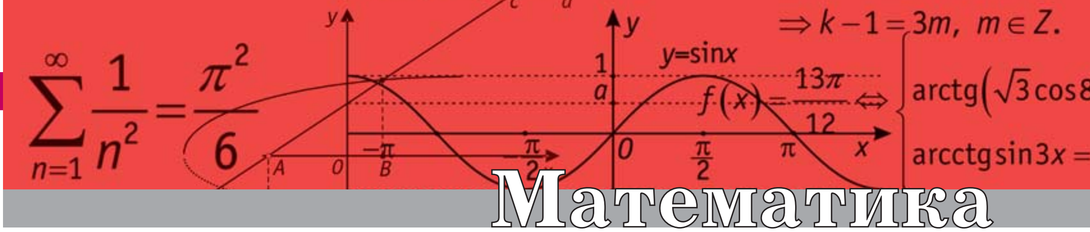


Лецко Владимир Александрович
Доцент кафедры алгебры и геометрии Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

Сопутствующие четырёхугольники

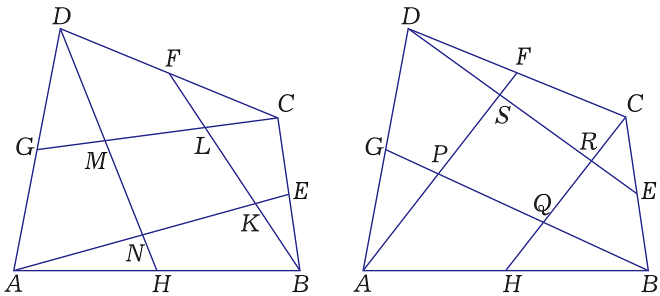
На конфигурацию, рассматриваемую в этой статье, автор натолкнулся случайно. В рамках курса «Информационные технологии в математике» студенты вуза, в котором автор преподаёт, изучают систему компьютерной алгебры «Maple». При составлении задания для её изучения и появилась рассматриваемая ниже задача.

Её постановка и решение доступны и старшеклассникам, проявляющим интерес к изучению математики. В конце статьи предложены вопросы для самостоятельных исследований.

Все алгебраические вычисления и рисунки в статье выполнены при помощи программы «Maple».

1. Пусть точки E, F, G и H – середины соответствующих сторон BC, CD, DA и AB произвольного выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (рис. 1). Обозначим через K, L, M и N точки пересечения прямых AE и BF, BF и CG, CG и DH, DH и AE соответственно. В задании требовалось найти отношение (обозначим его q_R) площадей четырёхугольников $ABCD$ и $KLMN$. Постановка задачи вполне понятна (не только студентам, но и школьникам), но вычисления весьма громоздки, что и оправдывает применение «Maple» (или иного математического пакета).

Рассмотрим, например, четырёхугольник (рис. 1 *а*), который имеет следующие координаты вершин: $A(0;\ 0)$, $B(13;\ 0)$, $C(12;\ 7)$, $D(2;\ 11)$.



а *б*

Рис. 1

Искомое отношение оказалось равным

$$q_R = \frac{2007261144}{401091499} \approx 5{,}004497.$$

«Пошевелив» координаты вершин, получили другие значения q_R, но все они оказались чуть больше 5. А что, если соединить вершины исходного четырёхугольника с серединами сторон в другом порядке (ведь сторона CD имеет не меньше оснований называться противоположной вершине A, чем сторона BC)? Соответствующая конфигурация изображена на рис. 1 *б*. Оказалось, что отношение площади $ABCD$ к площади $PQRS$ (обозначим его q_L) ещё меньше отличается от 5. А именно,

$$q_L = \frac{207711594}{401541949} \approx 5{,}0000046.$$

Итак, рассматриваемое отношение зависит от формы четырёхугольника, а также от порядка соединения вершин с серединами сторон. При этом оно, как правило, больше 5 на очень незначительную величину. Естественно, возникает целый ряд вопросов: найти диапазон возможных значений рассматриваемого отношения; выяснить, для каких четырёхугольников достигаются границы этого диапазона и достижимы ли они вообще; описать многоугольники, для которых выполняется соотношение $q_R = q_L$.

