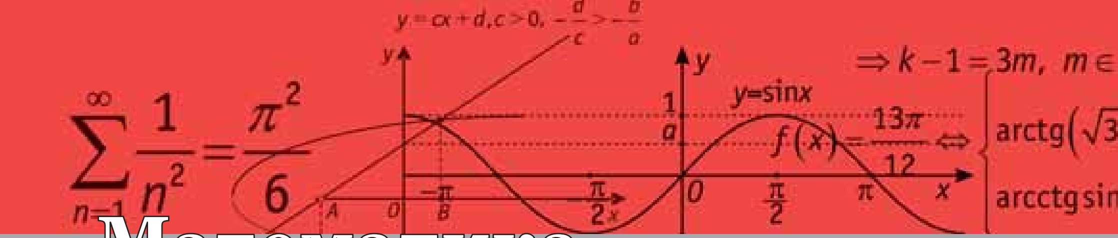
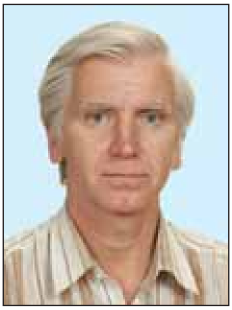
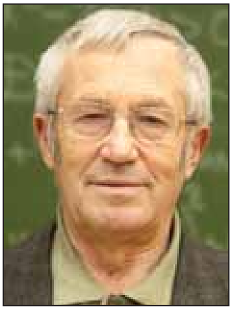


Прокофьев Александр Александрович
Доктор педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики №1 МИЭТ, учитель математики лицея №1557 г. Зеленограда.





Шабунин Михаил Иванович
Доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики МФТИ. Имеет почетное звание «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации». Лауреат государственной премии Правительства РФ в области образования 2002 года. Автор свыше двухсот научных и учебно-методических работ.

Системы уравнений и неравенств с двумя переменными

Задачи С5 из демонстрационного варианта ЕГЭ-2011 и тренировочных работ для подготовки к экзамену этого года посвящены исследованию вопроса о существовании и числе решений систем уравнений и неравенств с двумя переменными, содержащих параметр. К сожалению, в школьном курсе математики подобным задачам практически не уделяется должного внимания, хотя они регулярно предлагаются на вступительных экзаменах в ведущих вузах и на математических олимпиадах разного уровня.

В данной статье читатель сможет познакомиться с различными методами решения подобных задач, которые условно можно разбить на две группы: алгебраические и геометрические.

Алгебраические методы

К методам этой группы можно отнести большинство методов, которые используются при решении систем уравнений или неравенств, не содержащих параметров. В частности, это методы последовательного исключения неизвестных, замены или подстановки и др. В результате выполнения соответствующих преобразований задача, как правило, сводится к исследованию уравнения с одной переменной.

Рассмотрим несколько примеров на применение алгебраических методов.

Пример 1. Пусть (y, x) – решение системы уравнений

$$\begin{cases} x+3y=a-2, \\ x^2+9y^2=2a+6. \end{cases}$$

При каком a произведение xy принимает наименьшее значение?

Решение. Возведём в квадрат

обе части первого уравнения данной системы. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x^2+6xy+9y^2=a^2-4a+4, \\ x^2+9y^2=2a+6. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$6xy=a^2-6a-2 \Leftrightarrow xy=\frac{1}{6}\left[(a-3)^2-11\right].$$

Отсюда можем сделать вывод, что наименьшее значение произведения xy принимается при $a=3$ и равно $-\frac{11}{6}$. Осталось проверить, что при $a=3$ система имеет решение. Действительно, в этом случае система приводится к виду:

$$\begin{cases} x+3y=1, \\ x^2+9y^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3y, \\ 18y^2-6y-11=0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения последней системы положителен. Следовательно, система имеет решение.

Ответ. 3.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3xy+3ax-ay-a^2-3=0, \\ 9x^2+9y^2-6ax+18ay+7a^2-2a-17=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Группируя в первом уравнении системы члены, получим

$$(3xy-ay)+(3ax-a^2)=3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y+a)(3x-a)=3.$$

Группируя члены и выделяя полные квадраты во втором уравнении, имеем

$$(3x-a)^2+9(y+a)^2=3a^2+2a+17.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} (y+a)(3x-a)=3, \\ (3x-a)^2+9(y+a)^2=3a^2+2a+17. \end{cases}$$

Введём новые переменные $u=3x-a$ и $v=y+a$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} uv=3, \\ u^2+9v^2=3a^2+2a+17. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение этой системы на (-6) и складывая со вторым уравнением, получим уравнение

$$(u-3v)^2=3a^2+2a-1. \qquad (1)$$

Если $3a^2+2a-1<0$, то уравнение (1), а значит, и исходная система не имеют решения.

