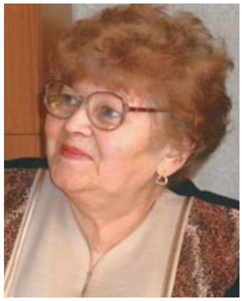

Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Свойства элементарных функций в области определения – это формулы?

В статье мы хотим показать, что некоторые равенства – свойства элементарных функций или операции с ними – некоторыми воспринимаются как формулы, а на самом деле формулами не являются. Формулы читаются как справа налево, так и слева направо. Равенства же для многих элементарных функций по-разному читаются справа налево или слева направо.

Например, если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, но..., если $ab > 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$.

Об этом мы и поговорим.

При этом ещё раз будет показано, насколько удобнее использовать равносильные преобразования.

1. Формула в алгебре

В алгебре формулы верны для любых входящих в них букв. Это, например, формулы сокращённого умножения

$$a^2 - b^2 \equiv (a-b)(a+b),$$

$$a^3 \pm b^3 \equiv (a+b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right),$$

$$(a \pm b)^2 \in a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)^3 \equiv a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \text{ и т. д.}$$

Мы пользуемся ими для упрощения алгебраических выражений при решении уравнений или неравенств. Например,

$$x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Однако *сложность* применения даже этих формул при решении уравнений или неравенств состоит в том, что, в отличие от чисел, любая функция имеет свою область определения и множество значений.

Проще всего работать с многочленами $f(x)=P_n(x)$, для которых $D(P_n)=\mathbb{R}$ и $E(P_n)=\mathbb{R}$. Для них формулы верны.

Если же $f(x)$, $g(x)$ – не многочлены, то функции $f(x)$, $g(x)$ имеют свои области определения $D(f)$, $D(g)$.

И тогда совсем другое дело!

Например,
$$\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)\equiv$$
$$\equiv\left(\sqrt{f(x)}\right)^2-\left(\sqrt{g(x)}\right)^2$$ – тождество, т.е. формула, но равенство
$$\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)=$$
$=f(x)-g(x)$ является уже уравнением:
$$\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)=$$
$$=f(x)-g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

2. Равенство $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. Это свойство или формула?

Есть в алгебре свойства, которые очень похожи на формулы. Это относится к выражениям, которые имеют ОДЗ, или нетривиальную область определения.

Впервые школьники встречаются с такой проблемой ещё в 6 классе. Кто помнит, всегда ли верна формула $a^m a^n=a^{m+n}$, $n,\ m\in\mathbb{Z}$? Нет, не всегда. Она верна для всех $a\in\mathbb{R}$, кроме $a=0$! Почему? Потому что, например, $0^{-3}0^5\ne 0^2$!

Ещё более серьёзные проблемы возникают в 9 классе при знакомстве с корнем n-й степени из числа. Вот где есть возможность абсолютно запутаться!

Там есть определение:
«Корнем n-й степени из числа b называется такое число a (если оно существует), n-я степень которого равна b». И ... никакого обозначения для этого!

Трудно сразу согласиться с таким определением, так как совершенно не ясно, как искать число a при заданном b. На самом деле, лучше бы сразу написать, что «корнем n-й степени из числа b называется такое число x (если оно существует), n-я степень которого равна b, то есть $x^n=b$».

Теперь ясно, что на самом деле речь идёт о решениях уравнения $x^n=b$. Тогда возникают естественные вопросы:

Как решать такое уравнение?

При каких b решение существует?

Если решения существуют, то сколько их?

Зависит ли решение от того, каково n?

Так как единого ответа на эти вопросы не существует, то становится ясно, почему нет обозначения для корня, так определённого.

Например, $(-1)^2=1$ и $1^2=1$ – значит, корнем 2-й степени из 1 называется и -1, и 1!

А другие числа есть, квадрат которых равен 1? Это надо исследовать.

Например, $(-1)^4 = 1, 1^4 = 1$. А другие есть? Оказывается, есть, но их невозможно «разместить » на числовой оси – это так называемые комплексные числа: $(i)^4 = 1,\ (-i)^4 = 1$.

Попробуем решить уравнение $x^n = b$ при различных n. Без графиков не обойтись.

Начертим эскизы графиков функции $y = x^n$ для чётных и нечётных n – рис. 1-2.

