Сгибнев Алексей Иванович
Кандидат физико-математических наук, учитель математики школы-интерната «Интеллектуал», г. Москва.

Суммы степеней натуральных чисел

Все знают, как найти сумму натуральных чисел от 1 до n. Многим известны формулы для суммы квадратов или кубов натуральных чисел от 1 до n. Оказывается, есть способ, с помощью которого можно вывести формулы для суммы любых степеней натуральных чисел! В статье приведён этот способ и изучены свойства таких сумм.

Уже древние греки знали, что для любого натурального n верны формулы:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \ \ldots \ + n = n(n+1)/2,$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ \ldots \ + \ n^2 =$$

$$= n(n+1)(2n+1)/6,$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ \ldots \ + n^3 =$$

$$= (n(n+1)/2)^2 = (S_1)^2.$$

Для суммы квадратов формула самая сложная – её получил Архимед в III веке до нашей эры. Доказывали их с помощью арифметических рассуждений, записи в виде таблиц или геометрического сложения фигур. Например, картинка на рисунке 1 объясняет, почему

$$S_1(10) = 10 \times 11/2.$$

(Подробнее см. [1, с. 155 – 162], [2, с. 4 – 7].)

Естественно было определить следующую сумму:

$$S_4(n) = 1^4 + 2^4 + \ \ldots + n^4.$$

Однако она поддалась только тысячу лет спустя. Около 1000-го года её доказал живший в Египте ал-Кальсали (ал-Хайсам), а затем ал-Каши (XV век, Самарканд).

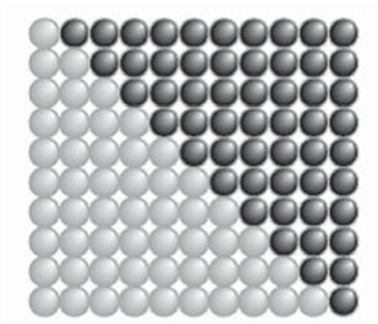

Рис. 1

Сложность состояла в том, что греки представляли себе степени наглядно: вторую степень a как площадь квадрата со стороной a, третью степень a – как объём куба с ребром a. Следы этих представлений остались в наших названиях «квадрат числа», «куб числа». Четвёртую степень они могли записать через пропорцию, что технически сложнее, но в четвёртое измерение не выходили. Понадобилось «обнулить» достижения греческой математики, и на новых путях алгебры появились новые достижения.

Посмотрим на наши формулы повнимательнее. Приведём многочлены к стандартному виду и добавим к ним очевидную сумму $S_0 = 1 + 1 + \ldots + 1$ (n слагаемых). Получим:

$$S_0(n) = n,$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Упражнение 1. Все четыре суммы являются многочленами от n. Какова в них степень многочлена для S_k? Чему равен старший коэффициент? Следующий за ним? Чему равен свободный член? Чему равна сумма коэффициентов?

Ответ. Мы видим, что в приведённых примерах S_k имеет степень $k + 1$. Старший коэффициент равен $1/(k + 1)$, следующий за ним $1/2$ (кроме S_0), а свободный член равен нулю. Сумма всех коэффициентов равна 1.

Теперь мы воспользуемся достижениями алгебры и выведем формулу для S_4.

Запишем:

$$x^5 - (x-1)^5 =$$

$$= 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1.$$

(Кто не знаком с биномом Ньютона, может проверить равенство, честно раскрыв скобки.)

Запишем это равенство для значений $x = 1, 2, 3, \ldots, n - 1, n$:

$$1^5 - 0^5 = 5 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1,$$

$$2^5 - 1^5 = 5 \cdot 2^4 - 10 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1,$$

$$3^5 - 2^5 = 5 \cdot 3^4 - 10 \cdot 3^3 + 10 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 1,$$

$$\ldots$$

$$(n-1)^5 - (n-2)^5 =$$

$$= 5 \cdot (n-1)^4 - 10 \cdot (n-1)^3 + 10 \cdot (n-1)^2 -$$

$$-5 \cdot (n-1) + 1,$$

$$n^5 - (n-1)^5 =$$

$$= 5 \cdot n^4 - 10 \cdot n^3 + 10 \cdot n^2 - 5 \cdot n + 1.$$

Теперь сложим все эти равенства. Слева почти все слагаемые взаимно сократятся, и мы получим n^5. Справа, складывая почленно одинаковые степени, мы получим суммы разных степеней чисел от 1 до n:

$$n^5 - 0 = 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \ldots + n^4) -$$

$$- 10 \cdot (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) +$$

$$+ 10 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) -$$

$$- 5 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) + (1 + 1 + \ldots + 1),$$

