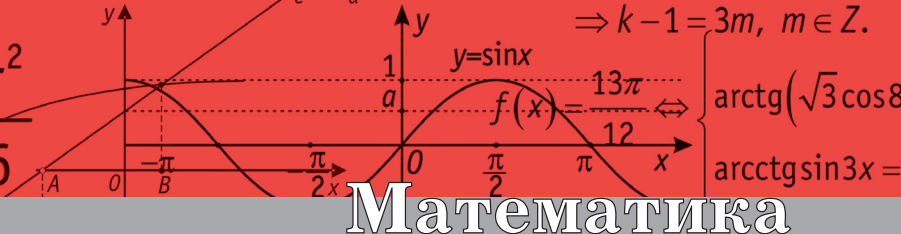


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Колесникова Софья Ильинична

Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».

Сложные задачи олимпиад МФТИ

Необходимость написания статьи возникла в связи с тем, что теперь обучение и экзамены по программам базового и профильного уровней проводятся отдельно. Если раньше сложные задачи решали олимпиадники и медалисты, то теперь такие задачи желательно освоить как можно большему числу учащихся профильного уровня.

В статье рассматриваются *подробные* решения задач, которые были на вступительных экзаменах или олимпиадах, проводимых в МФТИ в разные годы. Решения *всех* задач отличаются от тех, которые приводятся составителями в соответствующих источниках. Все решения алгоритмические и оформлены с помощью равносильных преобразований. Они опираются на приводимые в тексте правила и равносильные соотношения, которые подробно описаны в учебных пособиях автора.

Обращаем внимание на то, что решения кажутся громоздкими, но на самом деле это потому, что в них приведены *все* вычисления. В литературе часто даны лишь указания, при выполнении которых получится ещё больше вычислений. Не надо читать сразу все задачи – они *разные*. Можно разбирать отдельно любую интересующую вас задачу.

Статья состоит из двух частей: иррациональные неравенства (часть 1) и показательные и логарифмические неравенства (часть 2). В той и другой частях могут встретиться неравенства с модулем.

В этом номере мы публикуем первую часть, она доступна школьникам, начиная с конца 9-го класса. В следующих номерах появится часть вторая, доступная тем, кто знаком с показательными функциями и логарифмами.

Часть 1. Иррациональные неравенства

Будем рассматривать только те неравенства, которые могут быть записаны в виде $F(x) \geq 0$ (≤ 0), где в функции $F(x)$ присутствуют множители:

$$(|f(x)| - |g(x)|), (\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)})$$

и т. д. Поэтому знак $F(x)$ определяется знаками таких сомножителей.

Условия равносильности. Запишем сначала хорошо известные (но, к сожалению, не так часто применяемые) условия равносильности для модулей.

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases} \quad (\text{УРМ 1})$$

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases} \quad (\text{УРМ 2})$$

Менее известно школьникам следующее правило:

Знак разности модулей

$$|f(x)| - |g(x)| \quad (\text{ПМ})$$

совпадает со знаком произведения

$$(f(x) + g(x))(f(x) - g(x)).$$

Заметим, что в роли $|f(x)|$ или $|g(x)|$ могут выступать просто неотрицательные функции $f(x)$ или $g(x)$.

Роль сопряжённых выражений

При рассмотрении скобок, содержащих корни, важную роль играют так называемые *сопряжённые* выражения, при умножении на которые исчезают корни. В наших задачах выражение в скобках может принимать как положительные, так и отрицательные значения, но сопряжённые выражения, как правило, при этом принимают неотрицательные или положительные значения – поэтому при умножении скобки на сопряжённое выражение, во-первых, исчезает корень, а, во-вторых, сохраняется знак неравенства. Можно сформулировать это в виде следующих правил.

Знак разности

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$$

совпадает со знаком разности

$$f(x) - g(x) \text{ в ОДЗ.} \quad (\text{ПК 1})$$

Или при $g(x) \geq 0$ знак разности

$$\sqrt{f(x)} - g(x)$$

совпадает со знаком разности

$$f(x) - g^2(x) \text{ в ОДЗ.} \quad (\text{ПК 2})$$

Отсюда, например, сразу следует:

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \geq 0 \text{ } (\leq 0) \Leftrightarrow \text{ОДЗ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ h(x) > 0 \text{ } (< 0), \end{cases} \quad (\text{УРК 1})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \frac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} \geq 0 \text{ } (\leq 0). \end{cases}$$

Заметим, что в литературе это неравенство решается совсем по-другому.