$y = x^{2n}$

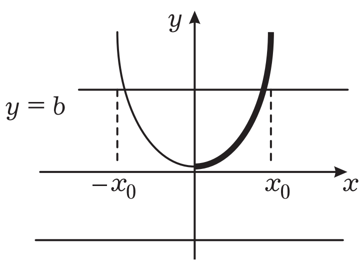

Рис. 1

$y = x^{2n+1}$

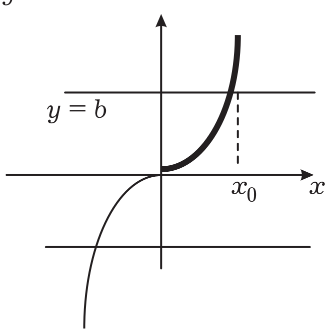

Рис. 2

На графике на рисунка 1 видно, что прямая $y = \text{const}$ либо совсем не пересекает график функции $y = x^{2n}$, либо пересекает в одной точке, либо пересекает график в двух различных точках.

Видно также, что прямая $y = const$ пересекает график функции $y = x^{2n+1}$ (рис. 2) всегда в *единственной* точке.

Рассмотрим теперь функции $y = x^{2n}$ и $y = x^{2n+1}$ *только при* $x \geq 0$ (части графиков отмечены жирными линиями).

Тогда оказывается, что уравнение $x^n = b,\ n \in \mathrm{N}$ имеет *единственное неотрицательное* решение x_0 для любого неотрицательного числа b и любого натурального числа n. Это решение *обозначается* $x_0 = \sqrt[n]{b}$ и называется *арифметическим корнем* из числа b (запоминаем, что арифметический корень определяется только для неотрицательного числа!).

В дальнейшем если в литературе, не оговорено, чётно n или нечётно, под $\sqrt[n]{b}$ *понимается* именно *арифметический* корень.

Заметим, что корень даже 2-й степени невозможно вычислить из *любого* положительного числа, но... график «говорит», что таковой всегда существует! Например, $\sqrt{9} = 3$, а чему равен $\sqrt{5}$? Число берём с калькулятора, а вычисляется оно с помощью высшей математики. Но это не точное значение, а приближённое, вычисленное с точностью, допустимой для данного калькулятора.

Как видно на графике (рис. 1), для любого неотрицательного числа b существует и единственно неотрицательное решение уравнения $x^{2n} = b$. Оно обозначается как $\sqrt[2n]{b}$ и называется *корнем чётной степени* $2n$ из b, то есть *корень чётной сте-*

пени из b *– это неотрицательное число* a*, такое, что* $a^{2n}=b$.

Отсюда сразу следует, что b – тоже неотрицательно.

$$\boxed{a=\sqrt[2n]{b}\overset{a\geq 0}{\Leftrightarrow} a^{2n}=b\,.} \qquad (1)$$

Отсюда, кстати, сразу следует, что

$$\boxed{\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ g^2(x)=f(x).\end{cases}} \qquad (2)$$

Второе, отрицательное, решение уравнения $x^{2n}=b$ равно $(-x_0)$ и обозначается $-\sqrt[2n]{b},\ n\in\mathrm{N}$.

Для отрицательных b уравнение $x^{2n}=b$ не имеет решений.

Уравнение $x^{2n+1}=b$, как видно на графике (рис. 2), всегда имеет *единственное* решение при *любом* действительном b. Это решение называется корнем нечетной степени из числа b и обозначается как $\sqrt[2n+1]{b}$. Для *неотрицательных* b значение $\sqrt[2n+1]{b}$ совпадает с арифметическим корнем .

Итак,

$$x^{2n}=b\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[2n]{b},b\geq 0,n\in\mathrm{N}\,. \qquad (3)$$

$$x^{2n-1}=b\Leftrightarrow x=\sqrt[2n-1]{b},b\in R,n\in\mathrm{N}\,. \qquad (4)$$

Для *арифметических* корней доказываются свойства, которые воспринимаются школьниками как «формулы».

Заметим сразу, что операции с корнями чётной или нечётной степени в общем виде не вводятся.

Например, $\sqrt{a}\sqrt[3]{b}=$

$$=\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b\geq 0,\\ \sqrt{a}\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2},\end{cases}\\ \begin{cases}b<0,\\ \sqrt{a}\sqrt[3]{b}=-\sqrt{a}\sqrt[3]{-b}=-\sqrt[6]{a^3}\sqrt[6]{b^2}=-\sqrt[6]{a^3b^2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Но формулы, как правило, справедливы для любых значений входящих в них букв.

А для арифметических корней, например, всё начинается с фразы «для любых $a>0,b>0,n\geq 2\ldots$ выполнено».

В школьных учебниках нередко свойства записаны в виде:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

$$\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}.$$

Большинство школьников равенства запоминают, но ...забывают то, что написано перед ними – например, условия $a>0,b>0,n\geq 2.$.

Эти свойства по существу формулы, но ... в *ОДЗ арифметических* корней, так как только там они являются *тождествами.*

Дальше доказываются *свойства арифметического* корня.

