен сумме углов $BAI = \frac{1}{2}\angle A$ и $ABI = \frac{1}{2}\angle B$. А так как

$\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу), то

$$\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B.$$

То есть угол BID равен углу IBD, следовательно, треугольник BID равнобедренный, $BD = ID$.

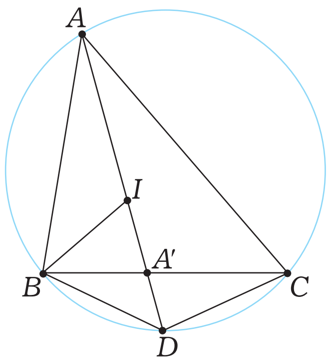

Рис. 1

Кроме того, нам потребуется теорема синусов $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\right)$ и ещё одно стандартное утверждение школьной геометрии.

Утверждение 2. *Пусть точка M лежит внутри окружности радиуса R с центром O, причём $OM = d$. Если AB – произвольная хорда этой окружности, проходящая через M, то*

$$AM \cdot MB = R^2 - d^2.$$

Для полноты приведём здесь доказательство этого важного факта.

Доказательство. Проведём через точку M вторую хорду CD (рис. 2). Соединим точки A и C, B и D, как показано на рисунке. Тогда в силу равенства вертикальных углов AMC и BMD, а также углов ABD и ACD (как опирающихся на одну дугу), треугольники ACM и DMB подобны, откуда имеем

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM},$$

или $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Если, в частности, хорда CD является диаметром, то $CM = R - d$, $MD = R + d$ (или наоборот), откуда получается требуемое равенство.

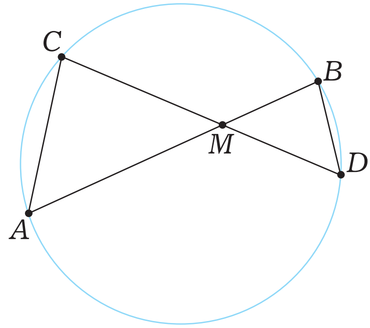

Рис. 2

Теперь доказательство теоремы Эйлера получается следующим образом. Применим теорему синусов к треугольнику ADB (см. рис. 3), получим $BD = 2R\sin\frac{\angle A}{2}$. С другой стороны, опустим перпендикуляр IP из I на AB. Тогда из прямоугольного треугольника AIP получим

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{\angle A}{2}}.$$

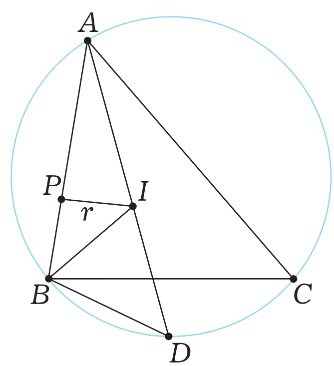

Рис. 3

В итоге получим

$$R^2 - d^2 = AI \cdot ID = AI \cdot BD =$$

$$= \frac{r}{\sin\frac{\angle A}{2}} \cdot 2R\sin\frac{\angle A}{2} = 2Rr,$$

откуда получается утверждение теоремы 1.

Доказанная формула не только красива сама по себе, но и полезна. Докажем, например, такое утверждение.

Утверждение 3. *В любом треугольнике радиус описанной окружности по крайней мере вдвое больше радиуса вписанной окружности, причём равенство достигается для правильного треугольника и только для него.*

Доказательство. Достаточно заметить, что из формулы Эйлера следует неравенство

$$0 \le d^2 = R^2 - 2Rr = R(R-2r),$$

эквивалентное тому, которое требуется доказать, причём равенство нулю расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей, с одной стороны, эквивалентно равенству $R = 2r$, а с другой – тому, что треугольник правильный (докажите самостоятельно, что если в треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей, то он непременно правильный).

Одно из важных следствий формулы Эйлера – то, что с её помощью можно найти любую из величин R, r и d, если известны две другие. Иными словами, любая из этих трёх величин однозначно определяется двумя другими (некоторое сомнение может вызвать разве что однозначность нахождения R по данным d и r; мы предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно). Из этого простого наблюдения можно сделать важный и красивый вывод.

Утверждение 4. *(Теорема Понселе для треугольников.) Пусть треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан около окружности ω. Тогда существует бесконечно много других треугольников, вписанных и описанных около тех же окружностей. Точнее говоря, любая точка на окружности Ω может быть вершиной такого треугольника,* см. рис. 4.

