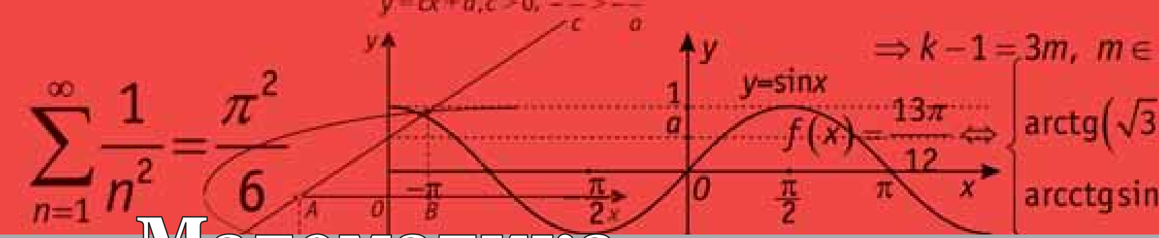

Пиголкина Татьяна Сергеевна
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики МФТИ,
заслуженный работник высшей школы,
заместитель председателя научно-методического
совета ФЗФТШ при МФТИ.

Ермаков Станислав Васильевич
Редактор-корректор журнала «Потенциал».

Ещё раз о сравнении среднего арифметического и среднего геометрического

В статье приводится один из самых простых способов доказательства теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Часть 1. Доказательство теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом для произвольного n

Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом: для любых положительных (неотрицательных) чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет место неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \qquad (1)$$

в котором равенство достигается лишь в случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Приведём самое простое, на наш взгляд, доказательство этой теоремы.

В нашем журнале применение этого неравенства для различных n уже рассматривалось в [1]. Кстати заметим, что, как и для многих замечательных теорем математики, для этой теоремы существует несколько различных доказательств (см. [2] и [3]).

Доказательство (методом математической индукции).

1. При $n = 1$ неравенство (1) выполняется: $a_1 \geq a_1$.

При $n=2$ оно следует из очевидного неравенства

$$\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a_1+a_2 \ge 2\sqrt{a_1 a_2},$$

где равенство имеет место лишь при $a_1=a_2$.

2. Полагаем, что неравенство (1) выполняется для $n=k$.

3. Оценим разность между левой и правой частями при $n=k+1$:

$$\Delta=\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)+a_{k+1}}{k+1}-$$
$$-\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1}}.$$

Так как по допущению неравенство (1) справедливо при $n=k$, то применив его к слагаемым, стоящим в числителе в скобках, получим:

$$\Delta \ge \frac{k\cdot\sqrt[k]{a_1 a_2\ldots a_k}+a_{k+1}}{k+1}-$$
$$-\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1}}. \qquad (2)$$

Сделаем замену, положив $a_1 a_2 \ldots a_k = x^{k(k+1)}$ и $a_{k+1}=y^{k+1}$, тогда (2) примет вид:

$$\Delta \ge \frac{kx^{k+1}+y^{k+1}}{k+1}-x^k\cdot y.$$

Покажем, что $\Delta>0$ при $x\ne y$.

Оценим $\Delta\cdot(k+1)=\Delta_1$:

$$\Delta_1 \ge kx^{k+1}+y^{k+1}-kx^k\cdot y-x^k\cdot y=$$
$$=kx^k(x-y)-y\left(x^k-y^k\right).$$

Выделим во втором слагаемом множитель $(x-y)$, используя формулу $a^n-b^n=$
$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ (мы её выведем в части 2), затем общий множитель $(x-y)$ вынесем за скобки, получим:

$$\Delta_1 \ge (x-y)\begin{pmatrix} kx^k-y(x^{k-1}+x^{k-2}y\ldots+ \\ +xy^{k-2}+y^{k-1}) \end{pmatrix}=$$
$$=(x-y)(kx^k-x^{k-1}y-$$
$$-x^{k-2}\cdot y^2-\ldots-xy^{k-1}-y^k).$$