Если $3a^2+2a-1=0$, что выполняется при $a=-1$ и $a=\frac{1}{3}$, то уравнение (1), а значит, и исходная система имеют решения. Из (1) при этих значениях параметра получаем $u=3v$. Учитывая первое уравнение системы, имеем $3v^2=3$, т. е. $v_1=1$ и $v_2=-1$. Тогда $u_1=3$ и $u_2=-3$. Так как $x=\frac{u+a}{3}$, $y=v-a$, то отсюда получаем, что в этом случае исходная система будет иметь два различных решения.

Если $3a^2+2a-1>0$, то уравнение (1) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} u-3v=\sqrt{3a^2+2a-1}, \\ u-3v=-\sqrt{3a^2+2a-1}. \end{array}\right.$$

Учитывая первое уравнение системы, имеем: если $u=3v+\sqrt{3a^2+2a-1}$, то

$$3v^2+v\sqrt{3a^2+2a-1}-3=0; \qquad (*)$$

если $u=3v-\sqrt{3a^2+2a-1}$, то

$$3v^2 - v\sqrt{3a^2 + 2a - 1} - 3 = 0. \qquad (**)$$

Каждое из уравнений (*) и (**) будет иметь два решения. Следовательно, исходная система будет иметь более двух решений.

Ответ. -1 и $\dfrac{1}{3}$.

К алгебраическим методам отнесём также метод использования симметрии аналитических выражений. Задачи, в которых применяется этот метод, имеют характерную особенность: их условие не изменяется либо при замене знака одной или нескольких переменных на противоположный (*«симметрия относительно знака»*), либо при перестановке нескольких переменных (*«симметрия относительно перестановки переменных»*).

Для чётной функции $f(x)$ наблюдается «симметрия относительно знака» переменной x, так как в этом случае $f(x) = f(-x)$.

При исследовании на «симметрию относительно знака» в выражении $F(x, y)$ для пары (x, y) проверяются подстановкой в него пары $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. Если при подстановке пар (x, y) и $(-x, y)$ выражение не меняется, то говорят, что наблюдается «симметрия относительно знака» переменной x; для пар (x, y) и $(x, -y)$ – «симметрия относительно знака» переменной y; для пар (x, y) и $(-x, -y)$ – «симметрия относительно знаков» обеих переменных. Например, для выражения $F(x, y) = x^2 + y|x| - y^3$ при подстановке пар (x, y) и $(-x, y)$ получаем

$$F(-x, y) = (-x)^2 + y|-x| - y^3 =$$
$$= x^2 + y|x| - y^3 = F(x, y).$$

При исследовании на «симметрию относительно перестановки переменных» для пары (x, y) проверяется подстановкой в исходное выражение пара (y, x). Например, для выражения $G(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ получаем

$$G(y, x) = y^3 - 3yx + x^3 =$$
$$= x^3 - 3xy + y^3 = G(x, y).$$

Соответственно в некоторых выражениях наблюдается «симметрия» относительно и перестановки переменных, и изменения у них знака. В этих случаях для пары (x, y) проверяются подстановкой в исходное выражение пары $(-y, x)$, $(y, -x)$, $(-y, -x)$.

При решении задач указанного вида используется следующий порядок действий:

во-первых, выполняется проверка на симметрию;

во-вторых, из проверки выполнения *необходимых условий* находятся допустимые значения параметра (при «симметрии относительно знака» переменной подставляется ее нулевое значение; при «симметрии относительно перестановки» переменных все переменные обозначают одной буквой);

в-третьих, проверяется *достаточность условий*, т. е. для найденных допустимых значений параметра выполняется проверка того, что при полученных значениях параметра уравнение (система и т. д.) действительно имеет требуемое число решений.

Замечание. Последний этап заключается либо в доказательстве факта существования требуемого числа решений, либо в его опровержении.

Продемонстрируем применение приведенного алгоритма для решения примеров 3 и 4.