Прежде чем начать поиск ответов на эти и другие вопросы (которые наверняка возникнут по ходу поиска), введём обозначения, которых будем придерживаться на протяжении нашего исследования. Четырёхугольник $KLMN$ на рис. 1 *а* будем называть *правым сопутствующим четырёхугольником* четырёхугольника $ABCD$, а четырёхугольник $PQRS$ на рис. 1 *б*, соответственно, *левым* сопутствующим четырёхугольником. Отметим, что такое разграничение весьма условно и зависит от направления (по или против часовой стрелки) обхода вершин четырёхугольника при обозначении. Из соображений симметрии ясно, что диапазон изменения q_R ничем не отличается от диапазона изменения q_L. Поэтому, решая задачу нахождения этого диапазона, ограничимся рассмотрением только правых сопутствующих четырёхугольников и договоримся временно опускать прилагательное «правый».

2. Поскольку задача в общем виде выглядит достаточно сложной, начнём с рассмотрения частных случаев (такой приём часто приводит к появлению идей и гипотез, способствуя тем самым нахождению и общего решения).

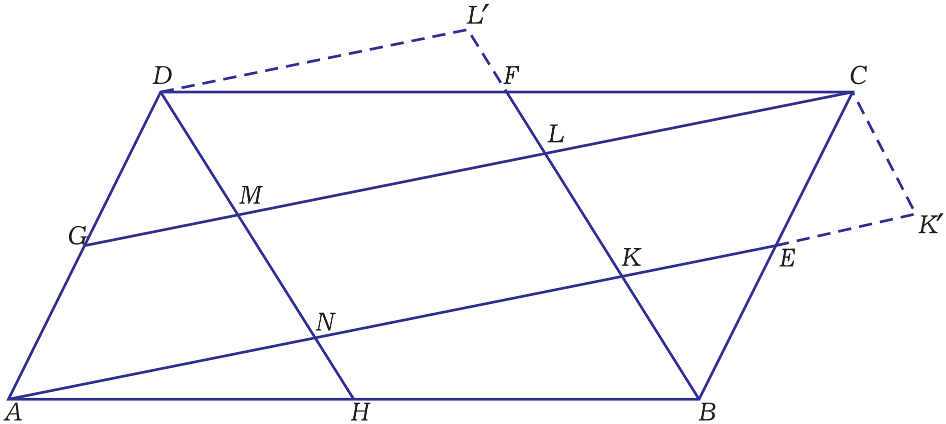


Рис. 2

Легко видеть, что если исходный четырёхугольник – параллелограмм, то и сопутствующий четырёхугольник тоже будет параллелограммом. Нахождение q_R для этого случая – совсем лёгкая задача. Точку L', симметричную точке L относительно F, соединим с F и D. FL – средняя линия треугольника CDM. Поэтому в четырёхугольнике $LL'DM$ стороны LL' и MD равны и параллельны, поэтому он является параллелограммом. Учитывая, что $NM = MD$ (GM – средняя линия треугольника AND), получим, что параллелограммы $LL'DM$ и $KLMN$ равны. Но параллелограмм $LL'DM$, очевидно, равновелик треугольнику MDC. Поэтому $S_{KLMN} = S_{MDC} = S_{KBA}$. Аналогично

$$S_{KLMN} = S_{K'CLK} = S_{LCB} = S_{NDA}.$$

Окончательно получаем

$$q_R = S_{ABCD} / S_{KLMN} = 5.$$

Итак, в случае, когда исходный четырёхугольник – параллелограмм, искомое отношение равно 5. Попытки найти четырёхугольник, для которого это отношение меньше 5, ни к чему не приводят (что, разумеется, не является доказательством отсутствия таких четырёхугольников). Зато компьютерный эксперимент помогает обнаружить ситуации, когда рассматриваемое отношение перестаёт быть близким к 5. Такое случается, когда одна из сторон исходного четырёхугольника гораздо меньше остальных. «Стягивая» одну из сторон в точку, мы будем неограниченно приближать исходный четырёхугольник к треугольнику. При этом сопутствующий четырёхугольник тоже будет превращаться в треугольник, а именно в один из тех шести треугольников, на которые разбивают исходный треугольник (бывший четырёхугольник) его медианы. Легко убедиться, что площадь такого треугольника составляет одну шестую часть площади исходного. Следовательно, уменьшая одну из сторон исходного четырёхугольника можно сколь угодно приблизить q_R к 6.

Подведём промежуточные итоги. На основании наших экспериментов можно выдвинуть предположение: *значения искомого отношения* q_R *заполняют собой полусегмент* $[5; 6)$.