Слагаемое kx^k во второй скобке заменим на сумму k одинаковых слагаемых $kx^k=x^k+x^k+\ldots+x^k$ и сгруппируем слагаемые попарно:

$$\Delta_1>(x-y)\times$$
$$\times\begin{pmatrix} (x^k-x^{k-1}y)+ \\ +(x^k-x^{k-2}y^2)+\ldots+(x^k-xy^{k-1})+ \\ +(x^k-y^k) \end{pmatrix}=$$
$$=(x-y)\begin{pmatrix} x^{k-1}(x-y)+ \\ +x^{k-2}(x^2-y^2)+\ldots+ \\ +x(x^{k-1}-y^{k-1})+(x^k-y^k) \end{pmatrix}.$$

Каждая из скобок

$$(x^2-y^2),\ \ldots,(x^k-y^k)$$

имеет множитель $(x-y)$, вынесем его и получим:

$$\Delta_1 \ge (x-y)^2\begin{pmatrix} x^{k-1}+x^{k-2}(x+y)+ \\ +x^{k-3}(x^2+xy+ \\ +y^2)+\ldots+(x^{k-1}+ \\ +x^{k-2}y+\ldots+y^{k-1}) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Справа во второй скобке все слагаемые положительные, потому при

$x \neq y$ и $\Delta_1 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$.

Тем самым доказано, что строгое неравенство (1) выполняется при $x \neq y$ и $n = k+1$.

Установим, когда имеет место равенство. В выражении (1) по индуктивному предположению равенство достигается лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, а это означает, что $a_1 a_2 \ldots a_k = x^{k(k+1)} = a_1{}^k \Leftrightarrow x^{k+1} = a_1$. Выражение (3) может быть равенством лишь при $x = y$, что равносильно $x^{k+1} = y^{k+1}$, т. е. $a_1 = a_{k+1}$, и значит, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k+1}$. Неравенство (1) полностью доказано.

Часть 2. Вывод формул для $a^n - b^n$, $a^{2m+1} + b^{2m+1}$. Примеры

Первый способ. Разность $a^n - b^n$ обращается в 0 при $a = b$ – значит, она делится на $(a-b)$. Это деление можно осуществить делением под углом или использовать схему Горнера. Проделайте это самостоятельно и получите нужную формулу:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Второй способ. Можно прийти к формуле более длинным, но доступным всем путём, т. к. он опирается на известную формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии b_1, $b_1 q$, $b_1 q^2, \ldots$ при $q \neq 1$:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad (4)$$

Запишем формулу (4) подробно при $b_1 = 1$ $(q \neq 1)$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Домножим равенство на $(q-1)$, изменив при этом порядок слагаемых в сумме слева, получим:

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1).$$

Заметим, что полученная формула уже верна для *любых* q, включая $q = 0$ и $q = 1$. Сделаем замену $q = \frac{a}{b}$, затем умножим на b^n и получим формулу:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \qquad (5)$$

Во второй скобке стоит однородный многочлен степени $n-1$ с единичными коэффициентами, в котором точно n слагаемых. Заметим, что полученная формула верна для *любых* a, b, включая $b = 0$.

При $n = 3$ это известная формула сокращённого умножения:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Выпишем формулу (5) при $n = 4$ и $n = 5$, чтобы лучше запомнить вид слагаемых во второй скобке:

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3),$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4).$$

Замена b на $(-b)$ в формуле (5) при нечётном значении $n = 2m+1$ приводит к другой формуле:

$$a^{2m+1}+b^{2m+1}=$$
$$=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b+$$
$$+\ldots+(-1)^k a^{2m-k}b^k+\ldots+b^{2m}). \qquad (6)$$

Здесь во второй скобке стоит знакочередующаяся сумма. Например, при $m=2$ имеем:

$$a^5+b^5=(a+b)\times$$
$$\times(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4). \qquad (7)$$

Пример 1. Вычислить сумму

$$S_n(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}.$$

Решение.

Первый способ. Если $x=1$, то $S_n(1)=1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ как сумма n первых членов арифметической прогрессии.