Пример 3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+(5+2\sqrt{6})^x-5a=y-|y|-8,\\ x^2-(a-4)y=0\end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Так как числа $5-2\sqrt{6}$ и $5+2\sqrt{6}$ – взаимно обратные, т. е. $(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=1$, то, заменив $5-2\sqrt{6}$ на $\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$ в первом уравнении системы, получим

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+\dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^x}-5a=y-|y|-8,\\ x^2-(a-4)y=0.\end{cases}$$

Заметим, что если пара (x_0, y_0) – решение этой системы уравнений, то и пара $(-x_0, y_0)$ будет также являться её решением. Следовательно, для того чтобы система имела единственное решение, необходимо, чтобы пары (x_0, y_0) и $(-x_0, y_0)$ совпадали. Это возможно, если $x_0=0$. Подставим пару $(0, y_0)$ в систему:

$$\begin{cases}1+1-5a=y_0-|y_0|-8,\\ 0-(a-4)y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10-5a=y_0-|y_0|,\\ (a-4)y_0=0.\end{cases}$$

Отсюда получаем два допустимых значения параметра a: $a=2$ и $a=4$.

Пусть $a=2$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+\dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^x}=y-|y|+2,\\ x^2+2y=0.\end{cases}$$

Заметим, что левая часть первого уравнения системы $(5-2\sqrt{6})^x+\dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^x}\geq 2$ (как сумма двух взаимно обратных чисел; причём равенство достигается, если $(5-2\sqrt{6})^x=1$, т. е. при $x=0$), а $y-|y|+2<2$ при $y<0$ и $y-|y|+2=2$ при $y\geq 0$. Следовательно, решением первого уравнения системы является любая пара вида $(0; y)$, где y – любое неотрицательное число. Подставляя пару $(0; y)$ во второе уравнение системы, получаем, что система имеет единственное решение $(0; 0)$.

Пусть $a=4$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+\dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^x}=y-|y|+12,\\ x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-|y|=-10, \\ x=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что система имеет единственное решение $(0;-5)$.

Ответ. 2 и 4.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \le ax - x^2 - 3, \\ x \le ay - y^2 - 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если при некотором значении параметра a пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы неравенств, то пара (y_0, x_0) – также решение, поскольку при подстановке второй пары уравнения системы остаются теми же, но меняются местами. Следовательно, необходимым условием единственности решения является совпадение этих пар. Если $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$, то $x_0 = y_0$.

Подставляя $x_0 = y_0$ в систему, получим, что каждое неравенство примет вид

$$x_0 \le ax_0 - x_0^2 - 3 \Leftrightarrow x_0^2 + (1-a)x_0 + 3 \le 0$$

и будет иметь единственное решение в случае, если дискриминант D соответствующего квадратного трёхчлена равен 0, т. е. $D = (1-a)^2 - 12 = 0$. Решая уравнение $a^2 - 2a - 11 = 0$, получаем два значения параметра a: $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a = 1 + 2\sqrt{3}$.

Подставляя $a = 1 - 2\sqrt{3}$ в систему неравенств, получаем:

$$\begin{cases} y \le (1-2\sqrt{3})x - x^2 - 3, \\ x \le (1-2\sqrt{3})y - y^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (1-2\sqrt{3})x + y + 3 \le 0, \\ y^2 - (1-2\sqrt{3})y + x + 3 \le 0. \end{cases}$$

Сложив левые части и правые части неравенств системы, получим:

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 + 2\sqrt{3}y + 6 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2\sqrt{3}x + 3) + (y^2 + 2\sqrt{3}y + 3) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{3})^2 \le 0.$$

Отсюда следует, что система имеет единственное решение $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

Действуя аналогично, получим, что при $a = 1 + 2\sqrt{3}$ система имеет единственное решение $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Ответ. $1 \pm 2\sqrt{3}$.

Графические методы

В методах этой группы используется геометрическая интерпретация уравнений или неравенств, связанная с геометрическим смыслом модуля, формулы расстояния между двумя точками на плоскости, неравенством треугольника, или метод наглядной графической интерпретации с использованием графического образа задачи на координатной плоскости Oxy.

Пример 5. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 64 + 16x} + \\ + \sqrt{x^2 + y^2 + 36 - 12y} = 10, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде:

$$\sqrt{(x+8)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-6)^2} = 10.$$

Пусть $M(x; y)$ – точка координатной плоскости (см. рис. 1), тогда

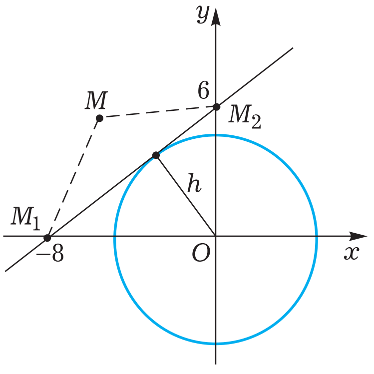


Рис. 1

левая часть этого уравнения есть сумма расстояний от точки M до точек $M_1(-8;0)$ и $M_2(0;6)$.