Если $a>0,\ b>0,\ n\geq 2,\ m\geq 2,\ n,\ m\in\mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned}&1.\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\\ &2.\ \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\\ &3.\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\\ &4.\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},\\ &5.\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m},\\ &6.\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.\end{aligned} \qquad (5)$$

Заметили, что все равенства выписаны *не так*, как в некоторых учебниках?

Они выписаны в таком виде, что все *левые* части существуют только при $a>0,\ b>0$.

Равенства (5) только при условиях $a>0, b>0$ являются *тождествами* и могут называться *формулами.* Но ...только для $a>0, b>0$!

Заметим теперь, что в некоторых равенствах левые и правые части имеют, вообще говоря, разные области определения. Например, *правые* части в формулах 2-3 определены и при $ab>0$, а значит, и тогда, когда $a<0,\ b<0$, а в формулах 4-5 правые части определены для чётных m при любых значениях a.

Так как, например, корень чётной степени определён только из неотрицательного числа, то, в частности, *не существует* просто формулы вида $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, так как области существования (области определения, или, если хотите, ОДЗ) правой и левой частей разные! Если бы это было так, то было бы:

$$\sqrt{x}\sqrt{x}=4\overset{?}{\Leftrightarrow}\sqrt{x^2}=4\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm4.$$

Но ... $x=-4$ – не решение уравнения $\sqrt{x}\sqrt{x}=4$.

Тем более *не существует* формулы $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, так как

$$\sqrt{(-2)(-2)}\neq-2\ !$$

Сложность начинается тогда, когда возникает необходимость преобразовать, например, $\sqrt[n]{ab}$ в произведение корней. Школьные учебники об этом хранят молчание. На самом деле имеют место *другие свойства* арифметических корней из произведения и частного.

Заметим, что, если $a<0, b<0$, то $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{(-a)(-b)}=\sqrt[n]{-a}\sqrt[n]{-b}$, но, если $a>0, b>0$, то $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$ Поэтому для любых a, b, таких, что $ab>0$, верно, что $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}.$ (6)

Однако при $ab>0$ для чётных и нечётных n можно записать поразному:

$$\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{|a|}\,\sqrt[2n]{|b|},\quad \text{но}$$

$$\sqrt[2n+1]{ab}=\sqrt[2n+1]{a}\,\sqrt[2n+1]{b}.$$

Аналогично, если $ab>0$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}. \qquad (7)$$

Поэтому формул $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ или $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ в алгебре нет, и в частности, нет «формулы» $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, так как $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$.

Интересно и свойство 4 для чётного k.

Если $a>0$, то $\sqrt[n]{a^{2k}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{2k}$.

Если же $a<0$, то $\sqrt[n]{(-a)^{2k}}=\left(\sqrt[n]{-a}\right)^{2k}$.

Объединяя оба утверждения, получаем, что

$$\sqrt[n]{a^{2m}}=\sqrt[n]{|a|^{2m}}=\left(\sqrt[n]{|a|}\right)^{2m},$$

В частности,

$$\boxed{\sqrt[2m]{a^{2m}}=\sqrt[2m]{|a|^{2m}}=|a|.} \qquad (8)$$

На эти формулы опираются преобразования, например, $\sqrt{f(x)}$ и $\sqrt{g(x)}$ в $\sqrt{f(x)g(x)}$. Но множества X, где определены функции $f(x)$, $g(x)$, теперь недостаточно – речь пойдёт о подмножестве $X^*\subseteq X$ *(ОДЗ), на котором обе функции* *неотрицательны.* Поэтому мы должны записать, что

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} \overset{ОДЗ}{=} \sqrt{f(x)g(x)}. \qquad (9)$$

Равенство $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=\sqrt{f(x)g(x)}$ является не формулой, а уравнением. Даже нулевое значение левая и правая части принимают на разных множествах.

Например, $\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x\in\{-2;-1;1;2\}$, а

$\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-4}=0 \Leftrightarrow x\in\{-2;2\}$.

Для уравнения $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)$ уравнение $\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)$ не является и следствием, так как они имеют разные ОДЗ.

Конечно, как всякое равносильное соотношение, равенство (9) является и следствием:

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} \sqrt{f(x)g(x)}.$$

Не всё ли равно, чем считать соотношение (9)? Как это сказывается на решении уравнений?

При решении уравнения-следствия найденные корни подставляются в само уравнение (правда, можно сначала подставить в ОДЗ, но оставшиеся всё равно в уравнение), а при решении равносильного уравнения решение подставляется только в ОДЗ.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x-2}\sqrt{x-8}=2x+3$.

