Епифанова Татьяна Николаевна
Учитель математики высшей категории старших классов ГОУ СОШ №1358 г. Москвы, отличник народного просвещения. Автор ряда методических статей в научно-теоретических и методических журналах. Победитель конкурса лучших учителей РФ в рамках ПНПО в 2009 году.

О теореме Менелая для тетраэдра

Какие теоремы следует считать важными?
Такие, которые просто формулируются,
не требуют большого числа определений
и позволяют легко решать много
известных, но ранее не решённых задач.
Штейнгауз Гуго Дионисий

В статье рассматривается стереометрическая теорема Менелая, позволяющая находить более короткие и эффектные решения задач для произвольного тетраэдра.

В этой статье мы рассмотрим замечательную, но мало кому известную стереометрическую теорему Менелая, позволяющую находить более короткие и эффектные решения задач для произвольного тетраэдра.

Известно, что теорема Менелая, которая прежде называлась правилом шести количеств, дошла до нас в арабском переводе Сабита ибн Корры третьей книги «Сферика» Менелая Александрийского (1–2 в. н. э.). Древнегреческий математик сначала доказал теорему для плоского случая, а потом центральным проектированием перенёс её на сферу.

Напомним формулировку *планиметрической теоремы Менелая для треугольника.*

Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях и не совпадают с вершинами ΔABC, то эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1$, где под горизонтальной чертой будем понимать длину направленного отрезка.

В частности, из теоремы следует соотношение для длин направленных отрезков: $\frac{|AB_1|}{|B_1C|} \cdot \frac{|CA_1|}{|A_1B|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1.$

Возможны два расположения точек A_1, B_1 и C_1: либо две из них лежат на соответствующих сторонах ΔABC, а третья на продолжении стороны (см. рис. 1 *а*), либо все три лежат на продолжениях соответствующих сторон (см. рис. 1 *б*).

Для более глубокого запоминания этой теоремы можно предложить следующее *мнемоническое правило*.

Движемся по замкнутому контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой, от этой

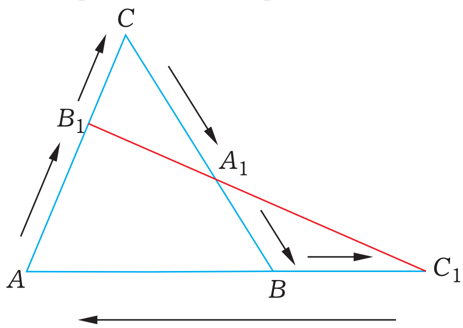

Рис. 1 *а*

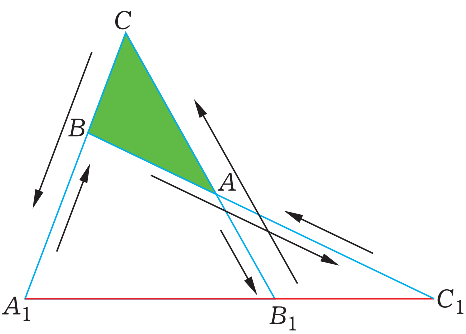

Рис. 1 *б*

точки пересечения до следующей вершины и так до тех пор, пока не замкнём контур. Затем произведение отношений образовавшихся отрезков приравниваем к единице.

Эту теорему можно без труда доказать, если воспользоваться одним из способов, приведённых в журнале «Потенциал» № 7, 2010, в статье «Пропорциональные отрезки в треугольнике».

Существует ли теорема для тетраэдра, аналогичная теореме Менелая для треугольника? Нет сомнения в том, что среди фигур в пространстве тетраэдр наиболее близок к треугольнику на плоскости. Тетраэдр является пространственным *аналогом* треугольника по ряду причин: во-первых, обе эти фигуры представляют собой ограниченные выпуклые множества точек; во-вторых, треугольник образован минимальным числом прямых на плоскости, а тетраэдр – минимальным числом плоскостей в пространстве.

Примечание. Другим вполне содержательным аналогом треугольника в пространстве может служить трёхгранный угол, а вместе с ним и сферический треугольник.