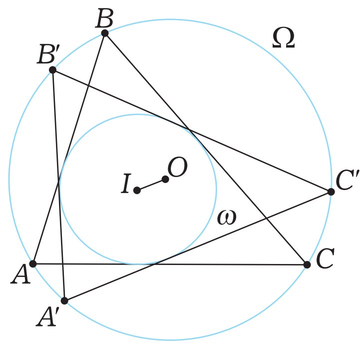

Рис. 4

Доказательство. Возьмём произвольную точку A' на окружности Ω и проведём через неё касательные к окружности ω. Точки B' и C' пересечения проведённых прямых с Ω соединим отрезком. Допустим, отрезок $B'C'$ не касается окружности ω. Уменьшим (или увеличим) радиус окружности ω и повторим ту же самую операцию. Мы получим окружность ω' с тем же самым центром I, что и ω, треугольник $A'B'C'$, вписанный в Ω, две стороны которого ($A'B'$ и $A'C'$) касаются окружности ω'. Очевидно, что если радиус ω' достаточно мал, окружность ω' будет лежать внутри $A'B'C'$, а при достаточно большом радиусе ω' будет пересекаться с отрезком $B'C'$. Значит, при некоторой фиксированной величине радиуса окружность ω' будет касаться отрезка $B'C'$, следовательно, будет вписанной в треугольник $A'B'C'$ (который, напомним, в свою очередь, вписан в окружность Ω). Значит, её радиус r' можно выразить через радиус R и расстояние OI, следовательно, $r' = r$ и окружность ω' совпадает с ω.

Это свойство вписанной и описанной окружностей треугольника – частный случай знаменитой *теоремы Понселе*. В полном объёме она звучит следующим образом.

Теорема 2. *Пусть каждое звено замкнутой n-звенной ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$ касается окружности ω, а все точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на окружности Ω (мы будем говорить, что такая ломаная вписана в окружность Ω и описана около ω). Тогда существует бесконечно много замкнутых ломаных $A_1'A_2' \ldots A_n'$ с тем же числом звеньев, вписанных и описанных около тех же самых окружностей. Точнее говоря, любая точка на окружности Ω может быть взята в качестве вершины A_1' такой ломаной.*

Доказанное нами утверждение 4 – простейший вариант теоремы Понселе, а именно – случай $n = 3$. Мы не будем доказывать теорему в нашей статье в полном объёме для всех n[1]. Вместо этого мы разберём ещё один простой, но красивый частный случай этой теоремы, случай $n = 4$.

Начнём с доказательства следующего простого утверждения.

Утверждение 5. *Пусть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник и E – точка пересечения его диагоналей. Опустим из E перпендикуляры на стороны четырёхугольника (или на их продолжения), пусть K, L, M и N – основания этих перпендикуляров. Тогда в четырёхугольник $KLMN$ можно вписать окружность с центром в точке E.*

Доказательство. Рассмотрим рисунок 5. Так как EK и EN перпендикулярны отрезкам AB и AD соответственно, то четырёхугольник $EKAN$ можно вписать в окружность (сумма противоположных углов этого четырёхугольника равна $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$).

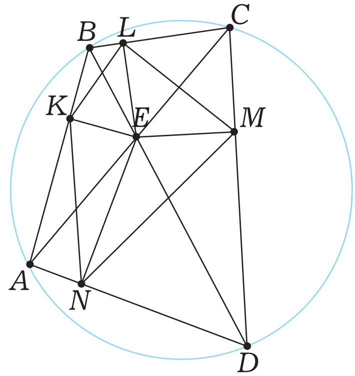

Рис. 5

Поэтому углы $\angle KNE$ и $\angle KAE$ равны как опирающиеся на одну дугу. Аналогично из рассмотрения четырёхугольника $ENDM$ получаем $\angle ENM = \angle EDM$. Но так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный, имеем $\angle EAK = \angle CAB = \angle CDB = \angle EDM$. Значит, $\angle KNE = \angle ENM$, то есть EN – биссектриса угла KNM. Аналогично, все остальные отрезки EK, EL и EM тоже являются биссектрисами соответствующих углов четырёхугольни-

[1] Желающие могут познакомиться с её доказательством, например, в книге И.Ф. Шарыгина «Геометрия 9-11 кл. Учебное пособие». – М.: Дрофа, 1996, задачи 614-615.