При решении неравенств вида

$$f(x)\sqrt{g(x)} \geq 0 \text{ } (\leq 0) \text{ или } \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geq 0,$$

как выясняется, школьники очень часто *ошибаются*. Типичная ошибка состоит в том, что они считают, что

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

теряя иногда при этом решения уравнения $f(x) = 0$. Ведь $f(x) = 0$ должно быть выполнено при условии, что $g(x) \neq 0$, а знак $g(x)$ при этом может быть любым!

В литературе для неравенств вида

$$g(x)\sqrt{f(x)} \geq 0 (\leq 0)$$

$$\text{или } \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geq 0 (\leq 0),$$

где, как правило, $g(x)$ – рациональная функция, также неоднократно встречаются ошибочные условия равносильности. Поэтому на самом деле

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0; \end{cases} \quad (\text{УРК 2})$$

$$g(x)\sqrt{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0; \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (\text{УРК 3})$$

Пример 1. Решите неравенство

$$\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < -1.$$

Решение. Найдём сначала ОДЗ*. ОДЗ* отличается от ОДЗ тем, что мы не пишем ограничение, что знаменатель не равен 0, потому что будем работать методом интервалов для рациональных функций, где нули знаменателя обозначаются «дырками».

Итак, ОДЗ*:

$$x^2 + 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty).$$

Приведём дробь к стандартному виду $F(x) \geq 0 (\leq 0)$, а затем воспользуемся (УРК 1):

$$\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+3x-4} - (2x-4)}{x-3} < 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \begin{cases} 2x-4 < 0 \left(\Rightarrow \begin{array}{l} \text{числитель} \\ \text{положителен} \end{array} \right), \\ x-3 < 0; \end{cases} \\ 2x-4 \geq 0 \left(\Rightarrow \begin{array}{l} \sqrt{x^2+3x-4} + \\ + (2x-4) > 0 \end{array} \right), \\ \frac{x^2+3x-4-(2x-4)^2}{x-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq 2, \\ \frac{(x-5)\left(x-\frac{4}{3}\right)}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \in [2; 3) \cup (5; +\infty). \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ*, получаем, что $x \in (-\infty; -4] \cup [1; 3) \cup (5; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; -4] \cup [1; 3) \cup (5; +\infty)$.

Примечание. Мы привели решение с комментариями и пояснениями. При оформлении работы в ЕГЭ достаточно ограничиться только равносильными преобразованиями.

Пример 2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^3-22x^2+40x}}{x-4} \geq 3x-10.$$

Решение. Найдём сначала ОДЗ*:

$$3x^3 - 22x^2 + 40x =$$

$$= x(x-4)(3x-10) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{10}{3}\right] \cup [4; +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)(3x-10) \geq 0$$

в ОДЗ*.

Замечаем, что $x \geq 0$ в ОДЗ*, поэтому существует $\sqrt{x}$ и можно записать

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x(3x-10)(x-4)} - (3x-10)(x-4)}{x-4} \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{=} \\ & \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{=} \frac{\sqrt{(x-4)(3x-10)}}{x-4} \times \\ & \times \left(\sqrt{x} - \sqrt{3x^2 - 22x + 40} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \left(\text{т. к. } \sqrt{x} + \sqrt{3x^2 - 22x + 40} > 0 \right) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3}, \\ \frac{x - 3x^2 + 22x - 40}{x - 4} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

(Мы воспользовались тем, что знак разности квадратных корней в ОДЗ* совпадает со знаком разности подкоренных выражений, или просто умножили на положительное сопряжённое выражение

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} + \sqrt{3x^2 - 22x + 40} > 0.) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3}, \\ x \in \left(-\infty; \frac{8}{3}\right] \cup (4; 5] \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{8}{3}\right] \cup \left\{\frac{10}{3}\right\} \cup (4; 5]. \end{aligned}$$

Учтём ОДЗ* и получим

$$\text{Ответ. } \left[0; \frac{8}{3}\right] \cup \left\{\frac{10}{3}\right\} \cup (4; 5].$$

