Петров Игорь Борисович
Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики Московского физико-технического института (МФТИ).

О приближённых решениях систем линейных алгебраических уравнений

При рассмотрении многих задач физики, экономики, управления и других областей науки часто возникает необходимость численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Какие характерные трудности ожидают нас при этом? Как их можно преодолеть?

В этой статье даются ответы на примере системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

1. Точные решения СЛАУ. Пусть имеется система двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} ax+by=f, \\ cx+dy=g, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, c, d, f, g – произвольные действительные числа, отличные от нуля. Исключая из первого уравнения x

$$x=-\frac{b}{a}y+\frac{f}{a}$$

и подставляя его значение во второе уравнение, получим:

$$y=\frac{ga-fc}{ad-cb}, \ x=\frac{cd-gb}{ad-cb}. \tag{2}$$

Введём в плоскости прямоугольную систему координат Oxy. Уравнения СЛАУ (1) в этих координатах представляются прямыми, для которых можно записать:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{f}{b}, \\ y=-\dfrac{c}{d}x+\dfrac{g}{d}. \end{cases}$$

Возможны три случая.

Если

$$\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d},$$

то угловые коэффициенты наших прямых различны:

$$-\frac{a}{b}\neq-\frac{c}{d},$$

и прямые пересекаются в единственной точке, т.е. система (1) имеет единственное решение.

Если

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\neq\frac{f}{g},$$

т.е. $ad-cb=0$, угловые коэффициенты наших прямых равны между собой:

$$-\frac{a}{b}=-\frac{c}{d},$$

но при этом

$$\frac{c}{b}\neq\frac{g}{d},$$

т.е. прямые параллельные и не совпадают. Следовательно, система (1) не может иметь решений. Формулы (2) лишены при этом смысла.

Если же

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{f}{g},$$

то $-\frac{a}{b}=-\frac{c}{d}$, $\frac{f}{b}=\frac{g}{d}$ и, следовательно, оба уравнения СЛАУ (1) определяют одну и ту же прямую. В таком случае система имеет бесконечное множество решений: координаты точек этой прямой являются всевозможными её решениями. Всё это хорошо известные факты из школьного учебника алгебры.

2. Первые «сюрпризы». Однако давайте рассмотрим следующую простую систему уравнений:

$$\begin{cases} x+10y=11, \\ 100x+1001y=1101. \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнения соответствующих прямых запишем в виде:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{10}x+\dfrac{11}{10}, \\ y=-\dfrac{100}{1001}x+\dfrac{1101}{1001}. \end{cases}$$

Эти прямые почти параллельны (их угловые коэффициенты практически равны). Решение такой системы очевидно: это пара чисел (1; 1).

А теперь немного изменим значение f (такая система называется «возмущённой»):

$$\begin{cases} x+10y=11{,}01, \\ 100x+1001y=1101. \end{cases} \qquad (4)$$

Видно, что решением этой СЛАУ является пара чисел (11,01; 0,00).

Вот мы и получили первую неожиданность: существуют СЛАУ, решения которых существенно изменяются при незначительных изменениях правых частей.

Приведём ещё один пример:

$$\begin{cases} -10^{-7}x+y=1, \\ x+2y=4. \end{cases} \qquad (5)$$

Исключив из первого уравнения x и подставив во второе, получим:

$$y=\frac{10^7+4}{10^7+2}. \qquad (6)$$

Проведя в (6) вычисления с помощью калькулятора с семью значащими цифрами, находим:

$$y=1{,}000000. \qquad (7)$$

Подставив (7) в первое уравнение системы (5), имеем:

$$x=0{,}000000.$$

Однако прямой подстановкой убеждаемся, что пара чисел (0,000000; 1,000000) не является решением этой системы.

С другой стороны, давайте исключим x из второго уравнения (5) и подставим в первое, в результате получим:

$$y = \frac{1 + 4 \cdot 10^{-7}}{1 + 2 \cdot 10^{-7}}. \qquad (8)$$

Вычисления в (8) с семью значащими цифрами дают:

$$y = 1{,}000000. \qquad (9)$$

Подставляя (9) во второе уравнение системы (5), находим:

$$x = 2{,}000000.$$

Проверкой убеждаемся, что пара чисел (2,000000; 1,000000) является решением системы (5) с точностью нашего вычислительного устройства.

Как видим, не всё так просто при попытке найти приближённые решения СЛАУ. Особенности приближённых вычислений должны быть учтены при грамотном составлении вычислительных алгоритмов.