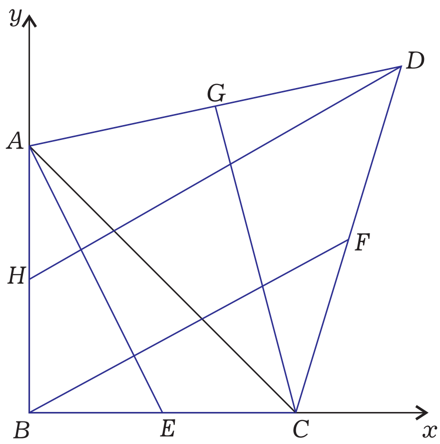
3. Однако, сколь бы правдоподобным ни выглядело это заключение, пока это только гипотеза. Но как же доказать (или опровергнуть) эту гипотезу?

На первый взгляд эта задача выглядит очень трудной. Ведь четырёхугольник определяется пятью своими независимыми элементами. Поэтому q_R является функцией пяти аргументов. Правда, по крайней мере, от одного аргумента легко избавиться. Ясно, что исследуемое отношение будет одинаковым для подобных четырёхугольников, то есть зависит не от размеров, а лишь от формы исходного четырёхугольника. А форма однозначно определяется четырьмя параметрами. Например, в качестве параметров можно взять четыре угла. Разумеется, это не должны быть четыре угла исходного четырёхугольника (эти данные зависимы). А вот, например, четыре угла, примыкающие к одной диагонали исходного четырёхугольника, вполне пригодны.

Но и четыре аргумента – это тоже очень много. Вот если бы q_R было устойчиво по отношению ещё к каким-то преобразованиям. Оказывается, так и есть! В первом номере «Кванта» за 2009-й год опубликована статья А. Заславского «Аффинная геометрия» [1]. В ней рассказывается о преобразованиях плоскости, сохраняющих прямолинейность. Такие преобразования называются аффинными. В дальнейшем изложении будут широко использоваться свойства аффинных преобразований, описанные в статье Заславского.

Из теоремы существования и единственности аффинного преобразования (см. [1]) следует, что любой треугольник можно перевести в любой другой с помощью подходящего аффинного преобразования. С четырёхугольниками дело обстоит иначе. Они разбиваются на бесконечное количество классов таких, что любые четырёхугольники в пределах одного класса аффинно эквивалентны, а четырёхугольники из разных классов не могут быть переведены друг в друга никаким аффинным преобразованием.

Легко заметить, что q_R является аффинным инвариантом (то есть четырёхугольники, которые могут быть получены друг из друга аффинным преобразованием, имеют одинаковые значения q_R). В самом деле, при аффинных преобразованиях сохраняется выпуклость четырёхугольника и отношение длин отрезков, расположенных на одной прямой или параллельных прямых. Поэтому при преобразовании исходного четырёхугольника его сопутствующий четырёхугольник перейдёт в сопутствующий четырёхугольник образа. Что касается площадей фигур, то при аффинном преобразовании они, вообще говоря, изменяются. Но коэффициент изменения площади при фиксированном аффинном преобразовании будет одним и тем же для всех фигур. Поэтому интересующее нас отношение не изменится. Наша цель – выбрать в каждом классе наиболее удобный для вычисления q_R четырёхугольник.



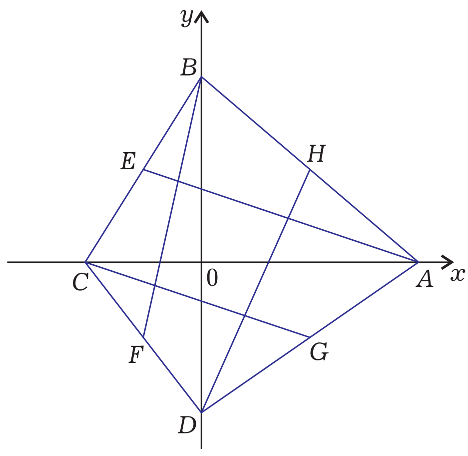


Рис. 3

Используя теорему существования и единственности аффинного преобразования, легко убедиться, что каждый выпуклый четырёхугольник аффинно эквивалентен такому четырёхугольнику $ABCD$, что треугольник ABC будет прямоугольным равнобедренным (угол B – прямой). Свяжем с этим треугольником прямоугольную декартову систему координат, положив $A(0;\ 1)$, $B(0;\ 0)$, $C(1;\ 0)$. Тогда вершина D будет иметь положительные координаты a и b, удовлетворяющие неравенству $a+b>1$ (рис. 3 *а*). Выразив отношение площадей исходного и сопутствующего четырёхугольников через a и b, получим выражение для q_R, зависящее всего от двух параметров. Однако у такой параметризации q_R имеются существенные недостатки. Во-первых, область допустимых положений вершины D получается недостаточно симметричной, в то время как сам сопутствующий четырёхугольник определён равноправно по отношению ко всем его вершинам. Следствием такой несимметричности будет излишняя громоздкость выражения q_R через a и b. А во-вторых, эта область не является ограниченной, что существенно затрудняет исследование и наглядное представление q_R как функции от a и b.