ка $KLMN$. Так как биссектрисы углов этого четырёхугольника пересекаются в одной точке (точке E), в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Смысл утверждения 5 в том, что оно даёт нам удобный способ построения описанных четырёхугольников. Было бы замечательно, если бы четырёхугольник $KLMN$ из этого утверждения был бы ещё и вписанным в какую-нибудь окружность. В общем случае, однако, это не так, как несложно убедиться экспериментально. Однако справедливо следующее утверждение, которое является ключевым в представленном здесь доказательстве теоремы Понселе для четырёхугольников.

Утверждение 6. *Пусть четырёхугольники $ABCD$ и $KLMN$ – такие же, как и в предыдущем утверждении. Предположим дополнительно, что диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Тогда четырёхугольник $KLMN$ можно вписать в окружность.*

Для доказательства этого нам потребуется, во-первых, одно известное свойство параллелограмма (сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон), а во-вторых, следующее утверждение, которое мы предлагаем читателю доказать самостоятельно.

Задача 1. Пусть хорды AB и CD некоторой окружности пересекается под прямым углом, причём $BD = a$, $AC = b$ (см. рис. 6). Тогда радиус этой окружности равен

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

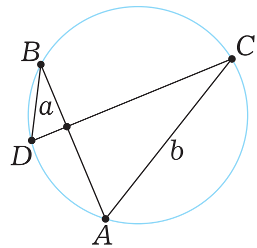

Рис. 6

Доказательство утверждения 6. Мы не только докажем, что K, L, M и N лежат на одной окружности, но и найдём центр и радиус этой окружности. Рассмотрим рис. 7. Пусть E – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, P и Q – середины сторон AB и CD соответственно, а K и M – основания перпендикуляров, опущенных из E на эти стороны. Заметим, что перпендикуляры, восставленные к AB и CD в точках P и Q, пересекаются в центре окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. С другой стороны, рассмотрим угол $\angle PEB$: так как четырёхугольник $ABCD$ – вписанный, а треугольник ABE – прямоугольный и, следовательно, P – центр его описанной окружности, мы имеем следующие равенства:

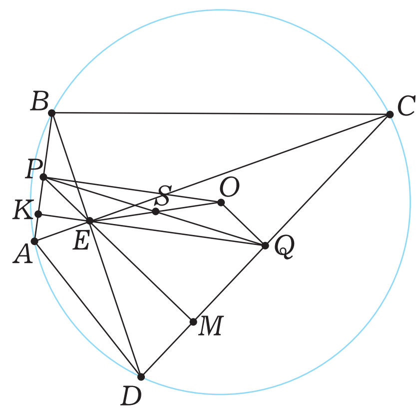

Рис. 7

$$\angle PEB = \angle PBE = \angle ABD =$$
$$= \angle ACD = \angle DEM$$

(последнее равенство следует из перпендикулярности EM и CD). Следовательно, точки P, E и M лежат на одной прямой – перпендикуляре к CD. А так как OQ – срединный перпендикуляр к CD, получаем, что отрезок PE параллелен OQ. Аналогично, рассматривая углы QEC и KEA, можно доказать, что отрезок OP параллелен отрезку QE. Таким образом, получаем, что четырёхугольник $OPEQ$ – параллелограмм. Следовательно, отрезки OE и PQ пересекаются в своих серединах, то есть (см. рис. 7) $QS = PS = \frac{1}{2}PQ.$ С другой стороны, из рассмотрения трапеции $KEOP$, в которой $\angle EKP = \angle KPO = 90^\circ$, следует, что $SP = SK.$ Точно так же $SQ = SM.$ Получаем, что точка S равноудалена от K и M. Заметим, кстати, что S – середина отрезка, соединяющего центр окружности, описанной около $ABCD$, и точку пересечения диагоналей $ABCD$, значит, её положение не зависит от точек K и M. В частности, из этого следует, что точка S равноудалена и от точек L и N (не изображённых на рисунке 7). Если мы докажем, что расстояния от S до этих точек равны, то тем самым мы получим, что S – центр окружности, описанной около $KLMN$.