► *Первый способ* (решаем с уравнениями-следствиями):

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x-8}=2x+3 \overset{ОДЗ}{\Rightarrow}$$

$$\overset{ОДЗ}{\Rightarrow} \sqrt{x^2-10x+16}=2x+3 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x+16=(2x+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x+16=4x^2+12x+9 \Leftrightarrow$$

$$3x^2+22x-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{142}}{3}.$$

Кто решится подставить эти корни в уравнение

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x-8}=2x+3\,?$$

Второй способ (решаем с уравнением-следствием и равносильным уравнением). Будем считать, что уже умеем решать уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ – см (2).

Тогда

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x-8}=2x+3 \overset{ОДЗ}{\Rightarrow}$$

$$\overset{ОДЗ}{\Rightarrow} \sqrt{x^2-10x+16}=2x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x+16=(2x+3)^2, \\ 2x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3\ge 0, \\ 3x^2+22x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-11\pm\sqrt{142}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-11+\sqrt{142}}{3}.$$

Здесь уже надо подставлять в уравнение только один корень.

Третий способ (решаем равносильную систему)

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x-8}=2x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 8 \Rightarrow 2x+3>0, \\ (x-2)(x-8)=(2x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 8, \\ 3x^2+22x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-11\pm\sqrt{142}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

А здесь ничего подставлять не надо!

Ответ. $\varnothing$.

Сравните способы. ◄

Не всякое возведение в квадрат приводит к следствию.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{3x+1}$.

► $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}+x-4=3x+1$ (обратите внимание: ОДЗ правой и левой части нового уравнения совпадают с ОДЗ исходного уравнения!)

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}=x+4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+1)(x-4)=(x+4)^2, \\ x-4\ge 0 \Rightarrow x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-4\ge 0>0, \\ 3x^2-20x-32=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{10\pm 14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=8.$$

Ответ. 8. ◄

Число вида $\frac{m}{n}$, где n – произвольное натуральное число, а m – произвольное целое число, называется рациональным числом. Множество всех рациональных чисел обозначается буквой Q.

Теперь для любого *положительного* числа a, любого *натурального* числа n и любого *целого* числа m определяется степень с рациональным показателем:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ a>0, n\in \mathrm{N}, m\in \mathrm{Z}.} \quad (10)$$

Если дробь $\frac{m}{n}>0$, то рациональная степень определяется для неотрицательных a.

Выражение 0^0 не определено.

В частности,

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}, a\ge 0, n\in \mathrm{N}.$$

Спрашивается, верно ли, что $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$? Нет, неверно, так как *левая* часть определена при *любых* x, а *правая* часть определена *только при* $x\ge 0$.

Верно ли, что $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$? Да, это *верно!*

Заметим, что в общем случае $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\ne a$. Тождество $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ имеет место *только* для $a\ge 0$, а $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}\equiv a$ *для любого* $a\in R$.

Наиболее пытливые, но не очень внимательные учащиеся моментально запутываются: почему, например, $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, а $\sqrt[3]{a}\ne a^{\frac{1}{3}}$?

Обратим внимание на то, что, например, выражение $a^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{a^4}$ определено *только* для $a\ge 0$! И это, несмотря на то, что $\sqrt[5]{a^4}$ существует при любом a.

На самом деле

$$\sqrt[5]{a^4}=\sqrt[5]{|a|^4}=|a|^{\frac{4}{5}}!$$

Затем в школе для любого *положительного числа* a вводится понятие a^x, где x – *любое* действительное число $x\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим два очень *важных* примера, показывающих, насколько различны решения уравнений $a^x=a^y$, $x,y\in\mathbb{R}$ и $a^m=a^n$, $m,n\in\mathbb{N}$.

Разница связана с тем, что a^n, $n\in\mathbb{N}$ и a^x, $x\in\mathbb{R}$ – это, как говорят, две большие разницы:

$$n\in\mathbb{N}: a^n\equiv\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}_{n\ \text{множителей}},$$

но a^x, $x\in\mathbb{R}$ – сложное понятие.

Эти знания пригодятся при рассмотрении сложной экспоненты $y=a(x)^{f(x)}$.

Пример 3. Решите уравнение $a^x=a^y$, $x,y\in\mathbb{R}$ при всех значениях a.

► $$a^x=a^y \Leftrightarrow a^y\left(a^{x-y}-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{x-y}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, x, y\in\mathbb{R}; \\ \begin{cases} a>0, \\ x-y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $a=1$, x, $y\in\mathbb{R}$; $a>0$, $x=y$, x, $y\in\mathbb{R}$ ◄

Пример 4. Решите уравнение $a^m=a^n$, m, $n\in\mathbb{N}$ при всех значениях a.