С целью избавиться от недостатков, отмеченных в предыдущем абзаце, подойдём к выбору представителя в классе аффинно эквивалентных выпуклых четырёхугольников иначе. Учитывая, что два четырёхугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда точка пресечения диагоналей первого четырёхугольника делит каждую диагональ в том же отношении, в котором делится точкой пересечения диагоналей соответствующая диагональ второго четырёхугольника (докажите это), возьмём в качестве исходного четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны между собой. Теперь прямоугольную декартову систему координат можно выбрать так, чтобы вершины четырёхугольника получили следующие координаты: $A(u+1;\ 0)$, $B(0;\ v+1)$, $C(u-1;\ 0)$, $D(0;\ v-1)$ (рис. 3 *б*). Четырёхугольник $ABCD$ будет выпуклым в том и только том случае, когда параметры u и v удовлетворяют неравенствам $-1<u<1$, $-1<v<1$.

Итак, для решения поставленных задач *можно ограничиться четырёхугольниками, показанными на рис. 3 а, б.*

4. Площадь четырёхугольника $ABCD$ на рис. 3 *б* равна 2 независимо от значений u и v (в первом варианте параметризации она зависела от a и b). Зная координаты вершин четырёхугольника, можно методами аналитической геометрии выразить через u и v площадь сопутствующего четырёхугольника, а значит, и q_R. Однако эти вычисления довольно громоздки. Поэтому мы вновь прибегнем к помощи Maple. В результате получим:

$$q_R(u,v)=\frac{(2u-v+5)(2u-v-5)(2v+u+5)(2v+u-5)}{-u^4+12u^3v-9u^2v^2-25u^2-12uv^3+125-25v^2-v^4}. \qquad (1)$$

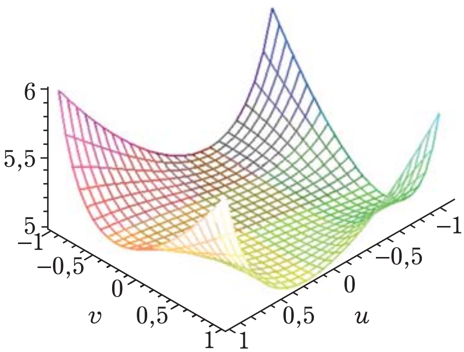


Рис. 4

Итак, аналитическое выражение для q_R получено. Теперь мы можем построить график функции $q_R(u,v)$ (в этом нам опять поможет Maple) и получить наглядное представление о том, какие значения принимает q_R при всех u и v, удовлетворяющих принятым ограничениям. График на рисунке 4, похоже, подтверждает нашу гипотезу. Вершины квадрата, ограничивающего область определения $q_R(u,v)$, соответствуют вырожденным «четырёхугольникам», в которых одна из сторон обратилась в точку. По мере того как абсолютные величины значений параметров (одновременно) приближаются к 1, значение q_R приближается к 6. Мы знаем, что, для класса параллелограммов (в нашей параметризации этот класс представлен квадратом, получающимся при $u=0$, $v=0$) значение

q_R равно 5. Из графика видно, что для четырёхугольников, аффинно близких к параллелограмму (то есть четырёхугольников, у которых диагонали делятся точкой пересечения на примерно равные части), значение q_R также близко к 5, что хорошо согласуется с результатами экспериментов. Однако картинка (пусть даже построенная с помощью программы) может служить лишь ещё одним подтверждением, но никак не доказательством нашей гипотезы. Точное же нахождение диапазона изменения q_R по-прежнему представляется непростой задачей. Ведь q_R является дробно-рациональной функцией, числитель и знаменатель которой – многочлены 4-й степени от двух переменных. Вот тут-то нам и поможет наша гипотеза! Одно дело решать задачу (в нашем случае искать множество значений функции двух переменных), не имея представления о том, каким может быть ответ, и совсем другое – обосновать, что известный нам ответ верен (если, конечно, он и в самом деле верен).