И уже в древности было замечено, что если две фигуры в чём-то сходны, аналогичны, то у них имеются ещё какие-то сходные свойства.

Понятие *аналогии* (греч. *analogia* – соответствие, сходство) было известно ещё греческой науке и средневековому мышлению. И по мнению американского математика и педагога Д. Пойа (1887–1985), «возможно, не существует открытий ни в элементарной, ни в высшей математике, ни даже, пожалуй, в любой другой области, которые могли бы быть сделаны без аналогии».

Если теперь, используя *аналогию*, попытаться обобщить планиметрическую теорему Менелая для произвольного треугольника на пространство, то получится аналогичная ей *стереометрическая теорема Менелая для произвольного тетраэдра*.

Пусть в произвольном тетраэдре $SABC$ точки M, P, K и N принадлежат рёбрам SA, SB, BC и AC соответственно (рис. 2). Для того чтобы точки M, N, K и P принадлежали плоскости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{SM}{MA}\cdot\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CK}{KB}\cdot\frac{BP}{PS}=1. \qquad (1)$$

Сразу заметим, что общее в двух теоремах то, что они обе являются критериями расположения:

- трёх точек на одной прямой в R^2;
- четырёх точек в одной плоскости в R^3.

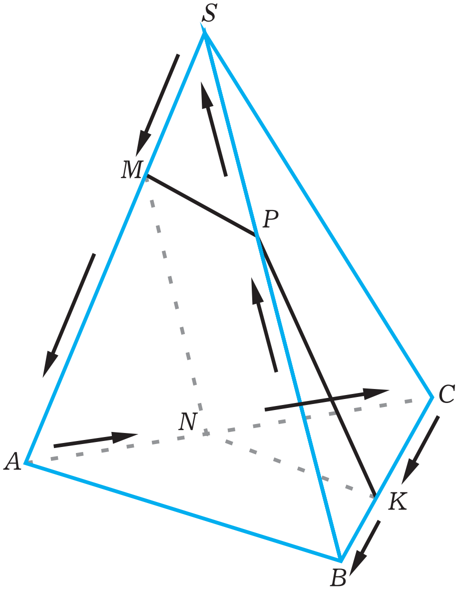

Рис. 2

Но теорема не является полным аналогом формулировки для плоского случая:

- в R^2 мы имеем дело с направленными отрезками и знаком «–», а в R^3 – нет;
- в R^2 точкам разрешено лежать на продолжении стороны, а в R^3 – нет.

Нетрудно теперь убедиться, что сходство теорем Менелая на плоскости и в пространстве не только в их формулировке, но также и в способе доказательства как необходимости, так и достаточности.

Доказательство необходимости стереометрической теоремы Менелая проведём аналогично доказательству планиметрической теоремы, используя подобие треугольников.

Для этого проведём к секущей плоскости α, в которой лежит сечение $MNKP$, два перпендикуляра SS_1 и AA_1 (рис. 3).

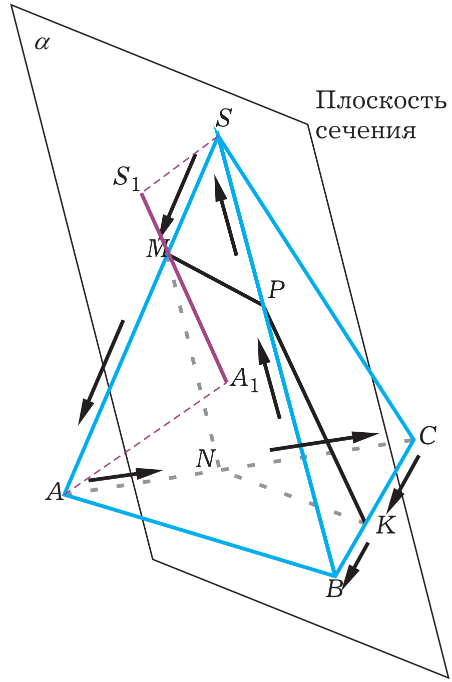

Рис. 3

Тогда из подобия треугольников AA_1M и SS_1M следует равенство:

$$\frac{SM}{AM} = \frac{SS_1}{AA_1}.$$

Аналогичным образом получим соотношения:

$$\frac{AN}{CN} = \frac{AA_1}{CC_1}; \quad \frac{CK}{BK} = \frac{CC_1}{BB_1}; \quad \frac{BP}{SP} = \frac{BB_1}{SS_1}.$$

