Гайнуллин Камиль Галиахметович
Доктор физико-математических наук, начальник отдела Всероссийского научно-исследовательского института экспериментальной физики (г. Саров Нижегородской обл.).

Текстовые задачи на максимум и минимум

Вашему вниманию представлено несколько весьма близких текстовых задач с условиями максимума или минимума. Решение большинства из них использует соотношения или свойства, известные из курса геометрии, в частности, что отрезок прямой – минимальное расстояние между двумя точками, и свет проходит его за минимальное время. Очевидно, что идейно этот тип задач можно отнести и к кинематике – разделу школьного курса физики.

По мнению автора, занимательная форма задач повышает интерес школьников к «сухим» физико-математическим дисциплинам и служит мостиком между «практикой» и «абстрактными» науками. Приведённые ниже эпизоды (задачи) из «жизнеописания» легендарного пирата Флинта («Остров сокровищ» Р. Стивенсона) составлены по материалам сборника автора «Вася, Федя и капитан Флинт. Текстовые задачи по математике для школьников и их родителей с подсказками и решениями». Саров, «Римус», 2007 г.

Эпизод 1. 23 мая 1741 года, находясь на базе на острове Бикон-Ки, бравый капитан Флинт узнаёт, что только что из Картахены прямым курсом на Гаити с постоянной скоростью $U = 10$ км/ч вышел испанский конвой с золотом. Как долго пиратам можно задержаться на базе, и в каком направлении следует плыть бригу Флинта «Морж» с постоянной скоростью $V = 15$ км/ч, чтобы перехватить конвой до его прихода на Гаити? Считать, что указанные порты образуют равносторонний треугольник с длиной стороны $b = 600$ км.

Решение. Пусть указанные порты образуют равносторонний ΔKBH

с вершинами в Картахене (K), Гаити (H), Бикон-Ки (B), а перехват произошёл в точке M на стороне KH через время t после выхода конвоя и через $(t - t_0)$ после выхода брига (рис. 1). Тогда длина $KM = Ut$, а $BM = V(t - t_0)$. В ΔKMB по теореме косинусов для угла $\angle K = 60^\circ$ записываем:

$$BM^2 = V^2(t - t_0)^2 = U^2t^2 + b^2 - bUt.$$

Графики обеих частей этого уравнения представляют собой параболы. Несложно доказать, что максимальное значение t_0 достигается, когда $t = b/U$, т. е. когда M совпадает с точкой H и бригу Флинта следует плыть по прямой на Гаити. В этом случае находим максимально возможную задержку $t_0 = b/U - b/V = 20$ часов.

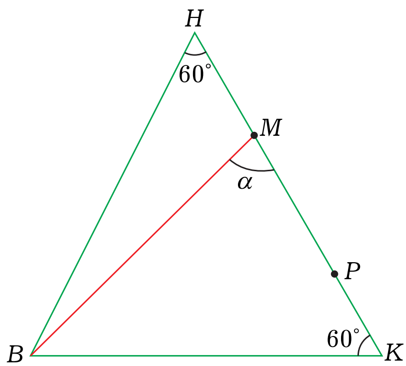

Рис. 1

Рассмотрим геометрическую интерпретацию этой задачи. Пусть в момент t_0 конвой находился в точке P. Т. к. $PM = U(t - t_0) = BM \cdot (U / V)$, а $MH = b \cdot \cos 60^\circ - BM \cdot \cos\alpha$, то

$$KP = Ut_0 = b - PM - MH = $$
$$= b / 2 + BM \cdot (\cos\alpha - U / V).$$

Из последнего соотношения видно, что значение t_0 растёт при увеличении BM и уменьшении угла α, что одновременно имеет место при приближении точки M к вершине H, следовательно, максимум t_0 достигается при совмещении этих точек.

Эпизод 2. 4 февраля 1742 года, находясь на своей базе в Бикон-Ки, Флинт узнаёт, что только что с Гаити с одинаковой скоростью U = 10 км/ч вышли 2 галеона с денежным довольствием испанским гарнизонам. Один прямо шёл в Панаму, другой – в Мексику. Считать, что испанские порты образуют равносторонний треугольник с длиной стороны b = 900 км, а база Флинта находится в его центре. Галера Флинта вышла в море с задержкой t_0, имея постоянную скорость V = 14 км/ч.

а) Какая максимальная задержка t_0 допустима для перехвата одного галеона?

б) Какая максимальная задержка t_0 допустима для перехвата обоих галеонов?