5. Обозначим через $q_1(u,v)$ и $q_2(u,v)$ соответственно числитель и знаменатель выражения в правой части формулы (1). Отметим, что при принятых на u и v ограничениях $q_1(u,v)$ и $q_2(u,v)$ будут положительными. Поэтому неравенство $q_R(u,v) \geq 5$ равносильно неравенству $q_1(u,v) - 5q_2(u,v) \geq 0$. Подставив вместо $q_1(u,v)$ и $q_2(u,v)$ их выражения, после упрощений получим неравенство $(3u+v)^2(u-3v)^2 \geq 0$, которое, очевидно, верно при любых u и v. Итак, q_R действительно не может быть меньше 5. При этом, как мы уже убедились раньше, для класса параллелограммов, характеризующегося соотношением $u=v=0$, достигается значение 5. Однако последнее неравенство показывает, что q_R может быть равным 5 не только при $u=v=0$, но и для бесконечного множества других пар u и v. Таким образом, класс четырёхугольников, определяемых соотношением $q_R = 5$, значительно шире класса параллелограммов. Прежде чем описать такие четырёхугольники, завершим доказательство нашей гипотезы.

Нам осталось показать, что q_R не может достигать 6. Для этого достаточно показать, что в рассматриваемой области уравнение $q_R(u, v) = 6$ не имеет решений. То, что q_R не может превышать 6, последует тогда из непрерывности функции $qR(u,v)$ а то, что qR может неограниченно приближаться к 6, мы уже знаем. Координаты точек, удовлетворяющих уравнению $q_R(u,v) = 6$, удовлетворяют одному из равенств:

$$u^2 - 4uv - 2v^2 + 5 = 0,$$

$$2u^2 - 4uv - v^2 - 5 = 0.$$

Можно показать, что оба эти равенства определяют гиперболы, частично расположенные так, как показано на рис. 5.

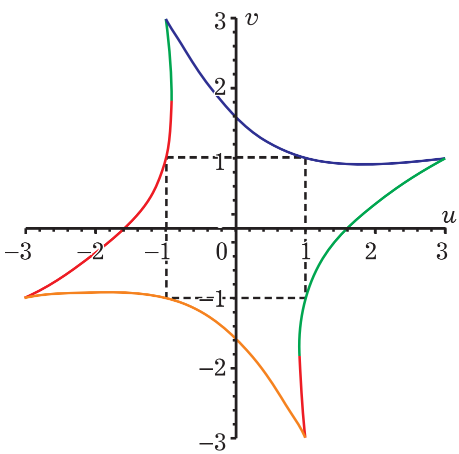


Рис. 5

Легко проверить, что на этих гиперболах лежат все четыре вершины квадрата, ограничивающего область допустимых значений параметров u и v. Для того чтобы убедиться, что гиперболы не проходят через внутренние точки квадрата, выразим параметр v из уравнения каждой из гипербол: $v=-2u+\sqrt{6u^2-5}$ (зелёный график на рисунке 5); $v=-2u-\sqrt{6u^2-5}$ (красный график); $v=-u+\sqrt{6u^2+10}/2$ (синий график); $v=-u-\sqrt{6u^2+10}/2$ (жёлтый график). Остаётся исследовать получившиеся четыре функции одной переменной, что мы и предоставляем читателю.

Итак, ответ на первый из поставленных нами вопросов получен: диапазон изменения отношения площади исходного выпуклого четырёхугольника к площади сопутствующего представляет собой полусегмент $[5;6)$. В ходе поиска и обоснования ответа на этот вопрос был частично решён и второй вопрос. Верхняя граница диапазона недостижима, а нижняя достигается для широкого класса четырёхугольников, частным случаем которого является класс параллелограммов.

6. Для более детального изучения четырёхугольников, удовлетворяющих соотношению $q_R=5$, вернёмся к параметризации, полученной фиксацией трёх вершин исходного четырёхугольника. При помощи Maple без труда (или без помощи Maple, но затратив определённые усилия на достаточно громоздкие выкладки) найдём выражение q_R через координаты четвёртой вершины:

$$q_R(a,b)=\frac{(2a+4b-1)(3a+b+1)(a+2b+2)(4a+3b-2)}{4a^4+12a^3+22a^3b+27a^2b+41a^2b^2-19a^2+9ab^2+8a+28ab^3-11ab-4b-b^2+6b^3+4b^4-1}.$$

Полагаю, что читатели, которым формула (1) показалась вначале достаточно громоздкой, теперь изменили своё мнение и оценили, во-первых, преимущества параметризации q_R через u и v, а во-вторых, возможности системы Maple, справляющейся с уравнением $q_R(a,b)=5$ за доли секунды.