Затем, перемножив соответствующие части полученных выше четырёх равенств, придём к требуемому результату, т. е.

$$\frac{SM}{MA} \cdot \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BP}{PS} = 1.$$

Используя аналогию, составим *мнемоническое правило* применительно к тетраэдру.

Движемся по замкнутому контуру тетраэдра от вершины пирамиды до точки пересечения сечения с ребром, от этой точки пересечения до следующей вершины и так до тех пор, пока не замкнём контур (рис. 2). Затем произведение отношений образовавшихся отрезков приравниваем к единице.

Доказательство достаточности стереометрической теоремы Менелая проведите самостоятельно. Для этого по аналогии с плоским случаем можно применить метод от противного, предполагая, что выполняется равенство (1), но при этом точки M, N, K и P не принадлежат одной плоскости.

Покажем, как применение стереометрической теоремы Менелая значительно упрощает решение задач.

Задача 1. В треугольной пирамиде $SABC$ через точки M, N и P, принадлежащие рёбрам SA, AC и BC соответственно, проведена плоскость. Объём многогранника $MANPBK$ равен 5022 см^3. Найти объём пирамиды $SABC$, если известно, что $SM:MA = 3:2$, $AN:NC = 5:8$ и $CP:PB = 2:15$.

Решение. 1) Построим сечение пирамиды. Следует заметить, что вершинами многоугольника сечения являются точки пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника в собственном смысле. Это значит, что точки пересечения секущей плоскости с продолжением рёбер не могут являться вершинами многоугольника сечения как не принадлежащие поверхности многогранника, но могут быть использованы для удобства построения.

Поскольку точки P и N лежат в плоскости основания ABC пирамиды, то в этой плоскости лежит вся прямая PN, в том числе и точка E – точка её пересечения с продолжением ребра BA за точку A. Отрезок PN является одной из сторон многоугольника, по которому сечение пересекается с поверхностью пирамиды. Точки E и M лежат в плоскости

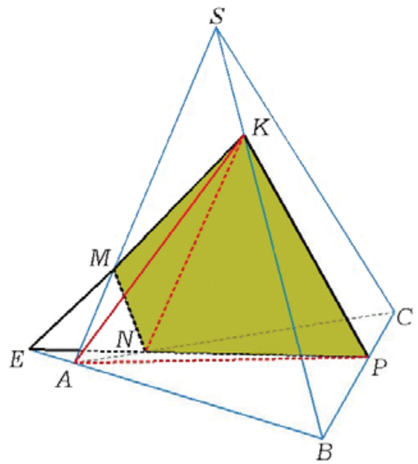

Рис. 4

боковой грани ASB, поэтому принадлежит сечению и вся прямая EM, пересекающая ребро SB в точке K. Отрезок MK этой прямой служит другой стороной искомого многоугольника. Соединив точки N и M в плоскости ASC и точки K и P в плоскости BSC, получим ещё две стороны многоугольника. Таким образом, искомым сечением является четырёхугольник $NMKP$. Заметим, что точка K принадлежит ребру BS, а не его продолжению. В самом деле, так как прямая EM разбивает плоскость грани ASB на две полуплоскости согласно аксиоме расположения точек относительно прямой на плоскости и отрезок AS пересекает прямую EM, то точки A и S лежат в разных полуплоскостях относительно прямой EM. Точка B лежит в той же полуплоскости, что и точка A. Тогда, так как точки B и S лежат в разных полуплоскостях относительно прямой EM, то из аксиомы разбиения плоскости прямой следует, что отрезок BS пересекает прямую EM в некоторой точке K.