3. Метод последовательных приближений. Поясним суть этого метода на примере системы (1). Предположим, что мы знаем некое «грубое», или, как говорят, начальное приближение решения системы. Обозначим эту пару чисел как $(x_0,\ y_0)$. Представим систему уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a} y + \dfrac{f}{a}, \\ y = -\dfrac{c}{d} x + \dfrac{g}{d}. \end{cases} \qquad (10)$$

Первое приближение, т.е. пару чисел $(x_1,\ y_1)$, находим, полагая в правой части (10) $x = x_0,\ y = y_0$. В результате имеем:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{b}{a} y_0 + \dfrac{f}{a}, \\ y_1 = -\dfrac{c}{d} x_0 + \dfrac{g}{d}. \end{cases}$$

Аналогичным образом вычисляем второе приближение:

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{b}{a} y_1 + \dfrac{f}{a}, \\ y_2 = -\dfrac{c}{d} x_1 + \dfrac{g}{d}, \end{cases}$$

третье:

$$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{b}{a} y_2 + \dfrac{f}{a}, \\ y_3 = -\dfrac{c}{d} x_2 + \dfrac{g}{d}, \end{cases}$$

----

i-тое приближение:

$$\begin{cases} x_i = -\dfrac{b}{a} y_{(i-1)} + \dfrac{f}{a}, \\ y_i = -\dfrac{c}{d} x_{(i-1)} + \dfrac{g}{d}. \end{cases} \qquad (11)$$

Вычислительный процесс (11) для численного решения СЛАУ был предложен немецким математиком Якоби и носит его имя.

Для завершения решения нашей задачи необходимо ещё ответить на два вопроса.

Первый: сколько нужно сделать приближений?

Ответ: необходимо задать точность, например, $\varepsilon = 10^{-5}$ и проводить приближения до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\left| x_{(i-1)} - x_i \right| + \left| y_{(i-1)} - y_i \right| \le \varepsilon. \qquad (12)$$

Второй вопрос сложнее: а будут ли две последовательности

$\{x_0, x_1, x_2, ..., x_i\}$; $\{y_0, y_1, y_2, ..., y_i\}$ сходиться к какой-нибудь паре чисел и если будут, то будет ли эта пара решением нашей задачи?

Мы не будем приводить формулировку и доказательство соответствующей теоремы, а приведём её результат. Оказывается, если максимальное из двух выражений $\left|\frac{a}{b}\right|$ и $\left|\frac{c}{d}\right|$ окажется меньше единицы, то наши последовательности, получаемые при помощи последовательных приближений, будут сходиться к решению СЛАУ. Что значит сходиться? Это значит, что значения x_i и y_i с увеличением номера приближения i будут все меньше и меньше отличаться от точного решения (x, y).

Заметим, что возможны случаи, когда приближения сначала «уходят» от точного решения, но затем вновь к нему приближаются. Если же наши последовательности не приближаются к точному решению, то, говорят, что вычислительный процесс расходится.

4. Геометрическая интерпретация метода последовательных приближений. Метод Якоби допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Введём в плоскости прямоугольную систему координат Oxy. Например, проведём две прямые, соответствующие двум уравнениям системы (1), и отметим точку с координатами (x_0, y_0) – это нулевое приближение (см. рис. 1).

Из точки $(x_0,\ y_0)$ проведём две прямые, параллельные осям Ox и Oy, до их пересечения с осями Oy, Ox соответственно. При пересечении этих прямых с прямыми, соответствующими первому и второму уравнениям системы (1), получаем точки с координатами (x_1, y_0) и (x_0, y_1).

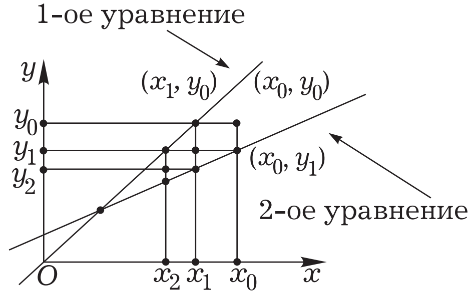

Рис. 1

Проведя из этих двух точек прямые, параллельные осям координат, находим на их пересечении точку с координатами $(x_1,\ y_1)$, что есть первое приближение решения системы (1). Повторяя такую же графическую операцию с парой чисел $(x_1,\ y_1)$, получим второе приближение – точку $(x_2,\ y_2)$ и т.д., что хорошо видно на графике.

5. Задача. В качестве простого упражнения предлагаю написать программу для вычисления решения системы уравнений (1) методом Якоби и, задавая различные значения коэффициентов a, b, f, c, d, g, исследовать процессы сходимости приближений x_i и y_i к точному решению. Ответить на вопросы: сходятся ли эти последовательности к точному решению системы, которое находится без труда, и сколько приближений на это потребуется при заданных различных ε.

Автор благодарит главного редактора нашего журнала, заведующего кафедрой общей физики Московского физико-технического института Анатолия Деомидовича Гладуна за обсуждение и рецензирование этой статьи.