


Виноградов Олег Павлович

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории вероятностей Московского
государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Степени корней квадратного уравнения и числа Фибоначчи

В многочисленных пособиях для школьников предлагается следующая задача: пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения. Для некоторого натурального числа n найти значение выражения $x_1^n + x_2^n$. Решение этой задачи основано на теореме Виета и на том, что это выражение симметрично относительно x_1, x_2 и, значит, выражается через элементарные симметрические многочлены $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$ (см., например, [1], [2]).

На вступительных экзаменах в СУНЦ МГУ в 2014 году автором была предложена следующая

Задача 1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 - x - 3 = 0$. Известно, что $x_1^5 + 19x_2$ является целым числом. Найдите это число.

Так как выражение $x_1^5 + 19x_2$ не симметрично относительно x_1, x_2 , то вышеупомянутый способ решения этой задачи в данном случае неприемлем. Обратим внимание также на то, что в условии задачи не сказано, является ли x_1 меньшим или большим корнем этого уравнения. Заметим, что корни этого уравнения равны $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Поэтому, напри-

мер, считая, что x_1 – меньший корень, то

$$x_1^5 + 19x_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^5 + \frac{19(1 + \sqrt{13})}{2}.$$

Используя бином Ньютона, из этого выражения можно получить ответ задачи. Но такой способ решения приводит к достаточно трудоемким выкладкам.

Приведем авторское решение задачи 1.

Решение. Из уравнения вытекает, что $x_1^2 = x_1 + 3$. И, значит,

$$\begin{aligned} x_1^5 &= x_1 x_1^4 = x_1 (x_1 + 3)^2 = x_1^3 + 6x_1^2 + 9x_1 = \\ &= x_1 (x_1 + 3) + 6(x_1 + 3) + 9x_1 = \\ &= x_1^2 + 18x_1 + 18 = x_1 + 3 + 18x_1 + 18 = \\ &= 19x_1 + 21. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } x_1^5 + 19x_2 &= 19x_1 + 21 + 19x_2 = \\ &= 19(x_1 + x_2) + 21 = 40. \end{aligned}$$

Ответ: 40.

В этом решении используется теорема Виета и способ понижения степени для x_1^5 , который использует само квадратное уравнение. Заметим также, что x_1 и x_2 в последнюю сумму входят симметрично, поэтому наш результат не зависит от того x_1 – меньший или больший корень.

Замечание 1. В дальнейшем мы будем использовать следующий простой факт. Пусть x_1, x_2 – корни приведенного квадратного уравнения с целыми коэффициентами и пусть эти корни иррациональны. Если A, B – целые числа, то $Ax_1 + Bx_2$ будет целым числом тогда и только тогда, когда $A = B$. Это утверждение легко следует из формулы для корней квадратного уравнения.

Аналогично рассуждая, нетрудно решить более сложную задачу.

Задача 2. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 - x - 3 = 0$.

Найти такое целое число a , чтобы $N = x_1^7 + ax_2$ было тоже целым числом.

Решение. Так как $x_1^2 = x_1 + 3$, то

$$\begin{aligned} x_1^4 &= (x_1 + 3)^2 = x_1^2 + 6x_1 + 9 = \\ &= x_1 + 3 + 6x_1 + 9 = 7x_1 + 12. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x_1^6 &= x_1^4 x_1^2 = (7x_1 + 12)(x_1 + 3) = \\ &= 7x_1^2 + 33x_1 + 36 = 7(x_1 + 3) + 33x_1 + 36 = \\ &= 40x_1 + 57. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^7 &= x_1^6 x_1 = 40x_1^2 + 57x_1 = \\ &= 40(x_1 + 3) + 57x_1 = 97x_1 + 120. \end{aligned}$$

И, значит,

$$N = x_1^7 + ax_2 = 97x_1 + ax_2 + 120.$$

N будет целым числом, когда $97x_1 + ax_2$ – целое число. В силу замечания 1 число $97x_1 + ax_2$ будет целым числом тогда и только тогда, когда $a = 97$.