2) Найдём теперь, в каком отношении точка K разделит ребро BS. Для этого воспользуемся стереометрической теоремой Менелая для произвольной пирамиды.

$$\frac{SM}{MA}\cdot\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BK}{KS}=1;$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{15}\cdot\frac{BK}{KS}=1.$$

Значит, $BK{:}KS=8{:}1$.

3) Разобьём многогранник $MANPBK$, объём которого по условию равен 5022 см^3, на три треугольные пирамиды $KAMN$, $KAPB$ и $KAPN$ (рис. 4). Тогда $V_{MANPBK}=$ $=V_{KAPB}+V_{KAPN}+V_{KAMN}$.

Выразим теперь объёмы полученных трёх пирамид через величину V, где V – объём исходной пирамиды $SABC$.

4) Начнём с пирамиды $KAPB$.

Проведём две высоты KK_1 и SS_1 на плоскость ABC (рис. 5).

Применяя первый признак подобия для треугольников SBS_1 и KBK_1 и учитывая, что $BS{:}BK=9{:}8$, получим следующую зависимость высоты KK_1 от высоты SS_1:

$$KK_1=\frac{8}{9}SS_1.$$

Используя классическую формулу для площади треугольника и очевидное равенство отношений $BC{:}PB=17{:}15$, выразим $S_{\Delta APB}$ через $S_{\Delta ABC}$:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta APB}}=\frac{BC}{PB}=\frac{17}{15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta APB}=\frac{15}{17}S_{\Delta ABC}.$$

Таким образом:

$$V_{KAPB}=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{17}S_{\Delta ABC}\cdot\frac{8}{9}SS_1=\frac{40}{51}V.$$

5) Аналогично установим зависимость V_{KAPN} от V. Легко показать, что

$$S_{\Delta APN}=\frac{5}{13}S_{\Delta ACP}=\frac{5}{13}\times$$

$$\times\frac{2}{17}S_{\Delta ABC}=\frac{10}{221}S_{\Delta ABC}.$$

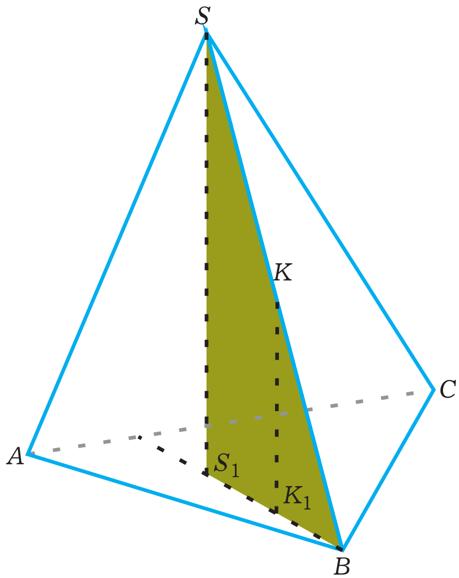

Рис. 5

Поэтому

$$V_{KAPN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{221}S_{\Delta ABC}\cdot\frac{8}{9}SS_1=\frac{80}{1989}V.$$

6) Осталось выразить V_{KAMN} через V. Для этого потребуется к плоскости грани ASC провести две высоты KK_2 и BB_2. Из подобия треугольников BB_2S и KK_2S и доказанного равенства $BK{:}KS=8{:}1$ получим зависимость высоты KK_2 от высоты BB_2: $KK_2=\frac{1}{9}BB_2$.