Пример 3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^3 - 22x^2 + 60x}}{x - 6} \geq 2x - 10.$$

$$\text{Ответ. } [0; 4] \cup \{5\} \cup (6; 7,5].$$

Пример 4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{\left|x^2 - 7x + 6\right| - \left|x^2 - x - 2\right|} \geq 0.$$

Решение. Воспользуемся правилом (ПМ) и условием равносильности (УРК 2):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{\left|x^2 - 7x + 6\right| - \left|x^2 - x - 2\right|} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x + 6 = 0, \\ \left|x^2 - 7x + 6\right| - \left|x^2 - x - 2\right| \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x + 6 \geq 0, \\ \left|x^2 - 7x + 6\right| - \left|x^2 - x - 2\right| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, x = 3, \\ x \in [-2; 3], \\ \left(\left(x^2 - 7x + 6\right) + \left(x^2 - x - 2\right)\right) \times \\ \times \left(\left(x^2 - 7x + 6\right) - \left(x^2 - x - 2\right)\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, x = 3, \\ x \in [-2; 3], \\ \left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - (2 + \sqrt{2})\right) \times \\ \times \left(x - (2 - \sqrt{2})\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in [-2; 2 - \sqrt{2}) \cup \left(\frac{4}{3}; 3\right]. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } [-2; 2 - \sqrt{2}) \cup \left(\frac{4}{3}; 3\right].$$

Примечание. Неправильное соотношение

$$\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

в этом примере, между прочим, даёт верный ответ, потому что уравнение $g(x) = 0$ выполнено именно в промежутке, где $f(x) > 0$.

Пример 5. Найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все решения неравенства

$$\frac{\sqrt{(3-x)(x+15)}}{x+7} \geq 0.$$

Решение. Используя (УРК 2), решим заданное неравенство:

$$\frac{\sqrt{(3-x)(x+15)}}{x+7} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -15, \\ x = 3, \\ \begin{cases} (3-x)(x+15) > 0, \\ x+7 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-15\} \cup (-7; 3].$$

Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения неравенства, равна $3 - (-15) = 18$.

Ответ. 18.

Примечание. Как видим, в этом примере, в отличие от предыдущего, $x = -15$ является решением, но не удовлетворяет условию $x + 7 > 0$.

Пример 6. Решите неравенство $\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \cdot (8x^2 - 6x + 1) \geq 0$.

$$\text{Ответ. } \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right] \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}.$$

Пример 7. Решите неравенство

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 - 3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}.$$

Решение. ОДЗ*:

$$x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty).$$

$$\frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 3x}) - 2}{4 - (x^2 - 3x)} \leq 0$$

$$(\text{т. к. } \left(\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 3x}}{+ \sqrt{x^2 - 3x}} + 2 > 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - 2x + 4 + x^2 - 3x}{x^2 - 3x - 4} + \frac{2\sqrt{x^2 - 2x + 4}\sqrt{x^2 - 3x}}{x^2 - 3x - 4} - \frac{4}{x^2 - 3x - 4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{\left((2x - 5)x + 2\sqrt{(x^2 - 2x + 4)(x - 3)x} \right)}{(x + 1)(x - 4)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \quad (\text{т. к. } (2x - 5)x \geq 0 \text{ в ОДЗ*}) \\ & \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ (x + 1)(x - 4) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (4; +\infty) \subset \text{ОДЗ*}.$$

Ответ. $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (4; +\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 + 3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}}.$$

Ответ. $(-\infty; -4) \cup \{-3\} \cup (1; +\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 4} < \frac{1}{2|x + 6| - 5}.$$

Решение. *Первый способ.* Найдём ОДЗ*:

$$x^2 + 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty).$$

Проведём в ОДЗ* преобразование. Воспользуемся тем, что знак разности модулей $|f| - |g|$ совпадает со знаком произведения

$$(f + g)(f - g),$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 4} < \frac{1}{2|x + 6| - 5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 1) - 2|x + 6|}{(\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 4)(2|x + 6| - 5)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 1) - 2|x + 6|}{(x + 7)(x - 3)\left(x + \frac{17}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0.$$

