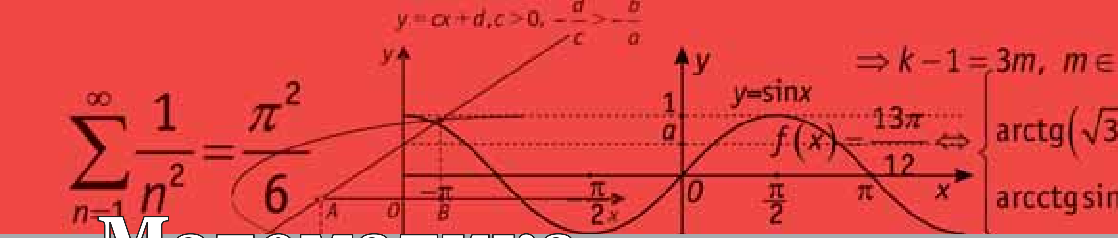

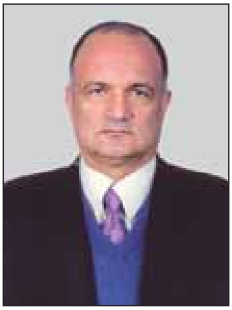

Аллаберен Аширалиев
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Университета Фатих (Стамбул, Турция) и Международного туркмено-турецкого университета (Ашхабад, Туркменистан). Автор 2 монографий и более 60 публикаций в международных журналах.

Суммы и их вычисление

В статье рассматриваются различные доказательства формулы суммы n первых натуральных чисел, в том числе и самое первое доказательство Гаусса. На примере решения задач читатель убедится в полезности используемых при доказательствах приёмов.

Вывод формулы для суммы *n* первых натуральных чисел

Формулу для суммы n первых натуральных чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

доказал в своё время великий Гаусс в очень раннем возрасте. Приведём здесь его доказательство.

Доказательство 1 (метод Гаусса). Пусть S_n – сумма n первых натуральных чисел:

$$S_n = 1+2+3+\ldots+n.$$

Представим теперь S_n разными способами:

$$S_n = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n,$$

$$S_n = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1.$$

Складывая эти две формулы и используя равенство $k+n-k+1=n+1$, $k=1,\ldots,n$, мы получим:

$$2S_n = n(n+1),$$

откуда и следует формула (1).

Эту формулу можно доказать, используя метод математической индукции. Напомним, в чём он состоит. Утверждение справедливо для всякого натурального n, если оно справедливо для $n=1$ и из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n=m$ следует его справедливость для $n=m+1$.

Доказательство 2 (метод математической индукции). Легко видеть, что для $n=1$ формула (1) справедлива: $S_1=1=\frac{1(1+1)}{2}$. Пусть теперь формула (1) справедлива для некоторого $n=m$. Тогда

$$S_{m+1}=S_m+m+1=$$
$$=\frac{m(m+1)}{2}+m+1=\frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Таким образом, (1) выполняется и для $n=m+1$. Значит, (1) верно для всех натуральных n.

Далее мы рассмотрим два геометрических метода доказательства формулы (1).

Доказательство 3 (геометрические методы).

а) Пусть у нас есть квадрат со стороной, равной n. Поделим этот квадрат на $n\cdot n=n^2$ маленьких квадратиков со сторонами, равными 1 и параллельными сторонам большого квадрата (рис. 1).

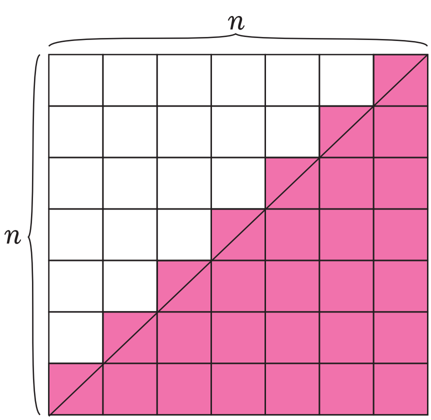

Рис. 1

Посчитаем теперь число закрашенных квадратиков (а значит, и сумму их площадей, ведь площадь каждого равна 1), начиная с левого нижнего угла: $1+2+3+...+n$. Заметим, что это и есть S_n – сумма n первых натуральных чисел. С другой стороны, площадь закрашенной фигуры равна сумме площадей большого прямоугольного треугольника с катетами n и n маленьких прямоугольных треугольников с катетами 1: $\frac{1}{2}n^2+n\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$. Приравнивая площади, получаем:

$$S_n=1+2+3+...+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

б) Как и в предыдущем методе, возьмём квадрат со стороной n и поделим его на n^2 маленьких квадратиков. Но на этот раз посчитаем сумму площадей закрашенной и незакрашенной частей и приравняем её n^2 – площади всего квадрата. Как мы уже показали, площадь закрашенной части есть S_n. Легко видеть, что площадь незакрашенной части есть $S_{n-1}=S_n-n$. Получаем уравнение:

$$S_n+S_n-n=n^2,$$

откуда легко следует формула (1).