Далее, составив отношение площадей треугольников AMN и ASC и воспользовавшись известной формулой для вычисления их площадей, найдём нужное нам соотношение:

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ASC}} = \frac{\frac{1}{2}AM\cdot AN\sin\alpha}{\frac{1}{2}AS\cdot AC\sin\alpha} =$$

$$= \frac{AM}{AS}\cdot\frac{AN}{AC} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{2}{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{2}{13}S_{\Delta ASC}.$$

Значит,

$$V_{KAMN} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{13}S_{\Delta ASC}\cdot\frac{1}{9}BB_2 = \frac{2}{117}V.$$

Зная, что объём многогранника $MANPBK$ равен 5022 см^3, составим уравнение:

$$\frac{40}{51}V + \frac{80}{1989}V + \frac{2}{117}V = 5022 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1560+80+34}{1989}V = 5022 \Leftrightarrow V = 5967.$$

Ответ. $V_{SABC} = 5967 \text{см}^3$.

Задача 2. В треугольной пирамиде $SABC$, имеющей объём 7744 см^3, проведено сечение $MNKP$ таким образом, что точка $M\in AB$, $N\in SB$, $K\in SC$ и $P\in AC$. Найти объём многогранника $SAMNKP$, если известно, что $BM{:}MA=5{:}3$, $AP{:}PC=6{:}5$ и

$$5KS\cdot SN = 3NB\cdot CK + SN\cdot CK. \qquad (*).$$

Решение. Сначала определим, в каком отношении точка K разделит ребро CS и точка N – ребро SB.

Согласно стереометрической теореме Менелая для пирамиды $SABC$ имеем:

$$\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CK}{KS}\cdot\frac{SN}{NB} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{CK}{KS}\cdot\frac{SN}{NB} = 1 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{CK}{KS}\cdot\frac{SN}{NB} = 1.$$

Разделив обе части данного соотношения (*) на произведение $KS\cdot NB$, получим:

$$5\frac{SN}{NB} - 3\frac{CK}{KS} = \frac{CK}{KS}\cdot\frac{SN}{NB}.$$

Введя обозначения $\frac{CK}{KS} = y$ и $\frac{SN}{NB} = x$, составим и решим систему:

$$\begin{cases} 5x - 3y = xy, \\ 2xy = 1, \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x2 - x - 3 = 0, \\ y = \frac{1}{2x}, \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ y = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Таким образом, $\frac{CK}{KS} = \frac{5}{6}$ и $\frac{SN}{NB} = \frac{3}{5}$.

Затем, разбив многогранник $NMBCPK$ на три треугольные пира-

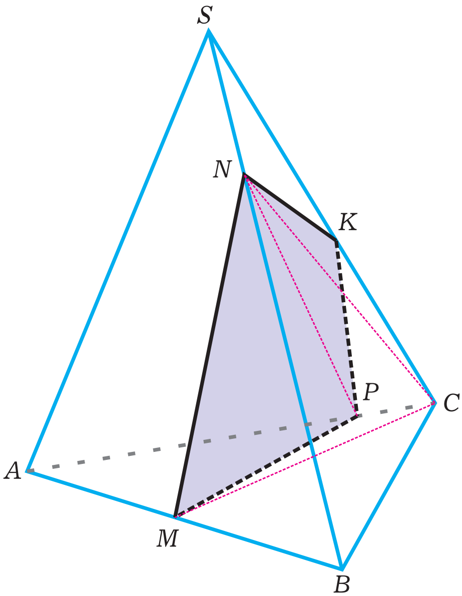

Рис. 6

миды $NMCB$, $NMCP$ и $NPKC$ (рис. 6), мы так же, как и в первой задаче, выразим объёмы этих пирамид через объём V исходной пирамиды $SABC$.

Действуя по аналогии с первой задачей, получим:

$$V_{NMCB} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}S_{\Delta ABC}\cdot\frac{5}{8}SS_1 = \frac{25}{64}V,$$

$$V_{NMCP} = \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{88}S_{\Delta ABC}\cdot\frac{5}{8}SS_1 = \frac{75}{704}V,$$

$$V_{NPKC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{25}{121}S_{\Delta ASC}\cdot\frac{3}{8}BB_2 = \frac{75}{968}V.$$

Вычислим объём многогранника $NMBCPK$:

$$\frac{25}{64}V + \frac{75}{704}V + \frac{75}{968}V = \frac{4450}{7744}V.$$

Так как по условию задачи $V_{SABC} = 7744$ см^3, то $V_{SAMNKP} = 3294$ см^3.