Ответ: $a = 97, N = 217$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$. Везде в дальнейшем коэффициенты p, q – целые числа. Так как $x_1^2 = px_1 + q$, то

$$\begin{aligned} x_1^3 &= (px_1 + q)x_1 = \\ &= px_1^2 + qx_1 = p(px_1 + q) + qx_1 = \\ &= (p^2 + q)x_1 + pq. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$x_1^4 = x_1^3 x_1 = p(p^2 + 2q)x_1 + q(p^2 + q).$$

Используя предыдущее равенство, получаем

$$\begin{aligned} x_1^5 &= x_1^4 x_1 = \left[p^2(p^2 + 2q) + q(p^2 + q) \right] x_1 + \\ &+ pq(p^2 + 2q). \end{aligned}$$

По индукции получаем, что для любого натурального $n (n \geq 2)$ имеет место равенство

$$x_1^n = a_n x_1 + b_n, \quad (1)$$

где a_n, b_n – многочлены от двух переменных p, q . Из предыдущих равенств вытекает, что $a_2 = p, b_2 = q$ и $a_3 = p^2 + q, b_3 = pq$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} x_1^n &= (a_{n-1}x_1 + b_{n-1})x_1 = a_{n-1}x_1^2 + b_{n-1}x_1 = \\ &= a_{n-1}(px_1 + q) + b_{n-1}x_1 = \\ &= (pa_{n-1} + b_{n-1})x_1 + qa_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Поэтому из (1) и (2) вытекает, что $a_n = pa_{n-1} + b_{n-1}, b_n = qa_{n-1}$. Из этих

равенств следует, что последовательность $\{a_n\}$ для $n \geq 4$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ (3)

с начальными условиями $a_2 = p$, $a_3 = p^2 + q$. Учитывая, что $b_{n-1} = qa_{n-2}$ равенство (2) запишем в виде

$$x_1^n = (pa_{n-1} + qa_{n-2})x_1 + qa_{n-1}. \quad (4)$$

Замечание 2. Для конкретных значений p, q и небольших значений n величина a_n может быть вычислена без особого труда.

Рассмотрим задачу аналогичную задаче 2.

Задача 3. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$. Для каких целых чисел A, B число $N = Ax_1^n + Bx_2^m$ будет тоже целым числом, где n и m – некоторые заданные натуральные числа.

Используя равенство (4), получаем

$$N = Ax_1^n + Bx_2^m = A(pa_{n-1} + qa_{n-2})x_1 + B(pa_{m-1} + qa_{m-2})x_2 + Aqa_{n-1} + Bqa_{m-1}$$

В силу замечания 1 N будет целым числом тогда и только тогда, когда

$$A(pa_{n-1} + qa_{n-2}) = B(pa_{m-1} + qa_{m-2}),$$

так как $Aqa_{n-1} + Bqa_{m-1}$ – целое число.

Особый интерес представляет случай, когда $p = q = 1$. Тогда квадратное уравнение примет вид $x^2 - x - 1 = 0$ и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, при-

чем $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. В этом случае последовательность $\{a_n\}$ совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи $\{F_n\}$, так как эти две последовательности удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению. Пользуясь стандартным обозначением для чисел Фибоначчи, положим $a_n = F_n$. Пусть x_1 – больший корень этого уравнения. Тогда $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Число $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ встречается в «Началах» Евклида (около 300 лет до н. э.) (золотое сечение) и обычно обозначается через ϕ .

Таким образом $x_1 = \phi$. Поэтому из (4) получаем, что

$$x_1^n = \phi^n = (F_{n-2} + F_{n-1})\phi + F_{n-1} = F_n\phi + F_{n-1}. \quad (5)$$

Из теоремы Виета вытекает, что

$$x_2 = -\frac{1}{\phi} = 1 - \phi,$$

$$x_2^n = \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n = -\frac{F_n}{\phi} + F_{n-1}. \quad (6)$$

$$\text{Заметим, что } \phi + \frac{1}{\phi} = \sqrt{5}. \quad (7)$$

Вычитая из равенства (5) равенство (6), и учитывая равенство (7), получаем

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}. \quad (8)$$

Равенство (8) доказано французским математиком Ж. Бине (1786-1856) и носит название теоремы Бине.