При $x\neq 1$ разобьём сумму $S_n(x)$ на две суммы следующим образом:

$$S_n(x)=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})+$$
$$+(x+2x^2+3x^3+\ldots+(n-1)x^{n-1})=$$
$$=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})+$$
$$+x(1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)x^{n-2}).$$

Сумму первой скобки выражаем по формуле (4) и замечаем, что вторая скобка содержит все члены искомой суммы, кроме последнего. Добавим и вычтем его, получим:

$$S_n(x)=\frac{x^n-1}{x-1}+x(S_n(x)-nx^{n-1}),$$

откуда следует, что

$$S_n(x)=\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(x-1)^2}. \qquad (8)$$

Второй способ. Если вспомним производную, то заметим, что

$$S_n(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=$$
$$=\left(x+x^2+x^3+\ldots+x^n\right)'.$$

Под знаком производной сумма n членов геометрической прогрессии, в которой $b_1=q=x$, поэтому

$$S_n(x)=\left(x\frac{x^n-1}{x-1}\right)'.$$

Вычисляем производную дроби и получаем то же выражение (8).

Ответ.

$$S_n(1)=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$S_n(x)=\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(x-1)^2},\ x\neq 1.$$

Пример 2. Вычислить сумму

$$A=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+100\cdot 2^{99}.$$

Решение. Заметив сходство этой суммы с суммой из примера 1, делаем замену 2 на x, имеем $A(x)=1+$ $+2\cdot x+3\cdot x^2+4\cdot x^3+\ldots+100\cdot x^{99}$, что совпадает с суммой $S_n(x)$ из примера 1 при $n=100$. По формуле (8) при $n=100$ и $x=2$ получаем:

$$S_{100}(2)=\frac{1+100\cdot 2^{101}-101\cdot 2^{100}}{(2-1)^2}=$$
$$=1+99\cdot 2^{100}.$$

Ответ. $A=1+99\cdot 2^{100}$.

Пример 3. Вычислить сумму

$$B_n=1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Решение. Каждое слагаемое представим суммой по степеням числа 10:

$$B_n = 1+(1+10)+(1+10+100)+\ldots+$$
$$+(1+10+100+\ldots+10^{n-1})$$

и используем формулу суммы членов геометрической прогрессии:

$$1=\frac{10-1}{10-1},$$

$$1+10=\frac{10^2-1}{10-1},$$

$$1+10+100=\frac{10^3-1}{10-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1+10+100+\ldots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{10-1}.$$

Сложив правые части равенств, получим:

$$B_n=\frac{1}{9}\left(10+10^2+10^3+\ldots+10^n-n\right)=$$
$$=\frac{1}{81}\left(10^{n+1}-10-9n\right).$$

Ответ. $\frac{1}{81}\left(10^{n+1}-10-9n\right)$.

Пример 4. Решить уравнение

$$8\sqrt{2}(\cos^5 x+\sin^5 x)=19\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Решение. Полагая $a=\cos x$ и $b=\sin x$ и применяя формулу (7), будем иметь:

$$\cos^5 x+\sin^5 x=(\cos x+\sin x)\times$$
$$\times\left(\begin{array}{c}\cos^4 x-\cos^3 x\cdot\sin x+\cos^2 x\cdot\sin^2 x-\\ -\cos x\cdot\sin^3 x+\sin^4 x\end{array}\right).$$

Учтём, что

$$\cos^4 x+\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-$$
$$-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x,$$
$$-\cos^3 x\cdot\sin x-\cos x\cdot\sin^3 x=$$
$$=-\cos x\cdot\sin x.$$

Поэтому

$$\cos^5 x+\sin^5 x=(\cos x+\sin x)\times$$
$$\times\left(1-\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\sin x\cdot\cos x\right)=$$
$$=(\cos x+\sin x)\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right).$$

Учитывая, что $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)$, приведём уравнение к виду:

$$16(\cos x+\sin x)\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=$$
$$=19(\cos x+\sin x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0,\\ 4\sin^2 2x+8\sin 2x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-1,\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ.

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Литература

1. *Пиголкина Т.С.* Средние значения//Потенциал. – 2005. – №12.

2. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1976.

3. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Иностранная литература, 1948.