Решения этого уравнения заполняют собой две прямые $2a-b=1$ и $a+2b=3$. Первая из них – это в точности прямая HD_0, где H, как и раньше, – середина AB, а D_0 – такое положение вершины D, что $ABCD$ – квадрат. Вторая прямая проходит через точку D_0 параллельно AE (E – середина BC). С учётом ограничений на a и b получим, что геометрическое место точек D, для которых четырёхугольник $ABCD$ является выпуклым и удовлетворят соотношению $q_R=5$, представляет собой луч и отрезок, пересекающиеся в точке D_0. Подвергнув всю конфигурацию аффинному преобразованию, обратному тому, которое мы использовали, вводя нашу параметризацию, найдём для произвольной тройки точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, геометрическое место четвёртых вершин D (фиолетовые линии на рис. 8), приводящих к выпуклому четырёхугольнику, удовлетворяющему соотношению $q_R=5$.

7. Первые найденные нами четырёхугольники, для которых достигается наименьшее значение q_R, оказались параллелограммами, то есть четырёхугольниками, замечательными во многих отношениях. А будут ли остальные четырёхугольники с q_R, равным 5, обладать ещё какими-нибудь замечательными свойствами, выделяющими их из числа прочих четырёхугольников? Оказывается, такое свойство есть! Докажем, что $q_R=5$ *тогда и только* *тогда, когда сопутствующий четырёхугольник имеет хотя бы одну пару параллельных сторон.*

Пусть, например, в сопутствующем четырёхугольнике четырёхугольника $ABCD$ отрезки AE и CG параллельны (рис. 6). Возьмём точку

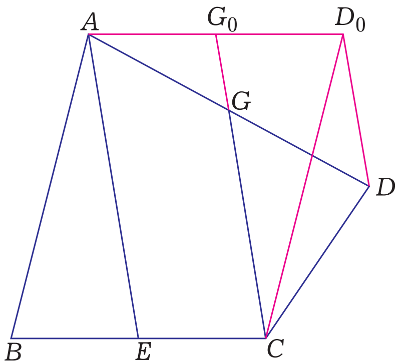


Рис. 6

D_0 такую, что $ABCD_0$ – параллелограмм (договоримся оставить за обозначением D_0 этот смысл до конца статьи). Нам надо показать, что DD_0 параллельно AE. Продолжим CG до пересечения с AD_0 в точке G_0. Четырёхугольник $AECG_0$ – параллелограмм, поэтому AG_0 равно EC, то есть половине BC, а значит, и половине AD_0. Следовательно, GG_0 – средняя линия треугольника ADD_0, что и доказывает требуемую параллельность прямых DD_0 и AE.

Аналогично доказывается, что, если BF параллельно DH, то вершина D лежит на прямой HD_0 (рис. 7), и, следовательно, D принадлежит геометрическому месту точек, для которых $q_R = 5$.

Столь же легко доказывается и обратное утверждение: $q_R = 5$ влечёт параллельность хотя бы одной пары сторон сопутствующего четырёхугольника. Более того, мы получили описание геометрического места четвёртых вершин, для которых

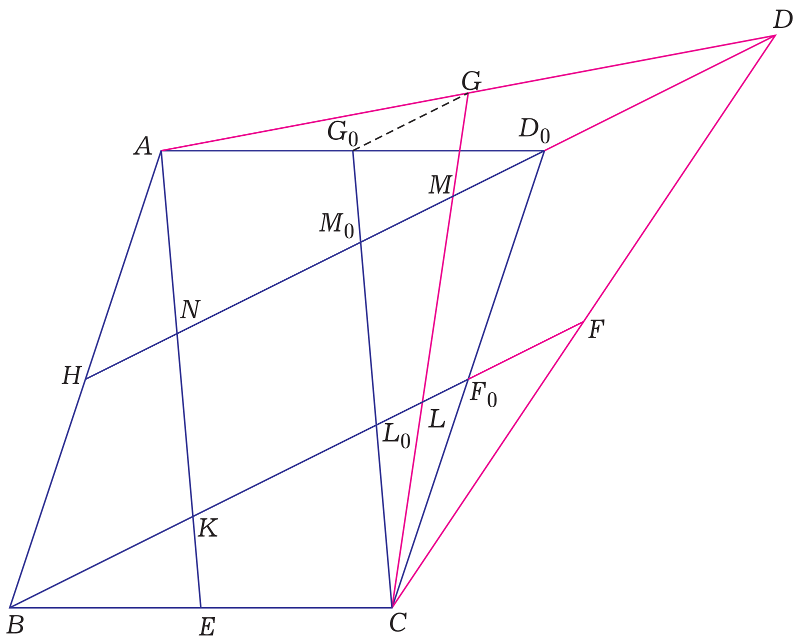


Рис. 7

$q_R=5$, используя весьма громоздкие выкладки (которые проделала за нас система Maple). Однако теперь, зная ответ, легко провести простое и наглядное доказательство того, что принадлежность D прямой HD_0 (или прямой, проходящей через D_0 параллельно AE) влечёт $q_R=5$. Заодно, по ходу этого доказательства, мы покажем, что в этом случае сопровождающий четырёхугольник будет иметь хотя бы одну пару параллельных сторон.