Литература

1. С.Б. Гашков. Квадратный трехчлен в задачах. – М.: МЦНМО, 2015.
2. В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин. Симметрия в алгебре. – М.: Наука, 1967.

Проверь себя

(Ответы и решения к задачам, опубликованным в журнале №4 стр.19)

1. Ответ: $\pm(3; 1), \pm(\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.

$$\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ xy + y^2 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 - xy) = 12, \\ 3(xy + y^2) = 12, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0, \\ xy + y^2 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

($y=0$ не удовлетворяет системе)

$$\begin{cases} 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0, \\ xy + y^2 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3y, \\ y = \pm 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2x \\ x = \pm\sqrt{2}, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \pm(3; 1), \\ \pm(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}). \end{bmatrix}$$

2. Ответ: $-\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^3 15^\circ + \cos^3 15^\circ}{\sin^3 15^\circ - \cos^3 15^\circ} = \\ &= \frac{(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)(1 - \sin 15^\circ \cdot \cos^3 15^\circ)}{(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)(1 + \sin 15^\circ \cdot \cos^3 15^\circ)} = \\ &= \frac{\sin 15^\circ + \sin 75^\circ}{\sin 15^\circ - \sin 75^\circ} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \sin 30^\circ}{1 + \frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ}{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} \cdot \frac{3/4}{5/4} = -\frac{3\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

3. Ответ: $(-2\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\begin{aligned} x^3 - 6x + 4\sqrt{2} > 0 &\Leftrightarrow (x = t\sqrt{2}) \\ t^3 - 3t + 2 > 0. \end{aligned}$$

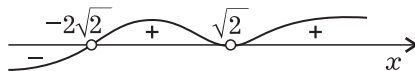
Многочлен $y = t^3 - 3t + 2 = 0$ имеет целый корень $t=1$ и делится без остатка на $(t-1)$. Делим «уголком», получаем

$$\begin{aligned} t^3 - 3t + 2 &= (t-1) \cdot (t^2 + t - 2) = \\ &= (t-1) \cdot (t-1) \cdot (t+2), \quad t = \frac{x}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Итак, $x^3 - 6x + 4\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 2\right) > 0.$$

По методу интервалов имеем:



$$x \in (-2\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

Рис. 1

4. Ответ: 4.

В арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разность прогрессии d n -ый член $a_n = a_1 + d(n-1)$. Имеем $a_1 = 4$,

$$a_{65} = 4 + d \cdot 64 = 196 \Leftrightarrow d = 3.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d}, \\ \Rightarrow S_2 &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} &= \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} = \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d}; \\ \Rightarrow S_3 &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{3} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{3} = \\ &= \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_1}}{3}. \end{aligned}$$

Методом математической индукции легко доказывается, что

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \dots \\ \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} &= \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}}{3}, \text{ тогда} \\ S_{65} &= \frac{\sqrt{a_{65}} - \sqrt{a_1}}{3} = \frac{\sqrt{196} - \sqrt{4}}{3} = 4. \end{aligned}$$

5. Ответ: (см. рис.2) $S = 8 + \frac{\pi}{4}$.

Первое неравенство

$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leq 4$ рассматриваем в квадрантах:

I квадрант $x \geq 0, y \geq 0; \quad 0 \leq 4$

Удовлетворяет все (x, y) .

II квадрант $x \leq 0, y \geq 0;$

$$\begin{cases} 4x^2 \leq 4, \\ x \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 0. \\ y \geq 0. \end{cases} \quad - \text{полоса.}$$

III квадрант $x \leq 0, y \leq 0;$

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 \leq 4, \\ x \leq 0, y \leq 0 \end{cases} \quad - \text{четверть единично-$$

го круга с центром $(0; 0)$, расположенная в III квадранте.