Решение. *а*) Положим, что галеоны вышли из вершины A равностороннего ΔABC, в центре которого (точка O) находится база. Пусть перехват произошёл в точке M_1 на стороне AB через время t_1. Тогда длина $OM_1 = V \cdot (t_1 - t_0)$, $AM_1 = U \cdot t_1$, $AO = b / \sqrt{3}$ (рис. 2).

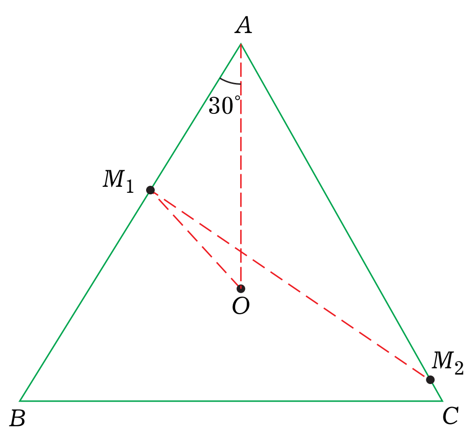

Рис. 2

В ΔAOM_1 с углом 30° запишем теорему косинусов:

$$OM_1^2 = V^2(t_1 - t_0)^2 = b^2/3 + U^2t_1^2 - bU \cdot t_1.$$

Графики обеих частей этого уравнения представляют параболы от времени t_1. Несложно доказать, что максимального значения t_0 достигает, когда $t_1 = b/U$, т. е. когда M_1 совпадает с точкой B. Геометрическая интерпретация этого утверждения аналогична эпизоду 1. В этом случае находим задержку $t_0 = b/U - b/(V\sqrt{3}) = 90 \cdot (1 - 5/7\sqrt{3}) \approx 53$ ч.

б) Положим, что галеоны вышли из вершины A равностороннего ΔABC, в центре которого (точка O) находится база Флинта. Пусть первый перехват произошёл в точке M_1 на стороне AB через время t_1, а второй – через время t_2 в точке M_2 на стороне AC (рис. 3).

Выше показано, что максимальное время t_0 достигается, когда точка перехвата совпадает с вершиной треугольника. В нашем случае M_2 должно совпадать с точкой C. Аналогично предыдущей задаче записываем систему:

$$\begin{cases} OM_1^2 = V^2(t_1 - t_0)^2 = b^2/3 + U^2t_1^2 - bU \cdot t_1, \\ CM_1^2 = V^2t_2^2 = b^2 + U^2t_1^2 - bU \cdot t_1, \\ t_1 + t_2 = b/U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = t_1 - \dfrac{\sqrt{b^2/3 + U^2t_1^2 - bU \cdot t_1}}{V}, \\ V^2(b/U - t_1)^2 = b^2 + U^2t_1^2 - bU \cdot t_1. \end{cases}$$

Решение второго уравнения относительно t_1 даёт 2 значения: 240 и 33,75 часа, первое из которых превышает допустимую величину 90 и не подходит.

Подстановка в первое уравнение даёт:

$$t_0 = 15 \cdot (1 - 10\sqrt{57}/14)/4 \approx 13{,}5 \text{ часа}.$$

Эпизод 3. Утром 20 сентября 1742 года отдыхавшему на базе в Бикон-Ки Флинту сообщили, что только что из Гаити с равными постоянными скоростями U=10 км/ч вышли 2 галеона с оружием для испанских гарнизонов. Один прямо шёл в Панаму, другой в Мексику. Считать, что испанские порты образуют равносторонний треугольник со стороной $b = 900$ км, а база находится в его центре. Галера Флинта немедленно вышла в море на перехват со скоростью V.

а) Какая минимальная скорость V допустима для перехвата одного галеона?

б) Успеет ли Флинт перехватить оба галеона, если скорость V = = 12,5 км/час ?

Решение. *а*) Положим, что галеоны вышли из вершины A равностороннего ΔABC, в центре которого (точка O) находится база Флинта. Пусть перехват произошёл в точке M_1 на стороне AB через время t_1. Тогда $OM_1 = Vt_1$, $AM_1 = Ut_1$, $AO = b/\sqrt{3}$. В ΔAOM_1 с углом 30° запишем теорему косинусов:

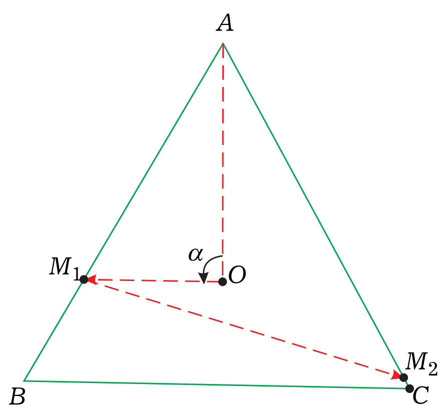

Рис. 3

$$OM_1^2 = V^2t_1^2 = b^2/3 + U^2t_1^2 - bU \cdot t_1,$$

откуда находим значение t_1:

$$t_1 = b\frac{U \pm \sqrt{(4V^2 - U^2)/3}}{2(U^2 - V^2)}.$$

Дискриминант его неотрицателен, если $2V \geq U$, т. е. минимально возможное значение $V = 5$ км/час. Отметим, что в этом случае перехват происходит не в ближайшей точке на стороне AB!

Рассмотрим этот нюанс подробнее. В ΔAOM_1 $AM_1 = U \cdot t_1$, а $OM_1 = V \cdot t_1$. По теореме синусов найдём величину скорости $V = U\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin\alpha}$, которая имеет минимум при $\alpha = 90^\circ$, т. е. ΔAOM_1 – прямоугольный, но прямой угол при вершине O!

б) Положим, что галеоны вышли из вершины A равностороннего ΔABC, в центре которого (точка O) находится база Флинта. Пусть первый перехват произошёл в точке M_1 на стороне AB через время t_1, а второй – через время t_2 в точке M_2 на стороне AC. Запишем теорему косинусов для ΔAOM_1 и ΔAM_1M_2:

$$\begin{cases} OM_1^2 = V^2t_1^2 = b^2/3 + U^2t_1^2 - bU \cdot t_1, \\ M_2M_1^2 = V^2t_2^2 = U^2(t_1+t_2)^2 + U^2t_1^2 - U^2t_1(t_1+t_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = b\dfrac{\sqrt{(4V^2-U^2)/3 - U}}{2(V^2-U^2)}, \\ t_2 = t_1\dfrac{U+\sqrt{4V^2-3U^2}}{2(V^2-U^2)}U. \end{cases}$$

Вычисления показывают, что общее время погони $t_1 + t_2 = 1{,}00202 \cdot (b/U)$ на ≈11 минут больше времени прихода второго галеона в порт (b/U) = 90 часов. Отметим, что данная скорость галеры 12,5 км/ч чуть меньше минимально необходимой $V_{\min}$. Точное значение $V_{\min}$ можно найти через решение кубического уравнения.

Эпизод 4. 11 октября 1743 года, зайдя за водой в Портобело, Флинт узнал, что испанский конвой с грузом какао $t_0 = 10$ часов назад ушёл оттуда прямым курсом с постоянной скоростью $U = 12$ км/ч. За какое минимальное и максимальное время галера мудрейшего Флинта, имеющая скорость $V = 20$ км/ч, настигнет конвой, если точный курс конвоя неизвестен и равновероятно лежит в угле величиной 60°?

Решение. Полагаем, что мудрый Флинт ведёт погоню оптимальным способом. В этом случае он выбирает, например, крайний правый курс из возможных OP и ведёт погоню в течение времени t_1, чтобы догнать конвой, если он ушёл этим курсом. Это минимальное время t_1 определим из уравнения:

$$V \cdot t_1 = U(t_1 + t_0) \Rightarrow t_1 = 15 \text{ ч.}$$

При этом $R_0 = Vt_1 = 300$ км.

Если там нет конвоя, то он меняет курс влево таким образом, чтобы каждый раз приходить в точку возможной (прямой) траектории конвоя и идёт вдоль дуги PM логарифмической спирали

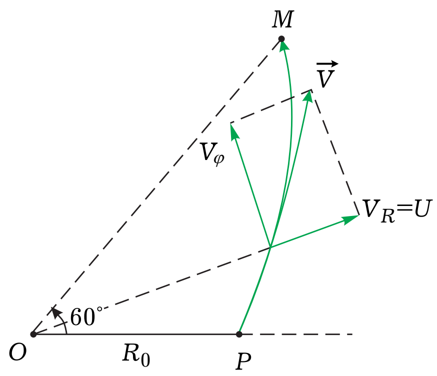

Рис. 4

$$R(\varphi) = R_0 \cdot \exp \frac{U \cdot \varphi}{\sqrt{V^2 - U^2}}.$$

В полярных координатах с центром O в Портобело можно записать, что радиальная скорость галеры должна совпадать со скоростью конвоя $dR/dt = V_R = U$, а нормальная к ней угловая скорость должна обеспечивать пересечение возможных траекторий конвоя в нужный момент:

$$d\varphi / dt = V_\varphi / R = \sqrt{V^2 - U^2} \ / \ (R_0 + U \cdot t).$$

Интегрирование этого уравнения по времени даёт t_2:

$$\int_0^{\pi/3} d\varphi = \frac{\pi}{3} = \int_0^{t_2} \frac{\sqrt{V^2 - U^2} dt}{R_0 + U \cdot t} = \frac{\sqrt{V^2 - U^2}}{U} \ln\left(1 + \frac{U \cdot t_2}{R_0}\right) \Rightarrow t_2 = 25 \cdot (e^{\pi/4} - 1) \approx 29{,}83 \text{ ч},$$

и максимальное время погони ≈45 часов.

Эпизод 5. Зайдя за водой в Портобело (Панама) вечером 31 октября 1743 года, Флинт узнал, что испанский конвой с грузом золота 10 часов назад ушёл оттуда прямым курсом с постоянной скоростью 12,5 км/ч, причём точный курс конвоя неизвестен и равновероятно лежит в угле величиной около 58°. Известно, что галера мудрейшего Флинта, имеющая скорость 20 км/ч, при тактике надёжного перехвата настигнет конвой не ранее, чем через 15 часов, и не позднее, чем через 45 часов после начала поиска. Через какое минимальное и максимальное время Флинт может перехватить этот конвой, имея две такие галеры и используя ту же тактику?

Эпизод 6. Отдыхая на базе в Бикон-Ки, утром 18 мая 1744 года Флинт узнает, что 15 часов назад из Гаити вышли два галеона с оружием. Один шёл прямо в Панаму со скоростью 20 км/ч, второй со скоростью 10 км/ч прямо в Мексику. Считать, что испанские порты образуют равносторонний треугольник с длиной стороны 900 км, а база находится в его центре. За какое минимальное время Флинт перехватит оба корабля, имея галеру «Кассандра», развивающую постоянную скорость 20 км/ч?

Эпизод 7. В полдень 12 мая 1743 года лежавший у кромки воды на белоснежном песке острова Бикон-Ки Флинт в подзорную трубу узрел на линии горизонта испанский флаг на верхушке мачты судна, шедшего прямым курсом со скоростью 8 км/ч перпендикулярно лучу зрения капитана. Ровно через $t_0 = 1$ час галера Флинта, развивавшая скорость 12 км/ч, вышла в погоню. В этот момент их разделяли 16 км.

а) За какое минимальное время t_1 галера Флинта может перехватить «испанца»?

б) За какое время t_2 Флинт перехватит «испанца», если в каждый момент вектор скорости галеры будет направлен на неизвестное судно?

в) На сколько различается минимальное время туда и обратно в вариантах *а*) и *б*)?

г) На какой высоте над уровнем моря реял флаг испанского судна?

Эпизод 8. Зайдя с «обходом» в порт на Эспаньоле 22 июня 1744 года, Флинт узнал, что t_0 часов назад оттуда ушли 2 галеона с денежным довольствием испанским гарнизонам. Один шёл прямо в Панаму со скоростью 10 км/час, другой – в Мексику со скоростью 12,5 км/час. Считать, что испанские порты образуют равносторонний треугольник с длиной стороны 900 км. Галера Флинта немедленно отправилась на перехват, имея постоянную скорость 20 км/ч.

а) Какое максимальное значение t_0 допустимо для перехвата одного галеона?

б) Какое максимальное значение t_0 допустимо для перехвата обоих галеонов?

Ответы: 5. 15 ч и 27 ч. **6.** 45 ч. **7**. *а*) 2 ч 46 мин, *б*) 3,2 ч, *в*) 42 мин, *г*) 15 м. **8**. *а*) 45 ч, *б*) 18 ч 46 мин.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Выбор не ограничен

Человек обращается к продавцу книжного магазина:
– Я хочу купить у вас книжку.
– Вам что-нибудь лёгкое?
– Это неважно, я на машине!

В студенческом общежитии

– Я купил кулинарную книгу, однако оказалось, что ею нельзя пользоваться.

– Почему?

– Каждый рецепт начинается со слов: «Возьмите чистую кастрюлю». Но у нас тут нет наждачного круга.

На плацу

На плацу солдат изо всех сил безуспешно пытается дотянуться до верха вертикально стоящего столба. Проходя мимо, офицер даёт ему совет:

– Положи столб, измерять будет удобнее.

– Не могу: ведь сержант велел его высоту измерить, а не длину.