Итак, пусть D расположена на луче HD_0 за точкой D_0. Тогда FF_0 будет средней линией треугольника CDD_0. Поэтому точки B, F, F_0, а вслед за ними и точки K, L, L_0 лежат на одной прямой и $KLMN$ – трапеция. Для доказательства того, что для четырёхугольника $ABCD$ $q_R=5$, достаточно показать, что площадь трапеции LMM_0L_0 в 5 раз меньше площади четырёхугольника $ADCD_0$.

Пусть h – высота трапеции LMM_0L_0, а $DD_0=d$. Тогда высота треугольника ADD_0, опущенная из вершины A, тоже будет равна h, а высота треугольника CDD_0, опущенная из вершины C, будет равна $2h$. Поэтому $S_{ADCD_0}=S_{ADD_0}+S_{CDD_0}=d(h+2h)/2=3/2\,dh$. Для нахождения площади LMM_0L_0 заметим, что $CL_0:L_0M_0:M_0G_0=2:2:1$. Отсюда $LL_0=1/5\,d$, $MM_0=2/5\,d$ и $S_{LMM_0L_0}=dh(1/5+2/5)/2=3/10\,dh=1/5\,S_{ADCD_0}$. Аналогичные рассуждения можно провести и для других допустимых положений вершины D.

До сих пор мы рассматривали правые сопутствующие четырёхугольники. Ясно, что все рассуждения и выводы годятся и для левых сопутствующих четырёхугольников. Единственное отличие: геометрическое место точек, для которых $q_L=5$, будет состоять из отрезка, параллельного CH, а не AE, и луча, лежащего на прямой ED_0, а не HD_0 (красные линии на рисунке 8).

8. Нам осталось описать многоугольники, для которых выполняется соотношение $q_R=q_L$. Для этого найдём выражение для q_L, вновь приняв за параметры координаты вершины D при фиксированных вершинах A, B и C:

$$q_L(a,b)=\frac{(3a+4b-2)(2a+b+2)(a+3b+1)(4a+2b-1)}{4a^4+6a^3+28a^3b-a^2+41a^2b^2+9a^2b+27ab^2-4a+22ab^3-11ab+8b-19b^2+12b^3+4b^4-1}.$$

(Внимательные читатели заметили, что последнее выражение получается из выражения для $q_R(a, b)$, если поменять местами параметры a и b.) Решив уравнение $q_R(a, b)=q_L(a, b)$, найдём, что равенство площадей правого и левого сопутствующих четырёхугольников достигается для точек, лежащих на прямых $a=1$, $b=1$, $a-b=0$, $a+b=2$ и на гиперболе

$$2a^2+5ab+2b^2+a+b-1=0.$$

Нетрудно убедиться, что ни одна из точек гиперболы (по традиции) не входит в область допустимых местоположений вершины D. Зато каждая из прямых имеет участок (луч или отрезок), лежащий в этой области. В результате получаем, что $q_R=q_L$, когда вершина D лежит на отрезке или на одном из трёх лучей, выделенных на рис. 8 зелёным цветом. Легко видеть, что расположение вершины на лучах, содержащих стороны параллелограмма, соответствует случаю, когда исходный четырёхугольник является трапецией (или параллелограммом). Если же вершину D взять на луче OD_0 или на отрезке A_2C_2 (и только в этом случае), по крайней мере одна из диагоналей исходного четырёхугольника будет делиться пополам точкой пересечения диагоналей.