Для доказательства нам достаточно выразить расстояние между S и M через радиус окружности, описанной около $ABCD$, и длину отрезка EO. Используя свойство параллелограмма, мы вычисляем:

$$SM^2 = SQ^2 = \frac{1}{4}PQ^2 = \frac{1}{2}\left(EP^2 + EQ^2\right) -$$
$$-\frac{1}{4}EO^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}CD^2\right) - \frac{1}{4}EO^2 =$$
$$= \frac{1}{8}\left(AB^2 + CD^2\right) - \frac{1}{4}EO^2 = \frac{1}{4}\left(2\rho^2 - EO^2\right).$$

В этом вычислении мы воспользовались тем, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром его описанной окружности. Кроме того, в последнем равенстве мы применили утверждение задачи 1 (ρ – радиус окружности, описанной около $ABCD$). Точно таким же образом получаем, что

$$SL^2 = SN^2 = \frac{1}{4}\left(2\rho^2 - EQ^2\right).$$

Так как выражения для SM^2 и SL^2 совпали, получаем требуемый результат.

Итак, из утверждений 5 и 6 следует, что если четырёхугольник $ABCD$ – вписанный и с перпендикулярными диагоналями, то соответствующий четырёхугольник $KLMN$ – требуемого нам типа, т.е. он одновременно вписанный и описанный! Заметим, что попутно мы получили следующую формулу, связывающую между собой радиус R окружности, описанной около $KLMN$, расстояние d между центром S этой окружности и точкой E, которая (см. утверждение 5) является центром окружности, вписанной в $KLMN$, и параметр ρ, зависящий от исходного четырёхугольника $ABCD$:

$$R^2 = \frac{1}{2}\left(\rho^2 - 2d^2\right).$$

Оставив на время вопрос о том, исчерпываются ли все вписанно-описанные четырёхугольники рассматриваемыми примерами, докажем для четырёхугольника $KLMN$ аналог теоремы Эйлера для треугольника. Для этого достаточно выразить через те же параметры ρ и d радиус окружности, вписанной в $KLMN$. Рассмотрим рис. 8. Обозначим угол DAE через α, а угол BAE – через β. Так как четырёхугольник $ENAK$ можно вписать в окружность (см. доказательство утверждения 5), то

$$\angle EKN = \angle DAE = \alpha,$$
$$\angle ENK = \angle BAE = \beta.$$

Так как точка E пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$

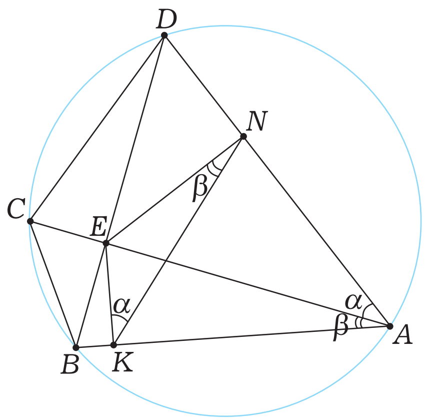

Рис. 8

служит центром окружности, вписанной в $KLMN$, то радиус r этой окружности равен расстоянию от E до прямой KN, т.е. $r = EK\sin\alpha$. Теперь, пользуясь тем, что треугольники BEA и DEA прямоугольные, и применяя формулу из утверждения 2, теорему синусов, а также известные формулы для площади треугольника, получаем

$$r = EK\sin\alpha = AE\sin\beta\sin\alpha =$$

$$= AE\cdot\frac{BE\cdot ED}{AB\cdot AD} = \frac{BE\cdot ED}{\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin(\alpha+\beta)}\times$$

$$\times\frac{1}{2}AE\cdot BD\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{BD} =$$

$$= \frac{\rho^2 - OE^2}{S_{ABD}}\cdot S_{ABD}\cdot\frac{1}{2\rho} = \frac{\rho^2 - 4d^2}{2\rho}.$$

Чтобы получить связь между r, R и d, выразим ρ из обеих полученных формул и приравняем. Вместо того, чтобы утомлять читателя выкладками, предлагаем самостоятельно решить следующую задачу.