IV квадрант $x \geq 0, y \leq 0;$

$$\begin{cases} 4y^2 \leq 4, \\ y \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq y \leq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad - \text{полоса.}$$

Строим множество, удовлетворяющее первому неравенству. Затем проводим прямую $2x + y = 3$.

Она разбивает плоскости на две полуплоскости, правее и левее этой прямой. Подставляем точку $x = 0, y = 0; (2x + y) = 0 < 3$.
 $|_{x=y=0}$

Второе неравенство выполняется левее прямой $2x + y = 3$. Искомое множество M изображено на рисунке 2.

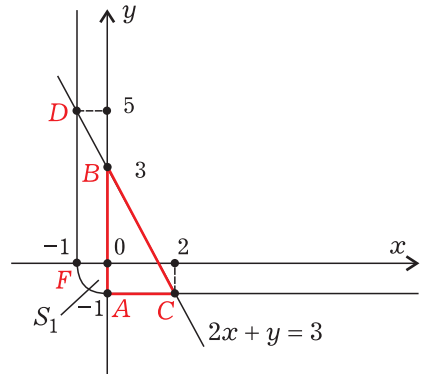


Рис. 2

Его площадь – это сумма площадей S_1 – треугольника ABC , S_2 – трапеции $FODB$ и площади четверти круга S_3 .

$$S_1 = S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4,$$

$$S_2 = S_{FODB} = \frac{1}{2} (3 + 5) \cdot 1 = 4,$$

$$S_3 = \frac{1}{4} \pi \cdot r^2 = \frac{1}{4} \pi. \text{ Итак } S = 8 + \frac{\pi}{4}.$$

6. Ответ: $\sqrt{2}$.

Из $AC = CK$ следует, что треугольник ACK – равнобедренный, равные углы при основании AK обозначим α . Если $CM \perp AK$, то $AM = KM = CK \cdot \cos \alpha$, и $CM = CK \cdot \sin \alpha$, т.е. $AM = \cos \alpha, CM = \sin \alpha$.

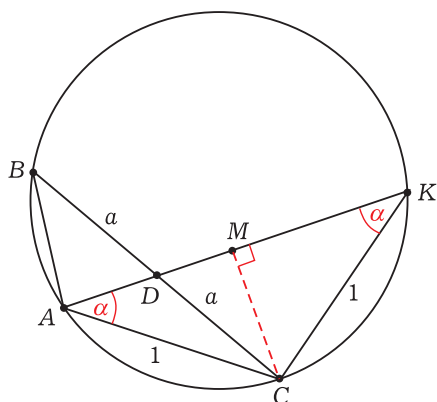


Рис. 3

По условию AD – медиана, $BD = CD$. Обозначим $BD = a$.

Из прямоугольного треугольника CMD выражаем

$$DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \sin^2 \alpha},$$

тогда

$$AD = AM - DM = \cos \alpha - \sqrt{a^2 - \sin^2 \alpha}$$

$$\text{и } DK = DM + MK = \cos \alpha + \sqrt{a^2 - \sin^2 \alpha}.$$

По теореме о пересекающихся хордах $BD \cdot DC = AD \cdot DK \Leftrightarrow$

$$a^2 = \cos^2 \alpha - (a^2 - \sin^2 \alpha) = 1 - a^2 \Leftrightarrow$$

$$2a^2 = 1, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{тогда } BC = 2a = \sqrt{2}.$$

7. Ответ: 90° .

Угол между прямыми a и b в пространстве по определению есть меньший из углов, образованных двумя пересекающимися прямыми a' и b' , параллельными a и b . Угол измеряется от 0° до 90° .

1. Как найти угол между прямыми, на которых лежат отрезки, соединяющие точки поверхности многогранника, покажем в решении. Надо найти угол между прямыми AC и BD_1 (рис. 4).