Так как расстояние между точками M_1 и M_2 равно 10, то координаты точки M удовлетворяют первому уравнению системы в том и только в том случае, когда M лежит на отрезке M_1M_2. В самом деле, если M не принадлежит прямой M_1M_2, то указанная сумма расстояний больше 10 (неравенство треугольника). В случае, когда точка M лежит на прямой M_1M_2 вне отрезка M_1M_2, эта сумма также больше 10.

Второе уравнение системы $x^2+y^2=a^2$ задаёт семейство окружностей радиуса $|a|$ с центром в точке O. Условию задачи будет удовлетворять окружность, имеющая единственную общую точку с отрезком M_1M_2. Это возможно в следующих случаях:

1) окружность касается отрезка M_1M_2; в этом случае $|a|=h$, где h – высота в треугольнике OM_1M_2, опущенная из точки O на M_1M_2 (см. рис. 1). Тогда $h=\frac{6\cdot 8}{10}=\frac{24}{5}$;

2) окружность пересекает отрезок M_1M_2 в одной точке; в этом случае её радиус должен быть больше катета OM_2, но не превышать катета OM_1 треугольника OM_1M_2, т. е. $6<|a|\le 8$.

Ответ. $-8\le a<-6$, $a=-\frac{24}{5}$, $a=\frac{24}{5}$, $6<a\le 8$.

Пример 6. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}|x|+2|y|+|2y-3x|=12,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два действительных решения.

Решение. Графиком первого уравнения системы является замкнутая ломаная L (граница многоугольника) с вершинами в точках, лежащих на прямых $x=0$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}x$ (см. рис. 2). Найдём координаты этих вершин. Если $x=0$, то $|y|=3$ ($y=3$ и $y=-3$); если $y=0$, то $|x|=3$; если $y=\frac{3}{2}x$, то $|x|=3$, $|y|=\frac{9}{2}$.

Ломаная L изображена на рис. 2, где $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-3)$,

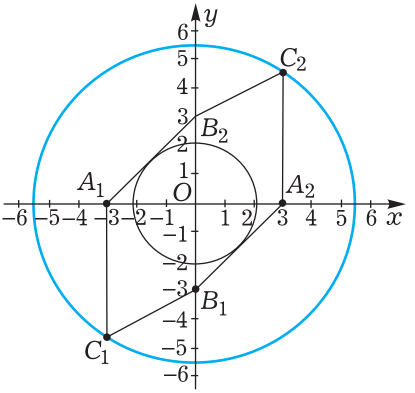


Рис. 2

$B_2(0;3)$, $C_1\left(-3;-\dfrac{9}{2}\right)$, $C_2\left(3;\dfrac{9}{2}\right)$.

Графиком второго уравнения при $a>0$ является окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $O(0;0)$.

Данная система уравнений имеет ровно два решения в следующих случаях:

1) окружность касается отрезков A_1B_2 и A_2B_1, тогда $\sqrt{a}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ и $a=\dfrac{9}{2}$;

2) радиус окружности равен расстоянию от точки O до точек C_1 и C_2, тогда $a=3^2+\left(\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{117}{4}$.

Ответ. $a_1=\dfrac{9}{2}$, $a_2=\dfrac{117}{4}$.

Пример 7. (МФТИ, 2008). Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+31\le 8(|x|+|y|), \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Неравенство системы можно записать в виде:

$$(x^2-8|x|+16)+(y^2-8|y|+16)\le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x|-4)^2+(|y|-4)^2\le 1.$$

Множество E решений этого неравенства – объединение кругов K_1, K_2, K_3, K_4 (вместе с их границами) радиуса 1 (см. рис. 3) с центрами $O_1(4;4), O_2(4;-4)$, $O_3(-4;4)$, $O_4(-4;-4)$.

Запишем уравнение системы в виде:

$$x^2+(y-1)^2=a^2.$$

Это уравнение задаёт окружность L с центром в точке $M(0;1)$ радиуса $|a|$. Исходная система имеет хотя бы одно решение при тех значениях a, при которых окружность L имеет общие точки с множеством E.