► Можно решение оформить так:

$$a^m=a^n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, m, n\in\mathbb{N}; \\ a=1, m, n\in\mathbb{N}; \\ \begin{cases} a=-1, \\ m=2k-1, k\in\mathbb{N}, \\ n=2l-1, l\in\mathbb{N}; \end{cases} \\ \begin{cases} a\in\mathbb{R}, \\ m=n \end{cases} \end{array}\right.$$

А можно и так:

пусть, для определённости, $m>n$, тогда

$$a^m=a^n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a^{m-n}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, m, n\in\mathbb{N}; \\ a=1, m, n\in\mathbb{N}; \\ \begin{cases} a=-1, \\ m-n=2k, k\in\mathbb{N}, \end{cases} \\ \begin{cases} a\in\mathbb{R}, a\neq 0, \\ m=n. \end{cases} \end{array}\right. ◄$$

Далее принимается без доказательства, что для *любых положительных* чисел a и b и любых действительных чисел x и y справедливы свойства:

$$\begin{array}{ll} 1.\ a^x\cdot a^y=a^{x+y}, & \\ 2.\ \dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}, & \\ 3.\ \left(a^x\right)^y=a^{xy}, & (11) \\ 4.\ a^x\cdot b^x=(ab)^x, & \\ 5.\ \dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x. & \end{array}$$

Заметили, что все равенства записаны *не так*, как в некоторых учебниках? Они записаны в таком виде, что сразу ясно: они существуют только при $a>0$, $b>0$. При условиях $a>0$, $b>0$ они являются *тождествами* и могут называться *формулами*. Но … только для $a>0$, $b>0$! Но бывает, что, например, $\left(\frac{a}{b}\right)^x$ надо выразить через a^x, b^x, если это возможно, или как-то по-другому.

Заметим, что $\left(\frac{a}{b}\right)^x$ определено и тогда когда $\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow ab>0$.

Тогда,

а) если $a>0$, $b>0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$;

б) если же $a<0$, $b<0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\left(\frac{-a}{-b}\right)^x=\frac{(-a)^x}{(-b)^x}$.

Из а), б) следует, что, если $ab>0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{|a|^x}{|b|^x}$ (12)

Аналогично, если $ab>0$, то $(ab)^x=|a|^x\cdot|b|^x$.

Поэтому просто «формул» $a^xb^x=(ab)^x$, $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ в математике нет.

Например, $a^xb^x=(ab)^x$, но $(ab)^x=|a|^x\cdot|b|^x$! (13)

3. Формулы $a^{\log_a b}=b$ в математике нет! Уравнение $a^{\log_a f(x)}=g(x)$

В школе логарифмы проходят довольно быстро. Что там сложного? Знай формулы, и примеры будут решаться. Да, всё дело именно в формулах.

Начнём с определения, которое часто дают школьники:

«Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить число b».

Но ... $-8=(-2)^3$! Почему тогда не считать, что $3=log_{-2}(-8)$?

Рассмотрим функцию $y(x)=a^x$. Она определена при $a>0$, $x\in\mathbb{R}$.

При $a>0$, $a\neq1$ функция $y(x)=a^x$ является строго монотонной – рис. 3-4.

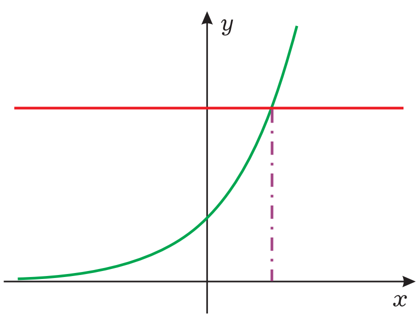

Рис. 3. $y=a^x$, $a>1$

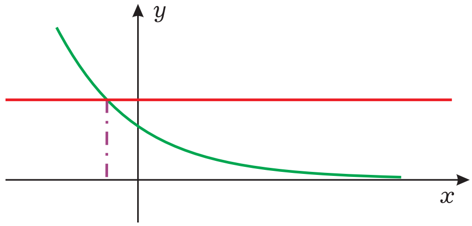

Рис. 4. $y=a^x$, $0<a<1$

Любая горизонтальная прямая $y=b$, $b>0$ пересекает график функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq1$ ровно один раз – рис. 3-4.

Отсюда следует, что, если $a>o, a\neq1$, то для любого положительного числа b существует единственное число x – такое, что $a^x=b$, то есть уравнение $a^x=b$ в этом случае имеет и притом единственное решение.

Это число x называется логарифмом числа b по основанию a и обозначается $x=\log_a b$.