Доказательство 4 (метод подстановки). Запишем S_n как $S_n=\sum_{k=1}^{n}k$. Полагая $k=n+1-m$, получим:

$$S_n=\sum_{m=1}^{n}(n+1-m)=$$
$$=(n+1)\sum_{m=1}^{n}1-\sum_{m=1}^{n}m=n(n+1)-S_n.$$

Отсюда легко получаем формулу (1).

Доказательство 5 (метод частичного суммирования). Используя формулу $k=\sum_{m=1}^{k}1$, получаем: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}1$ (суммирование вначале ведётся по m, а затем по k). Поменяем порядок суммирования. Напомним, что менять порядок суммирования не задумываясь можно тогда, когда пределы суммирования в обеих суммах (внутренней и внешней) постоянны, т. е. не зависят от индексов суммирования. В нашем случае внутренняя сумма имеет переменные пределы. Чтобы поменять порядок суммирования, надо поменять индексы ролями, т. е. сделать пределы изменения индекса m постоянными, а индекса i – переменными. Запишем пределы изменения индексов суммирования в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 1 \le k \le n, \\ 1 \le m \le k. \end{cases}$$

Заменим эту систему следующей эквивалентной:

$$\begin{cases} 1 \le m \le n, \\ m \le k \le n. \end{cases}$$

Расставим теперь пределы суммирования по-другому и посчитаем сумму, учитывая, что $\sum\limits_{k=m}^{n} 1 = n+1-m$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} 1 = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=m}^{n} 1 = \sum_{m=1}^{n}(n+1-m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} n + \sum_{m=1}^{n} 1 - \sum_{m=1}^{n} m =$$

$$= n\cdot n + n - mn = n(n+1) - S_n,$$

откуда и следует формула (1).

Доказательство 6 (разностные методы).

а) Используя формулу $(k+1)-$ $-k=1,$ получаем:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1-k)k = \sum_{k=1}^{n}(k+1)k - \sum_{k=1}^{n}k^2 =$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1}k(k-1) - \sum_{k=1}^{n}k^2.$$

Таким образом,

$$S_n = (n+1)^2 - 1 - S_n - (n+1) + 1, \text{ или}$$

$$2S_n = n^2 + 2n - n,$$

из чего сразу вытекает формула (1).

б) Используя формулу $k-$ $-(k-1)=1,$ получаем:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k-(k-1))k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k-1)k = \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n-1}k(k+1).$$

Таким образом,

$$S_n = n^2 - S_n + n,$$

отсюда легко получить формулу (1).

в) Используя формулу $(k+1)-$ $-(k-1)=1,$ получаем:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-(k-1)}{2}k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1)k - \sum_{k=1}^{n}(k-1)k =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)k\right).$$

Таким образом,

$$S_n = \frac{1}{2}((n+1)^2 + n^2 - 1 - 2S_n - (n+1) + n + 1),$$

или

$$2S_n = n^2 + n.$$

Доказательство 7 (методы понижения степени). Приведём здесь три варианта доказательства, по-разному использующие методы понижения степени.

а) Используя формулу

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1,$$

получаем:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}k^2 = 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1,$$

откуда следует, что

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_n + n,$$

отсюда получаем формулу (1).

б) Используя формулу

$$k^2-(k-1)^2=2k-1,$$

получаем:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1.$$

Отсюда следует

$$n^2=2S_n-n.$$

в) Применяя формулу

$$(k+1)^2-(k-1)^2=4k,$$

получаем:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=2\sum_{k=1}^{n}k.$$

Отсюда следует, что

$$(n+1)^2+n^2-1=4S_n.$$

Доказательство 8 (метод математического анализа). Для любого $x\neq 1$ имеем:

$$1+x+x^2+...+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Используя эту формулу, получаем:

$$x+2x^2+...+nx^n=$$

$$=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}. \qquad (2)$$

Приведём здесь вывод последнего тождества. Пусть

$$S'_n=1+x+x^2+...+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

а $S''_n=x+2x^2+...+nx^n$. Разделим последнюю сумму на x и вычтем её же:

$$\frac{S''_n}{x}-S''_n=1+x+x^2+...+x^{n-1}-$$

$$-nx^n=S'_n-x^n-nx^n.$$

Подставляя выражение для S'_n, получим:

$$S''_n\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}-x^n-nx^n=$$

$$=\frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{1-x}.$$

Отсюда

$$S''_n=\frac{x-x^{n+1}-nx^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2},$$

что и даёт нам тождество (2).