то есть

$$n^5 = 5 \cdot S_4 - 10 \cdot S_3 + 10 \cdot S_2 - 5 \cdot S_1 + S_0.$$

Теперь заметим, что в этом равенстве мы знаем все величины, кроме S_4! Выразив её, получим:

$$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + 2S_3 - 2S_2 + S_1 - \frac{1}{5}S_0.$$

Отсюда уже видно, что старший член в S_4 равен $n^5/5$, что мы и ожидали из рассмотрения предыдущих примеров.

Раскрыв значения для S_0, S_1, S_2, S_3, получим:

$$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n.$$

Упражнение 2. Запишите равенство

$$x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$$

для $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, просуммируйте почленно и выведите S_2 через S_1 и S_0.

На самом деле этим способом можно выразить любую сумму S_{k+1} через все предыдущие S_k, S_{k-1}, …, S_1.

Упражнение 3. Выразите S_5, записав тождество для $x^6 - (x-1)^6$.

Ответ.

$$S_5 = \frac{1}{12}\left(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2\right).$$

Упражнение 4. Докажите, что S_k – многочлен от n степени $k + 1$.

Указание. Докажите, что S_k равна сумме S_{k-1}, S_{k-2}, …, S_0 и n^{k+1}

с числовыми коэффициентами. Далее воспользуйтесь математической индукцией.

Основным фактом в задаче о сумме степеней является именно этот: $S_k(n)$ *оказывается многочленом* (а не квадратным корнем, алгебраической дробью или чем-то ещё). Зная этот факт, получить выражения для сумм можно уже разными способами. (Например, можно вычислять несколько первых значений суммы S_k, подбирать коэффициенты многочлена степени $k + 1$ и доказывать полученную формулу по индукции.)

Теперь докажем подмеченные ранее свойства многочленов $S_k(n)$.

Упражнение 5. Докажите, что для всех многочленов S_k свободный член равен нулю, а сумма всех коэффициентов равна 1.

Указание. Подставьте в определение и выражение для S_k значения $n = 0$ и $n = 1$.

Упражнение 6. (*Для тех, кто знаком с биномом Ньютона*) Докажите, что в многочлене S_k старший член имеет вид $n^{k+1}/(k+1)$, а следующий за ним (для $k > 0$) имеет вид $n^k/2$.

Упражнение 7. (*Для тех, кто знаком с биномом Ньютона*) Выразите S_k для произвольного k через n^{k+1}, S_{k-1}, S_{k-2}, …, S_0 и биномиальные коэффициенты.

Фаулхабер в XVII веке уже приводит верные формулы для сумм S_5, S_6, …, S_{12} как многочленов от n.

Коэффициенты в $S_k(n)$, стоящие при n, называются *числами Бернулли*. Мы теперь знаем, что первые шесть чисел Бернулли равны 1, 1/2, 1/6, 0, – 1/30, 0. Они играют важную роль в теории чисел, подробнее см. [4].

Задачи для дальнейшего изучения темы

1. *Найдём S_4 ещё одним способом.* На рис. 2 изображена таблица умножения чисел 1, 2, 3, ..., n на числа 1^2, 2^2, ..., n^2.

	1^2	2^2	3^2		k^2		n^2
1	1	4	9		$1\cdot k^2$		$1\cdot n^2$
2	2	8	18		$2\cdot k^2$		$2\cdot n^2$
3	3	12	27		$3\cdot k^2$		$3\cdot n^2$
k	$k\cdot 1^2$	$k\cdot 2^2$	$k\cdot 3^2$		$k\cdot k^2$		$k\cdot n^2$
n	$n\cdot 1^2$	$n\cdot 2^2$	$n\cdot 3^2$		$n\cdot k^2$		$n\cdot n^2$

Рис. 2

А) Найдите сумму всех чисел в этой таблице.