Из определения *следует*, что в *этом* случае $a^{\log_a b}=b$. Это равенство принято называть *основным логарифмическим тождеством*. Но тождеством только для $b>0, a>0, a\neq1$. Условия $b>0, a>0, a\neq1$ – это ОДЗ для $\log_a b$!

Поэтому равенство $a^{\log_a b} = b$ является не формулой, *а формулой в ОДЗ*, то есть. при условии, что $b > 0, a > 0, a \neq 1$:

$$a^{\log_a b} \overset{ОДЗ}{=} b. \qquad (14)$$

Мы употребили слово «следует», но не в смысле *следствия*, а просто так «удобно» сказать.

На самом деле $a^{\log_a b} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$ – это и есть определение логарифма:

Теперь можно записать:

> Логарифмом положительного числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести положительное, не равное 1 число a, чтобы получить число b, или, что то же:
>
> $$b = a^{\log_a b}, \ a > 0, \ a \neq 1.$$

Заметим, однако, что в любом учебнике написано иначе – там нет слов, а просто есть «формула» $a^{\log_a b} = b$. Поэтому то, что формула имеет место при условии, что $a > o, a \neq 1, b > 0$, считается, с одной стороны, естественным, а с другой стороны, иногда просто игнорируется.

Итак, для любого $a > 0, a \neq 1$ и любого $x > 0$ можно определить функцию $y = \log_a x$. Доказывается, что при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ монотонно возрастает на положительной полуоси – рис. 5, а при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ монотонно убывает на положительной полуоси – рис. 6.

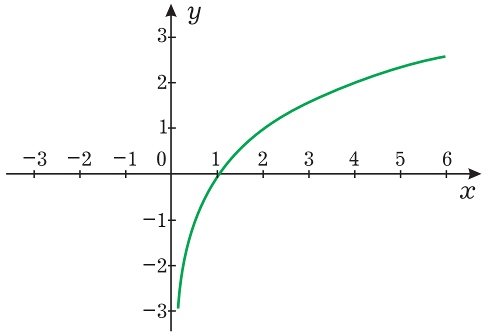

Рис. 5. $y = \log_2 x$

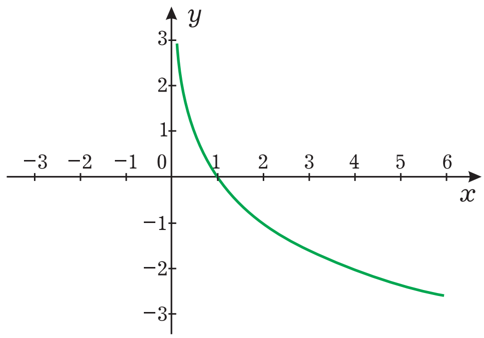

Рис. 6. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ симметричны относительно биссектрисы $y = x$ – рис. 7.

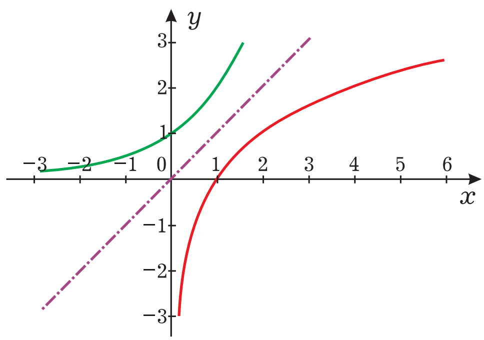

Рис. 7. $y = 2^x$ (зелёная линия) и $y = \log_2 x$ (красная линия)

Пусть a – любое допустимое основание ($a>0, a\neq 1$).

Тогда равенство $a^{\log_a f(x)}=f(x)$ является не формулой, а уравнением:

$$a^{\log_a f(x)}=f(x)\Leftrightarrow f(x)>0.$$

Пример 5. Решите уравнение $2^{\log_2\left(x^2-4\right)}=x^2-4$.

► $2^{\log_2\left(x^2-4\right)}=x^2-4\Leftrightarrow x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.◄

Рассмотрим уравнение

$$a^{\log_a f(x)}=g(x).$$

Учитывая основное логарифмическое тождество, запишем:

$$a^{\log_a f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)=g(x)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ \left[\begin{array}{l}f(x)>0,\\ g(x)>0\end{array}\right.\end{cases}\qquad(15)$$

Пример 6. Решите уравнение $4^{\log_4\left(x^3-6x-3\right)}=2x-3$.

► Как решают такое уравнение в обычных классах?

$4^{\log_4\left(x^3-6x-3\right)}=2x-3,$

ОДЗ: $x^3-6x-3>0,$

$x^3-6x-3=2x-3, x^3-8x=0, x=0,$ $x=\pm\sqrt{8}$.