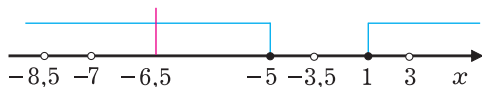


Рис. 1

1. Рассмотрим случай $x + 6 \geq 0$. Тогда

$$\frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 1) - 2|x + 6|}{(x + 7)(x - 3)\left(x + \frac{17}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2(x + 5,5)}{(x + 7)(x - 3)\left(x + \frac{17}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2(x + 5,5)}{(x - 3)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{а) } x + 5,5 < 0 &\Leftrightarrow x \in [-6; -5,5) \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 7 > 0, x - 3 < 0, x + \frac{17}{2} > 0, x + \frac{7}{2} < \\ < 0, \sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2(x + 5,5) > 0. \end{aligned}$$

Неравенство выполнено и

$$x \in [-6; -5,5).$$

б) Теперь пусть $x + 5,5 \geq 0$. Тогда

$$\frac{x^2 + 4x - 5 - 4\left(x^2 + 11x + \frac{121}{4}\right)}{(x - 3)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 40x + 126}{(x - 3)\left(x + \frac{7}{2}\right)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2(x + 5,5)}{(x - 3)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \frac{\left(x - \frac{-20 - \sqrt{22}}{3}\right)\left(x - \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right)}{(x - 3)\left(x + \frac{7}{2}\right)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}}{(x - 3)\left(x + \frac{7}{2}\right)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x \in \left[-5,5; \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right) \cup (-3,5;3) &\stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Rightarrow} \\ \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Rightarrow} x \in \left[-5,5; \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right) \cup [1;3). \end{aligned}$$

2. Теперь рассмотрим случай

$$x + 6 < 0 \Rightarrow x + \frac{7}{2} < 0, x - 3 < 0.$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} + (2x + 13)}{(x + 7)(x - 3)\left(x + \frac{17}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} + (2x + 13)}{(x + 7)\left(x + \frac{17}{2}\right)} > 0.$$

а) Пусть

$$x + 6,5 > 0 \Rightarrow x + 7 > 0, x + 8,5 > 0.$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} + (2x + 13)}{(x + 7)\left(x + \frac{17}{2}\right)} \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} x \in (-6,5; -6).$$

б) Пусть $x + 6,5 \leq 0$. Тогда

$$\frac{x^2 + 4x - 5 - (4x^2 + 52x + 169)}{(x + 7)\left(x + \frac{17}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 16x + 58}{(x+7)\left(x + \frac{17}{2}\right)} < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x - (-8 - \sqrt{6}))\left(x - (-8 + \sqrt{6})\right)}{(x+7)\left(x + \frac{17}{2}\right)} < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in (-8 - \sqrt{6}; -8,5) \cup (-7; -8 + \sqrt{6}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x \in (-8 - \sqrt{6}; -8,5) \cup (-7; -6,5].
 \end{aligned}$$

Объединив все случаи

$$\begin{aligned}
 x \in &(-8 - \sqrt{6}; -8,5) \cup (-7; -6,5] \cup \\
 &\cup (-6,5; -6) \cup [-6; -5,5) \cup \\
 &\cup \left[-5,5; \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right) \cup [1; 3),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 4} &< \frac{1}{2|x+6| - 5} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 1) - 2|x+6|}{(\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 4)(2|x+6| - 5)} > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 1 + 2x + 12)(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 1 - 2x - 12)}{(x^2 + 4x - 5 - 16)(2x + 12 + 5)(2x + 12 - 5)} > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 2x + 13)(\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x - 11)}{(x^2 + 4x - 21)(2x + 17)(2x + 7)} > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{(x+5)(x-1)} + 2\left(x + \frac{13}{2}\right)\right)\left(\sqrt{(x+5)(x-1)} - 2\left(x + \frac{11}{2}\right)\right)}{(x+7)(x-3)\left(x + \frac{17}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0.
 \end{aligned}$$

Выражение очень громоздкое. Отметим для удобства исследования

получаем:

Ответ.

$$\left(-8 - \sqrt{6}; -\frac{17}{2}\right) \cup \left(-7; \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right) \cup [1; 3).$$

Второй способ. Проведём в ОДЗ* преобразования. Воспользуемся тем, что знак разности модулей $|f| - |g|$ совпадает со знаком произведения $(f+g)(f-g)$, а

$$\begin{aligned}
 &(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 1) - 2|x+6| \equiv \\
 &\equiv \left|\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 1\right| - |2x + 12|.
 \end{aligned}$$