Тогда

$$1+2+...+n=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}.$$

Этот предел можно вычислить по правилу Лопиталя (заменив числитель и знаменатель на их производные):

$$\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1}{2(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{n(n+2)(n+1)x^n-(n+1)^2nx^{n-1}}{2}=$$

$$=\frac{n(n+2)(n+1)-(n+1)^2n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Мы получили формулу (1).

Некоторые задачи на вычисление сумм

1. Докажите тождество:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ\cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ\cos 2^\circ}+...+$$

$$+\frac{1}{\cos 88^\circ\cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}.$$

Решение. Умножая обе части

тождества на $\sin 1^\circ$, получаем:

$$\frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\ldots+$$

$$+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}.$$

Это можно переписать в виде

$$\frac{\sin(1^\circ-0^\circ)}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{\sin(2^\circ-1^\circ)}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\ldots+$$

$$+\frac{\sin(89^\circ-88^\circ)}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\mathrm{ctg}\,1^\circ.$$

Из очевидного выражения для разности тангенсов

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta$$

следует, что левая часть доказываемого тождества равняется

$$\sum_{k=1}^{89}(\mathrm{tg}\,k^\circ-\mathrm{tg}(k-1)^\circ)=$$

$$=\mathrm{tg}\,89^\circ-\mathrm{tg}\,0^\circ=\mathrm{ctg}\,1^\circ.$$

2. Докажите, что для всех целых положительных n

$$n-1<\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\ldots+$$

$$+\frac{2n-1}{\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}<n.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{2k-1}{\sqrt{(k-1)^2+1}+\sqrt{k^2+1}}=$$

$$=\frac{(2k-1)\left(-\sqrt{(k-1)^2+1}+\sqrt{k^2+1}\right)}{-(k-1)^2-1+k^2+1}=$$

$$=-\sqrt{(k-1)^2+1}+\sqrt{k^2+1}.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\ldots+$$

$$+\frac{2n-1}{\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\ldots-$$

$$-\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}=\sqrt{n^2+1}-1.$$

Исходное двойное неравенство можно теперь получить из очевидного неравенства

$$n-1<\sqrt{n^2+1}-1<n.$$

3. Задана последовательность x_n, у которой $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{k+1}=x_k^2+x_k$. Найдите наибольшее целое число, меньшее выражения

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{2010}+1}.$$

Решение. Используя рекуррентное соотношение из условия, получаем:

$$\frac{1}{x_{k+1}}=\frac{1}{x_k(x_k+1)}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{2010}\frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{2011}}.$$

Так как $x_1=\frac{1}{2}$, а $0<\frac{1}{x_{2011}}<1$, то вся сумма меньше 2, но больше 1. Значит, наибольшим целым числом является 1.

4. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$$

Решение. Для подсчёта суммы не хватает слагаемых вида $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}$ и т. д. Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}<$$

$$< \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}.$$

Поэтому исходное неравенство будет вытекать из неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}} > 48.$$

Докажем его. Преобразуем левую часть – избавимся от иррациональности в знаменателях:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{10001}-\sqrt{9999}}{2} = \frac{\sqrt{10001}-\sqrt{1}}{2}.$$

Показать, что полученное выражение больше 48, уже не составляет труда.

Новости Новости Новости Новости Новости

Коллайдер NICA

В подмосковном наукограде Дубна, где находится Объединённый институт ядерных исследований (ОИЯИ), реализуется масштабный международный проект создания к 2015 г. уникального коллайдера NICA. В этом проекте участвуют 40 ведущих ядерных центров из 16 стран мира. Название NICA представляет собой аббревиатуру английских слов Nuclotron based Ion Collider fAcility. Оно, показывая, что коллайдер создаётся на основе нуклотрона – действующего в ОИЯИ ускорителя, созвучно с именем богини победы и служит символом надежд учёных на открытия в области микромира.

В настоящее время ведутся разработки по всем направлениям и объектам, обепечивающим изучение на этом коллайдере перехода при экстремальных условиях ядерной материи в кваркглюонную. Ожидается, что такой переход представляет собой нечто подобное переходу «жидкость–пар» и что в силу этого будет образовываться смешанная фаза, состоящая из ядерной и из кваркглюонной материи. На новой установке учёные рассчитывают исследовать свойства именно этого перехода (если он действительно будет происходить) и смешанной фазы. С этой целью будут созданы встречные пучки тяжёлых ионов, которые к моменту столкновения приобретут энергию порядка 5 ГэВ/нуклон. Результаты этих исследований дополнят те, что даст Большой андронный коллайдер (БАК) в эксперименте ALICE со столкновениями ионов свинца при более высоких энергиях.

Проблемой исследования фундаментальных свойств материи при относительно малых энергиях столкновения частиц (энергиях, «пропущенных» в прежние годы из-за стремления физиков строить всё более мощные ускорители) заинтересовались теперь и в других ядерных центрах. Подобные NICA установки намерены строить, например, Брукхевенская национальная лаборатория США и Дармштадтский центр Германии.