Подставим корни в ОДЗ:

$x=0\Rightarrow -3>0\Rightarrow$ посторонний корень

$x=\sqrt{8}\Rightarrow\left(\sqrt{8}\right)^3-6\sqrt{8}-3=2\sqrt{8}-3>0$ – подходит,

$x=-\sqrt{8}\Rightarrow -\left(\sqrt{8}\right)^3+6\sqrt{8}-3=-2\sqrt{8}-3<0$ – посторонний корень.

Подставим корень $x=\sqrt{8}$ в уравнение: $4^{\log_4\left(8\sqrt{8}-6\sqrt{8}-3\right)}\equiv 2\sqrt{8}-3$

Ответ. $2\sqrt{2}$.

Примечание. Никто из учащихся не думает о том, чем является уравнение $x^3-6x-3=2x-3$ по отношению к заданному – решают по определённому учителем правилу. Думается, что при этом учитель даже может произнести при записи уравнения $x^3-6x-3=2x-3$ слово «следует», но он точно не имеет в виду «уравнение-следствие».◄

Пример 7. Решите уравнение $3^{\log_3\left(x^2-4x+3\right)}=2x-5$.

► *Первый способ* (с уравнением-следствием)

В одном из серьёзных учебников читаем: «используя формулу $a^{\log_a N}=N$. заменим $3^{\log_3\left(x^2-4x+3\right)}$ на x^2-4x+3 и получим следствие $x^2-4x+3=2x-5$ ...». Можно ли это делать?

Думается, что нет, так как x^2-4x+3 может принимать и положительные значения – $\log_3\left(x^2-4x+3\right)$ существует – и отрицательные значения $-\log_3\left(x^2-4x+3\right)$ не существует. Использовать формулу $a^{\log_a b}=b$ можно *только в ОДЗ.*

Кстати, уравнение

$$x^2-4x+3=2x-5$$

не является уравнением-следствием для уравнения $3^{\log_3\left(x^2-4x+3\right)}=2x-5,$ поскольку у них разные ОДЗ.

Поэтому предварительно *необходимо* написать

ОДЗ: $x^2-4x+3>0$.

Теперь можно записать (так как любое равносильное уравнение является и следствием):

$$3^{\log\left(x^2+4x+3\right)}=2x-5 \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} x^2-4x+3= =2x-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Так как использовалось «следствие», то корни надо подставить в само уравнение. Можно поступить и по-другому: сначала подставить в ОДЗ (отсеется $x=2$), а оставшийся корень в само уравнение. Получим, что $x=4$. **Ответ.** 4.

Второй способ (с равносильным уравнением)

Воспользуемся равносильной системой (15), включающей ОДЗ:

$$3^{\log_3\left(x^2-4x+3\right)}=2x-5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=2x-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=4, \end{array}\right. \\ 2x-5>0\left(\Rightarrow x^2-4x+3>0\right) \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ. 4. ◀

Пример 8. Решите уравнение $10^{\lg\left(x^2+2x-1\right)}=-x$.

► *Первый способ* (с уравнением – следствием)

ОДЗ: $x^2+2x-1>0$.

$$10^{\lg\left(x^2+2x-1\right)}=-x \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} x^2+2x-1=-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Будете проводить проверку корней?

Второй способ (с равносильной системой)

$$10^{\lg\left(x^2+2x-1\right)}=-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-1=-x, \\ -x>0\left(\Rightarrow x^2+2x-1>0\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ. $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

Разница видна? Какой смысл решать с уравнением – следствием, когда уравнение – следствие является *равносильным* в ОДЗ? ◀

4. «Формулы» $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$ в математике не существует! Уравнение $\log_a f(x)+\log_a g(x)=h(x)$.

Пусть $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $M>0$, $N>0$, α – любое действительное число.

Тогда верны, например, формулы:

1. $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$ и

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N. \quad (16)$$

2. $\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}$ и

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N. \quad (17)$$

Эти формулы *являются* тождествами *при выполнении* указанных выше *условий*.

Школьники не замечают, что ОДЗ левых и правых частей выписанных формул разные и «уверенно» пишут, что

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

и $\log_a M^2=2\log_a M$, не обращая внимания на области существования этих формул.

На самом деле,

$$\left[\begin{array}{l} M>0, N>0 \Rightarrow \log_a MN = \log_a M + \log_a N, \\ M<0, N<0 \Rightarrow \log_a MN = \log_a(-M)(-N) = \log_a(-M) + \log_a(-N). \end{array}\right.$$

Отсюда следует, что

$M>0, N>0 \Rightarrow \log_a M + \log_a N = \log_a MN$,

но ... $MN>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_a MN = \log_a|M| + \log_a|N| \qquad (18)$$

и *единой* формулы $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ *не существует*, так как ОДЗ левой и правой частей разные!