Б) Найдите сумму всех чисел, стоящих в выделенном уголке (представьте в виде многочлена от k).

В) Выведите отсюда формулу для суммы $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.

2. Найдите формулы для *знакопеременных сумм*:

А) $S_1'(2n) = -1 + 2 - 3 + 4 - \ldots + 2n$,

Б) $S_2'(2n) = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (2n)^2$,

В) $S_3'(2n) = -1^3 + 2^3 - \ldots + (2n)^3$,

Г) $S_4'(2n) = -1^4 + 2^4 - \ldots + (2n)^4$.

Указание. S_1' и S_2' легко найти, разбивая слагаемые на пары. Покажем общий способ найти S_k' через S_k:

$$S_k'(2n) = -1^k + 2^k - \ldots + (2n)^k =$$

$$= -\left(1^k + 2^k + \ldots + (2n)^k\right) +$$

$$+ 2\left(2^k + 4^k + \ldots + (2n)^k\right) =$$

$$= -\left(1^k + 2^k + \ldots + (2n)^k\right) +$$

$$+2\cdot 2^k\left(1^k+2^k+\ldots+\ n^k\right)=$$

$$=-\ S_k\,(2n)+2^{k+1}S_k\,(n).$$

3. Докажите, что $S_k'(2n)$ – многочлен от n степени k.

4. Будем подставлять в формулы для $S_k(n)$ любые *целые* значения n (а не только натуральные).

А) Найдите $S_k\,(-1)$, $S_k\,(-2)$. Что вы наблюдаете?

Б) Докажите, что для $k\geq 1$ верно равенство

$$S_k(-n-1)=(-1)^{k-1}\,S_k(n),$$

т. е. значения многочленов симметричны (или антисимметричны) относительно $n=-1/2$.

Указание. Для натуральных a и b $(a>b)$ из определения сумм следует равенство

$$S_k(a)-S_k(b)=a^k+(a-1)^k+\ldots+(b+1)^k.$$

Из конечности числа корней многочлена следует, что оно верно и для целых a и b ($a>b$). Подставьте в равенство

$$a=0,\ b=-\ m-1<0.$$

В) Докажите теорему Фаулхабера: S_k является многочленом от $S_1=n(n+1)/2$ при нечётном k и имеет вид $(2n+1)\cdot P$, где P – многочлен от переменной $S_1=n(n+1)/2$ при чётном k.

Указание. Используйте результат п. Б) и такой факт: если для многочлена f верно

$$f(-n)=f(n)$$

для всех целых n, то $f(n)=g(n^2)$, где g – тоже многочлен; если для многочлена f верно

$$f(-n)=-\ f(n)$$

для всех целых n, то

$$f(n)=nh(n^2),$$

где h – тоже многочлен.

5. Особый интерес представляют случаи, в которых суммы степеней выражаются друг через друга без других величин. Проверьте равенства (см. подробности в упражнениях 1 – 4 статьи [3]):

$$S_3=(S_1)^2,$$

$$3S_3+S_5=4(S_1)^3,$$

$$S_5+S_7=2(S_1)^4.$$

Автор благодарен Г.А. Мерзону за обсуждение заметки.

Литература

1. *Депман И.Я.* История арифметики. – М.: УРСС, 2007.

2. *Артамкин И.В., Городенцев А.В. и др.* Числа и суммы. // Математическое образование, № 2 – 3 (9 – 10), апрель-сентябрь 1999, сс. 2 – 57.

3. *Абрамович В.* Суммы одинаковых степеней натуральных чисел. // Квант, № 5, 1973, сс. 22 – 25.
www.kvant.mccme.ru/1973/05/summy_ odinakovyh_stepenej_natu.htm

4. *Абрамович В.* Числа Бернулли. // Квант, № 5, 1974, сс. 10 – 14.
www.kvant.mccme.ru/1974/06/chisla_bernulli.htm