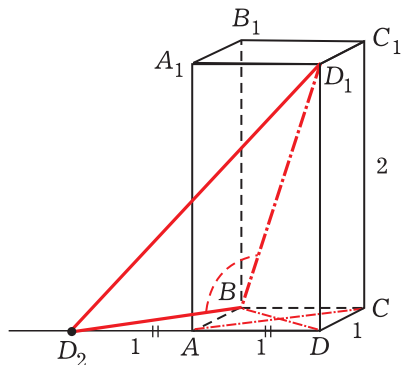


Рис. 4

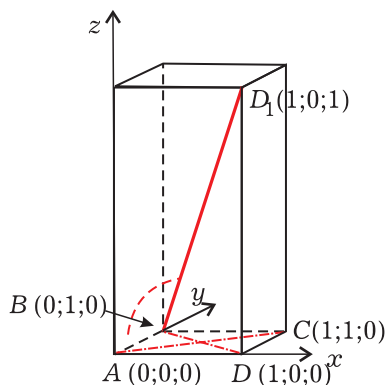


Рис. 5

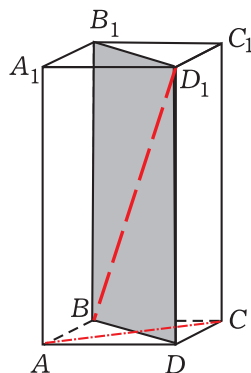


Рис. 6

На прямой AD откладываем отрезок $AD_2 = AD = 1$. По построению AD_2BC – параллелограмм, поэтому $D_2B \parallel AC$ и $D_2B = AC = \sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника BDD_1 находим $BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{6}$, а из прямоугольного треугольника DD_1D_2 определяем $D_1D_2 = \sqrt{DD_1^2 + DD_2^2} = \sqrt{8}$. В данном случае искомый угол $\varphi = \angle D_1BD_2$. По теореме косинусов для $\triangle D_1BD_2$ имеем

$$D_1D_2^2 = BD_1^2 + BD_2^2 = 2 \cdot BD_1 \cdot BD_2 \cdot \cos \varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 = 6 + 2 + 2\sqrt{12} \cos \varphi \Leftrightarrow \cos \varphi = 0, \quad \varphi = 90^\circ. \text{ Угол между прямыми } AC \text{ и } BD_1 \text{ прямой.}$$

2. Другой способ решения – координатный. Вводим прямоугольную систему координат как показано на рис. 5. Зная координаты точек A, C, B и D_1 находим $\overrightarrow{AC}(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BD_1}(1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 1 - 1 + 0 = 0$. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD_1}$.

Угол между прямыми AC и BD_1 равен 90° .

3. Доказательство ортогональности приведем еще чисто геометрическое. Отрезок BD_1 лежит в плоскости BB_1D_1D (рис. 6). Прямая $AC \perp BD$ (диагонали квадрата перпендикулярны), $AC \perp AA_1$, $AA_1 \parallel DD_1$, значит $AC \perp DD_1$. Прямая AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым BD и DD_1 в плоскости BB_1D_1D , следовательно, прямая AC перпендикулярна этой плоскости и перпендикулярна любой прямой лежащей в ней. Итак $AC \perp BD_1$.

8. Ответ: 132 см, 120 см, 114 см.

11-угольная призма, боковое ребро длиной 10 см, основание – правильный 11-угольник со стороной 1 см. Сумма длин всех ребер (учитываем, что 2 основания) равна

$$11 \cdot 10 \text{ см} + 2 \cdot 11 \cdot 1 \text{ см} = 132 \text{ см.}$$

7-угольная призма, боковое ребро длиной 10 см, основание 7-угольник, 2 стороны длиной 10 см, 5 сторон длиной 1 см (пример такого 7-угольника на рис. 7). Сумма длин всех ребер равна

$$7 \cdot 10 \text{ см} + 2(2 \cdot 10 \text{ см} + 5 \cdot 1 \text{ см}) = 120 \text{ см.}$$

5-угольная призма, боковое ребро длиной 10 см, основание 5-угольник, три стороны которого равны 10 см, 2 стороны длиной 1 см (пример на рис. 8). Сумма длин всех ребер призмы равна

$$5 \cdot 10 \text{ см} + 2(3 \cdot 10 \text{ см} + 2 \cdot 1 \text{ см}) = 114 \text{ см.}$$

Никаких других призм, удовлетворяющих условию, не существует.