Ответ. $V_{SAMNKP} = 3294$ см^3.

Задача 3. В тетраэдре $SABC$ проведена плоскость через точки $M \in AB$, $N \in SB$, $K \in SC$, $P \in AC$ таким образом, что $MA = 0{,}6BM$, $AP = 1{,}2PC$. Найти объём многогранника $MNKPCB$, если известно, что его объём на 1647 см^3 меньше объёма самого тетраэдра и

$$(180CK^2 – 44KS^2) \cdot NB^2 = 225KS^2 \cdot SN^2. \quad (**)$$

Решение. Как и в предыдущей задаче, согласно стереометрической теореме Менелая для пирамиды $SABC$ (рис. 6) получим:

$$\frac{BM}{MA} \cdot \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CK}{KS} \cdot \frac{SN}{NB} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{CK}{KS} \cdot \frac{SN}{NB} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{CK}{KS} \cdot \frac{SN}{NB} = 1.$$

Разделив обе части данного соотношения (**) на произведение $KS^2 \cdot NB^2$, получим:

$$180\frac{CK^2}{KS^2} - 44 = 225\frac{SN^2}{NB^2}.$$

Введя обозначения $\frac{CK^2}{KS^2} = y$ и $\frac{SN^2}{NB^2} = x$, составим и решим систему:

$$\begin{cases} 180y - 44 = 225x, \\ 2\sqrt{xy} = 1, \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 720y^2 – 176y - 225 = 0, \\ x = \dfrac{1}{4y}, \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{100}{144}, \\ x = \dfrac{144}{400} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = \dfrac{5}{6}, \\ \sqrt{x} = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, $\frac{CK}{KS} = \frac{5}{6}$ и $\frac{SN}{NB} = \frac{3}{5}$.

Далее, действуя по аналогии с предыдущей задачей, найдём объём многогранника $MNKPCB$.

Ответ. $V_{MNKPCB} = 2225$ см^3.

В трёх разобранных нами задачах использовалось необходимое условие пространственной теоремы Менелая.

Рассмотрим задачу на применение достаточного условия этой теоремы.

Задача 4. В пирамиде $KLMN$ точка A лежит на ребре KN, точка B – на ребре LN, точка C – на ребре LM и точка D – на ребре MK. Докажите, что точки A, B, C и D принадлежат одной плоскости, если выполнены следующие соотношения между длинами отрезков:

$$7BL = 8BN,\ CL = 4CM,$$
$$7AK \cdot DM = 2AN \cdot DK.$$

Решение. Из условия задачи следует:

$$\frac{KA}{AN} \cdot \frac{NB}{BL} \cdot \frac{LC}{CM} \cdot \frac{MD}{DK} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 4}{7 \cdot 8 \cdot 1} = 1.$$

Тогда согласно достаточному условию теоремы Менелая точки A, B, C и D принадлежат одной плоскости.

Предлагаем читателям задачи для самостоятельного решения по данной теме.

Задача 5. Около сферы описан пространственный четырёхугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости. (*Указание:* воспользуйтесь достаточным условием теоремы Менелая и свойствами касательных.)

Задача 6. В правильном тетраэдре $SABC$ с ребром 10 м через точки M и N – середины рёбер AB и SB – и точку P, лежащую на ребре AC, проведена плоскость. Найти площадь сечения и отношение объёмов частей данного тетраэдра, на которые секущая плоскость его делит, если $PA = 3CP$.

Ответ. $\frac{225}{16}\sqrt{3}$ м^3; $\frac{21}{11}$.

Задача 7. В пирамиде $SABC$ с объёмом 7 м^3 проведена плоскость через точки $K \in SC$, $M \in AB$ и $P \in AC$. Найти объёмы частей, на которые секущая плоскость делит данную пирамиду, если $BM:MA = 4:3$, $AP:PC = 3:2$, $CK:KS = 3:4$.

Ответ. 3,4 м^3; 3,6 м^3.