При этом достаточно (ввиду симметричного расположения кругов) выяснить, при каких значениях a окружность L имеет общие точки с кругами с центрами в точках O_1 и O_2.

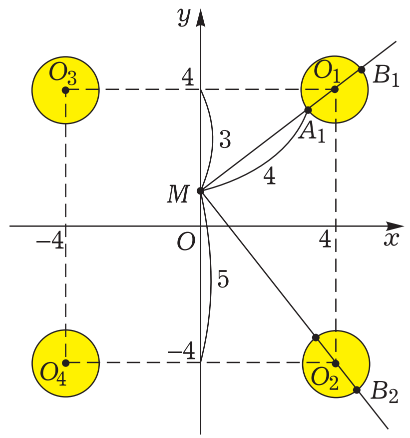


Рис. 3

Проведём из точки M лучи l_1 и l_2 в направлении точек O_1 и O_2. Пусть A_1 и B_1 – точки пересечения l_1 и окружности с центром O_1, A_2 и B_2 – точки пересечения l_2 и окружности с центром O_2. Тогда (см. рис. 3):

$$MO_1=5,$$

$$MO_2=\sqrt{(4-0)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{41},$$

$$MA_1=4,\ \ MB_1=6,\ \ MA_2=\sqrt{41}-1,$$

$$MB_2=\sqrt{41}+1.$$

Так как $\sqrt{41}-1<6$, то объединение отрезков $[4;6]$ и $[\sqrt{41}-1;\sqrt{41}+1]$ есть отрезок $[4;\sqrt{41}+1]$, а искомое множество значений a определяется неравенством $4\le|a|\le\sqrt{41}+1$.

Ответ. $4\le|a|\le\sqrt{41}+1$.

Пример 8. (МФТИ, 2010). Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-1|+|x+1|-2y=0, \\ x^2+y^2-2ay+2a=1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Первое уравнение системы запишем в виде

$$y=\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ |x|, & |x|>1. \end{cases}$$

График этой функции изображён на рис. 4.

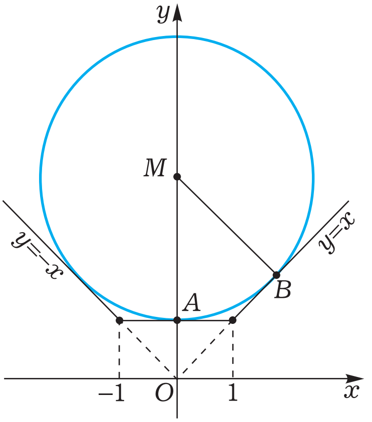


Рис. 4

Второе уравнение системы, записанное в виде $x^2+(y-a)^2=(a-1)^2$, является при $a\ne 1$ уравнением окружности с центром в точке $(0;a)$ радиуса $|a-1|$. При любых $a\ne 1$ эта окружность проходит через точку $A(0;1)$ и касается прямой $y=1$ в точке A.

При $a=1$ окружность вырождается в точку A, и в этом случае система имеет единственное решение $(0;1)$.

Если $a<1$, то точки окружности лежат (при $y\ne 1$) ниже прямой $y=1$; в этом случае система также имеет единственное решение $(0;1)$.

Пусть $a>1$. Тогда окружность расположена (при $y\ne 1$) выше прямой $y=1$, а система будет иметь, кроме решения $(0;1)$, ещё два решения тогда и только тогда, когда окружность касается прямых $y=x$ и $y=-x$. Достаточно рассмотреть одну из этих прямых, например, прямую $y=x$.

Если точка $M(0;a)$ – центр окружности радиуса r, касающейся прямой $y=x$ в точке B, то $MA=MB=r$, $OM=r+1=a$. Так как прямые $y=x$ и $y=-x$ пересекаются в точке O под прямым углом, то $\angle MOB=\frac{\pi}{4}$, $OM=\frac{BM}{\sin\frac{\pi}{4}}$, т. е. $r+1=r\sqrt{2}$, откуда $r=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$, $a=r+1=2+\sqrt{2}$.

Ответ. $2+\sqrt{2}$.

Следует отметить, что приведённая классификация не претендует на отражение в полном объёме всего многообразия подобных задач, но включают в себя большую часть, с которой придётся столкнуться школьнику при подготовке к экзамену.

Литература

1. *Козко А.И., Панфёров В.С., Сергеев И.Н., Чирский В.Г.* ЕГЭ2011. Математика. Задача С5. Задачи с параметром/Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 144 с.

2. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса/М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. – 391 с.