Задача 2. *Докажите, что выполняется равенство*

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Итак, если вершины вписанно-описанного четырёхугольника $KLMN$ являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей $ABCD$ на его стороны (причём четырёхугольник $ABCD$ – вписанный и с перпендикулярными диагоналями), то для такого четырёхугольника $KLMN$ выполняется уравнение задачи 2. Заметим, что для такого четырёхугольника выполняется и утверждение теоремы Понселе, а именно – существует бесконечно много четырёхугольников, вписанных и описанных около тех же самых окружностей. В самом деле, начнём вращать четырёхугольник $ABCD$ вокруг точки E (точка E при этом должна оставаться неподвижной) таким образом, чтобы он продолжал быть вписанным в одну и ту же окружность. Тогда четырёхугольник $KLMN$ тоже начинает двигаться, оставаясь вписанным и описанным четырёхугольником. Но так как положения центров его вписанной и описанной окружностей и их радиусы зависят лишь от положения точек E и O и от радиуса ρ окружности, описанной около $ABCD$, то эти окружности – одни и те же для всех четырёхугольников $KLMN$ из рассматриваемого семейства. Так как при этом, очевидно, точка K может занять любое положение на описанной окружности $KLMN$, утверждение теоремы в рассмотренном случае выполняется.

Для завершения статьи нам осталось объяснить, как связан рассмотренный частный случай с общим. А именно, докажем, что других вписанно-описанных четырёхугольников не бывает!

Утверждение 7. *Любой вписанно-описанный четырёхугольник $ABCD$ может быть получен из некоторого вписанного четырёхугольни-*

ка $PQRS$ с перпендикулярными диагоналями как оболочка оснований перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей $PQRS$ на его стороны. При этом точка пересечения диагоналей $PQRS$ будет совпадать с центром вписанной окружности в четырёхугольник $ABCD$.

Доказательство. Пусть I – центр окружности, вписанной в $ABCD$. Проведём через вершины этого четырёхугольника прямые, перпендикулярные соответственно отрезкам IA, IB, IC и ID. Обозначим образовавшийся четырёхугольник $PQRS$ (рис. 9). Мы должны доказать, во-первых, что $PQRS$ можно вписать в окружность, а во-вторых, что I – точка пересечения его диагоналей, причём $PR \perp QS$. Первое утверждение – лёгкое следствие того факта, что каждый из образовавшихся четырёхугольников $IAPD$, $IBQA$, $ICRB$, $IDSC$ можно вписать в окружность (так как противоположные углы всех этих четырёхугольников прямые). Следовательно, у нас возникает большое количество равных углов (см. рис. 9; мы учли, что каждый из отрезков IA, IB, IC и ID является биссектрисой соответствующего угла), откуда $\angle SPQ + \angle SRQ =$

$$= \alpha + \delta + \beta + \gamma = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Следовательно, $PQRS$ можно вписать в окружность. Чтобы доказать второе утверждение, найдём угол $\angle PIQ$:

$$\angle PIQ = \angle PIA + \angle AIQ = \angle PDA +$$

$$+ \angle ABQ = (90^\circ - \delta) + (90^\circ - \beta) = 90^\circ.$$

Мы учли, что $ABCD$ – вписанный четырёхугольник, следовательно

$$\alpha + \gamma = 90^\circ = \beta + \delta.$$

Точно так же можно доказать, что углы $\angle QIR$, $\angle RIS$, $\angle SIP$ тоже прямые, откуда следует требуемый результат.

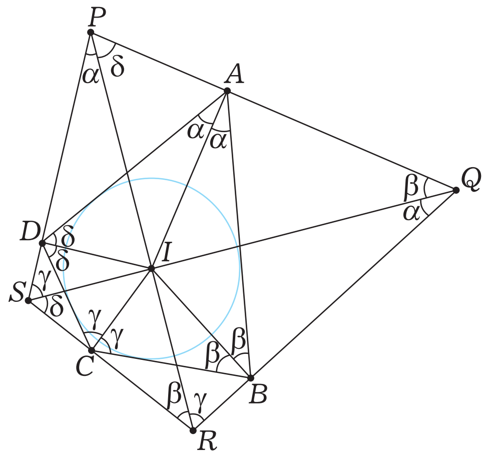

Рис. 9

Подведём итог. Мы не только доказали теорему Понселе и формулу Эйлера для $n = 4$, но также узнали много полезных свойств вписанно-описанных четырёхугольников. По ходу доказательства мы пользовались несколькими красивыми и полезными утверждениями, которые можно применять для решения различных задач. Мы знаем теперь, как можно построить все вписанно-описанные четырёхугольники (на самом деле, если не знать утверждения 5, построить такой четырёхугольник, отличный от квадрата, очень непросто!), как найти радиусы их вписанной и описанной окружностей. Все те же самые вопросы можно пробовать задавать и в случае $n \geq 5$. Обычное доказательство теоремы Понселе не даёт на них ответа, так что эти интересные проблемы ещё ждут своих исследований.