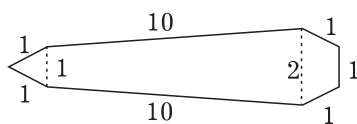


Рис. 7

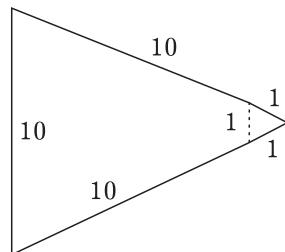


Рис. 8

9. Ответ: Да, может быть

Пример. $\triangle ABC$: $a = b$, $\angle C = 90^\circ$,

$$c = a\sqrt{2}.$$

$$\triangle A_1B_1C_1 \quad a_1 = b_1 = \frac{4}{3}a, \quad a_1 > a, \quad b_1 > b,$$

$$\angle C_1 = 150^\circ$$

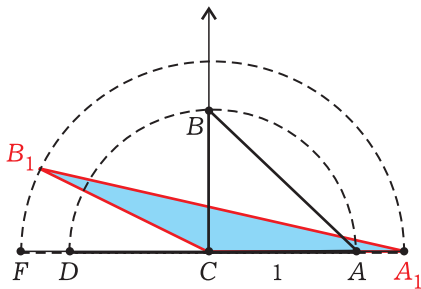


Рис. 9

$$c_1 = \sqrt{\frac{16}{9}a^2 + \frac{16}{9}a^2 + 2\frac{16}{9}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3}a\sqrt{2+\sqrt{3}} > \frac{4}{3}a\sqrt{2} = \frac{4}{3}c > c.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2,$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}a_1b_1 \sin C_1 = \frac{1}{2}a_1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{8}{9}S_{ABC},$$

т.е. $S_{A_1B_1C_1} < S_{ABC}$. На рис. $C = C_1$,

$$CD = 1, \quad CF = \frac{4}{3}.$$

Статью подготовила Т.С. Пиголкина

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Ученые из МФТИ изготовили сверхпроводящие устройства на базе нанокристаллов топологических изоляторов

Ученые из лаборатории топологических квантовых явлений в сверхпроводящих системах МФТИ изготовили сверхпроводящие джозефсоновские устройства с использованием наноразмерных кристаллов топологических изоляторов. Использование топологических изоляторов в таких устройствах считается многообещающим из-за специфики их электронно-транспортных свойств, а также из-за возможности получить топологическую сверхпроводимость и состояний Майорана. В работе была показана технология изготовления и сверхпроводящие свойства уникальных джозефсоновских устройств на основе одиночных нанокристаллов $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.3}\text{Se}_{0.7}$, с толщиной в нескольких элементарных ячеек. Одиночные контакты показывают типичные характеристики планарных джозефсоновских переходов, а структуры, образованные из двух нанокристаллов, ведут себя как наноразмерные сверхпроводящие квантовые интерференционные устройства (СКВИДы). Своеобразная эволюция джозефсоновского критического тока как функции температуры и магнитного поля, наряду с наблюдаемым эффектом избыточного тока, указывают на баллистический режим работы устройств, определяемый конечным числом 2D-каналов проводимости на поверхности кристалла. Таким образом, предлагаемые устройства являются отличной платформой для исследования топологических квантовых явлений в будущем. Результаты опубликованы в журнале *Nature communications materials*. В работе также принимали участие исследователи из ИФТТ РАН, МИФИ, КФУ, МИСиС, ВНИИА и ESPCI Paris.

Источник: https://mipt.ru/news/nauka_v_mfti_daydzhest_7_19_iyulya