Мы уже поняли, что все формулы для логарифмов, как и для корней чётной степени, имеют ОДЗ.

Поэтому и логарифмические уравнения мы можем рассматривать только в ОДЗ!

А в ОДЗ практически все так называемые некоторыми авторами «следствия» являются на самом деле равносильными уравнениями, и их корни достаточно подставить только в неравенства ОДЗ. Не забудем, что любое равносильное уравнение (или система) является и следствием.

Для функций равенство $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a f(x)g(x)$ является уравнением, а не «формулой» – поэтому «в обратном порядке» она не работает.

$: \log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a f(x)g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases} \text{ но...} \qquad (19)$$

$$f(x)g(x)>0 \Rightarrow \log_a f(x)g(x) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|.$$

Например,

$$\log_5\left(1-\sqrt{x-3}\right) + \log_5\left(4-\sqrt{x-3}\right) = \log_5\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}-4\right) \Leftrightarrow$$

$$1-\sqrt{x-3}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}<1 \Leftrightarrow 3 \le x < 4,$$

но... $\log_5\left(1-\sqrt{x-3}\right)\left(4-\sqrt{x-3}\right) = \log_5\left(\sqrt{x-3}-1\right) + \log_5\left(\sqrt{x-3}-4\right) \Leftrightarrow$

$$\log_5\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}-4\right) = \log_5\left(\sqrt{x-3}-1\right) + \log_5\left(\sqrt{x-3}-4\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-3}>4, \\ \sqrt{x-3}<1, \end{array}\right. \\ \sqrt{x-3}-4>0 \Leftrightarrow x>19 \Rightarrow \sqrt{x-3}-1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x>19.$$

Рассмотрим уравнение $\log_a f(x) + \log_a g(x) = h(x),\ a>0,\ a \ne 1$.

Исходя из (19), сразу получим, что

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = h(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)g(x) = a^{h(x)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) = a^{h(x)}, \\ f(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) = a^{h(x)}, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Пример 9. Решите уравнение $\log_2\left(5-2^x\right) + \log_2\left(4-2^x\right) = x+2$.

► $\log_2\left(5-2^x\right) + \log_2\left(4-2^x\right) = x+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(5-2^x\right)\left(4-2^x\right) = 4\cdot 2^x, \\ 4-2^x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x<4, \\ 2^{2x} - 13\cdot 2^x + 20 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{13\pm\sqrt{89}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\log_2\frac{13-\sqrt{89}}{4}.$$

Ответ. $\log_2\frac{13-\sqrt{89}}{4}$.

Приятно было бы решать, если считать уравнение $\left(5-2^x\right)\left(4-2^x\right)=$ $=4\cdot 2^x$ только следствием, а потом отбирать корни? ◀

5. Формулы $\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$ в математике нет!

Есть свойство логарифма – переход логарифма к новому допустимому основанию:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}. \qquad (20)$$

Этот переход является *равносильным* при любых *допустимых* основаниях a, b в ОДЗ.

Если $b>0, b\neq 1, a>0, a\neq 1,$ то $\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$. И ...опять: ОДЗ правой и левой частей равенства разные. Правая часть равенства $\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$ существует при $b=1$, а левая – нет – поэтому это *не формула*.

Но $$\frac{1}{\log_b a}\overset{b\neq 1}{=}\log_a b. \qquad (21)$$

Пример 10. Решите уравнение $\frac{1}{\log^2{}_x 2}-2\log_2 x=0$.

► Запишем равносильную систему, включающую ОДЗ:

$$\frac{1}{\log^2{}_x 2}-2\log_2 x=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\neq 1, \\ \log^2{}_2 x-2\log_2 x=0\Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=0\Rightarrow\varnothing, \\ \log_2 x=2\Leftrightarrow x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4.$$

Ответ. 4. ◀

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Счастливая невезучесть

Большому ценителю юмора английскому писателю Бернарду Шоу было уже 70 лет, когда его сбил с ног юный велосипедист. С трудом поднявшись, Шоу сказал:

– Вам здорово не повезло, молодой человек. Будь вы чуточку энергичнее, я бы так легко не отделался. И вы бы вошли в историю... как мой убийца.

Борьба с дурной привычкой

Мальчик кричит отцу:

– Пап! Я только что видел огромную машину. Как дом!

– Зачем ты преувеличиваешь? Я тебе миллион раз говорил, что эта привычка когда-нибудь тебя подведёт!