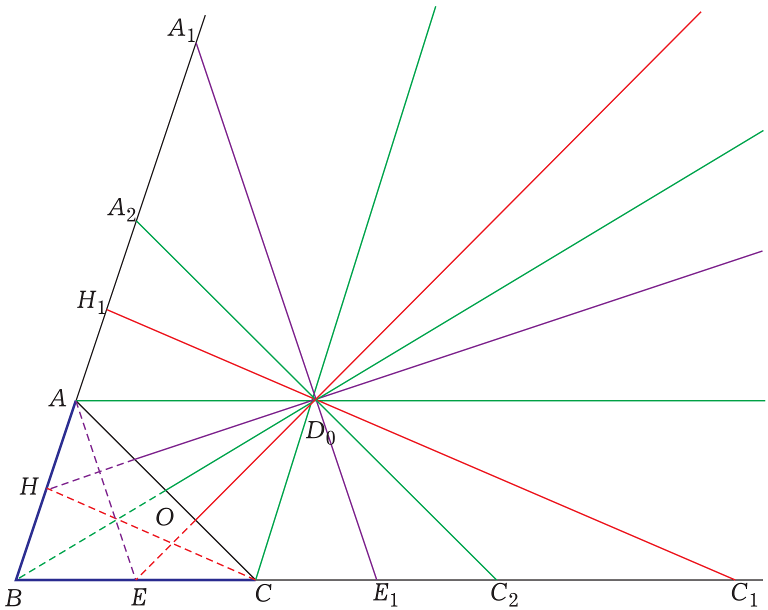


Рис. 8

Широко известно: для того, чтобы четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, был параллелограммом, необходимо и достаточно выполнение любых двух из следующих четырёх условий: 1) $AB \parallel CD$; 2) $AD \parallel BC$; 3) $AO = CO$; 4) $BO = DO$. Для того, чтобы площади правого и левого сопутствующих четырёхугольников данного выпуклого четырёхугольника были равны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из четырёх вышеперечисленных условий.

Из наших рассуждений (и особенно наглядно из рис. 8) следует, что условие $q_R = q_L = 5$ выполняется в том и только в том случае, когда исходный четырёхугольник – параллелограмм. Поэтому мы получили ещё один признак параллелограмма. С учётом того, что 5 – наименьшее возможное значение q_R и q_L, этот признак может быть сформулирован в более эффектном виде: *выпуклый четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда сумма площадей его сопутствующих четырёхугольников составляет* $2/5$ *от площади исходного четырёхугольника.*

Вопросы для самостоятельного исследования.

• Какие из полученных результатов останутся в силе, если отказаться от требования выпуклости исходного четырёхугольника?

• Можно ли интерпретировать хотя бы часть из полученных результатов так, чтобы они оказались верны для самопересекающихся четырёхугольников?

• Каким будет диапазон изменения отношения площади исходного выпуклого четырёхугольника к сопутствующему, если в качестве сопутствующего рассматривать четырёхугольник, определённый в задаче 2 статьи [1]?

Примечания редактора. Задача, о которой рассказано в статье, имеет сравнительно давнюю историю. Наиболее известен случай, когда $ABCD$ – квадрат (параллелограмм) и для которого $q_R = q_L = 5$; соответствующая задача включена во многие пособия и сборники задач для школьников.

О двойном неравенстве $5 \le q_R < 6$ для выпуклых четырёхугольников упоминается в книге: Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1974. В этой книге в комментариях к задаче 43 говорится:

«Пусть $Ч \equiv ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, A_1, B_1, C_1 и D_1 – середины его сторон BC, CD, DA и AB, $ч$ – четырёхугольник, ограниченный прямыми AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, S и s – площади четырёхугольников $Ч$ и $ч$. Требуется доказать, что

$$\frac{1}{6}S \le s \le \frac{1}{5}S.$$

Эта задача была поставлена в 1943 г. румынским математиком Т. Поповичи (T. Popoviciu); она была напечатана в румынском журнале Gazeta Matematica, однако решение её никогда, видимо, не публиковалось. (Нетрудно видеть, что $s = \frac{1}{5}S$, если $ABCD$ параллелограмм; $s = \frac{1}{6}S$ – для вырожденного «четырёхугольника» $ABCD$, две вершины которого совпадают.)»

В 2005-м году ученик 11-го класса Армен Бекларян школы имени А.Н. Колмогорова (СУНЦ МГУ) выполнил научно-исследовательскую работу, в которой рассмотрел более общую ситуацию; о полученных им результатах он рассказал на Школьных Харитоновских чтениях и стал их лауреатом. Одним из полученных им результатов является следующая теорема.

Теорема. Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 – такие точки на сторонах BC, CD, DA и AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ площади S, что

$$CA_1 : CD = DB_1 : DA = AC_1 : AB = \\ = BD_1 : DC = \alpha,\ 0 < \alpha < 1.$$

Тогда

$$S\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha^2 - \alpha + 1} < s(\alpha) \le S\frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha^2},$$

где $s(\alpha)$ – площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

При $\alpha = 0{,}5$ это неравенство превращается в неравенство $5 \le q_L < 6$, рассмотренное в статье.

Литература

1. *Заславский А.* Аффинная геометрия//Квант. – 2009. – №1, с. 8 – 12.