Умножим также знаменатель на положительное в ОДЗ сопряжённое выражение $\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 4$:

на числовой оси все интересующие нас «особые» точки:

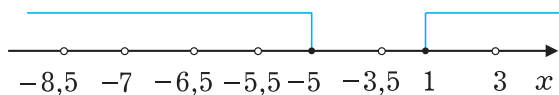


Рис. 2

Теперь рассмотрим отдельно промежутки, на которых, по крайней

мере, одна скобка, содержащая корень, сохраняет знак:

$$1) x + \frac{13}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 2x + 13 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 11 < 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Rightarrow} \begin{cases} x - 3 < 0, & 2x + 7 < 0, \\ \sqrt{(x+5)(x-1)} - (2x+11) > 0, \\ \sqrt{(x+5)(x-1)} - 2\left(x + \frac{13}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 2\left(x + \frac{13}{2}\right)\right)}{(x+7)(x-3)\left(x + \frac{17}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right)} \times \\ & \times \left(\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2\left(x + \frac{11}{2}\right)\right) > 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \\ & \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} + 2\left(x + \frac{13}{2}\right)}{(x+7)\left(x + \frac{17}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x - 5 - 4x^2 - 52x - 169}{(x+7)\left(x + \frac{17}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

(умножили на положительное сопряжённое выражение

$$\sqrt{(x+5)(x-1)} - 2\left(x + \frac{13}{2}\right))$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + (2x+13)\right)\left(\sqrt{x^2 + 4x - 5} - (2x+11)\right)}{(x+7)(x-3)\left(x + \frac{17}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \\ & \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - (2x+11)}{(x-3)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \frac{x^2 + 4x - 5 - 4x^2 - 44x - 121}{(x-3)\left(x + \frac{7}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{-20 - \sqrt{22}}{3}\right)\left(x - \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right)}{(x-3)\left(x + \frac{7}{2}\right)} < 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

(умножили на положительное сопряжённое выражение

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} + (2x+11))$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - (-8 - \sqrt{6})\right)\left(x - (-8 + \sqrt{6})\right)}{(x+7)\left(x + \frac{17}{2}\right)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-8 - \sqrt{6}; -\frac{17}{2}\right) \cup \left(-7; -8 + \sqrt{6}\right).$$

Видно, что решение принадлежит ОДЗ*. Учитывая условие $x \leq -\frac{13}{2}$, получаем, что

$$x \in \left(-8 - \sqrt{6}; -\frac{17}{2}\right) \cup \left(-7; -\frac{13}{2}\right].$$

$$2) -\frac{13}{2} < x < -\frac{11}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\begin{cases} 2x + 13 > 0, & 2x + 11 < 0, \\ x - 3 < 0, & x + \frac{7}{2} < 0, & x + \frac{17}{2} > 0, & x + 7 > 0, \\ \sqrt{x^2 + 4x - 5} + (2x+13) > 0, \\ \sqrt{x^2 + 4x - 5} - (2x+11) > 0, \end{cases}$$

и неравенство выполнено в ОДЗ*.

$$3) x \geq -\frac{11}{2} \Leftrightarrow 2x + 11 \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x + 13 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 5} + (2x+13) > 0,$$

$$x + 7 > 0, x + \frac{17}{2} > 0. \text{ Тогда}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{-20 - \sqrt{22}}{3}; \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right) \cup \left(-\frac{7}{2}; 3\right).$$

Учитывая условие $x \geq -\frac{11}{2}$ и ОДЗ*,

получаем, что

$$x \in \left[-\frac{11}{2}; \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right) \cup [1; 3).$$

Теперь объединим три рассмотренных случая:

$$x \in \left(-8 - \sqrt{6}; -\frac{17}{2}\right) \cup \left(-7; \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right) \cup [1; 3).$$

Ответ.

$$\left(-8 - \sqrt{6}; -\frac{17}{2}\right) \cup \left(-7; \frac{-20 + \sqrt{22}}{3}\right) \cup [1; 3).$$

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8} - 4} < \frac{1}{2|x - 5| - 5}.$$

Ответ.

$$(-\infty; -4) \cup (-4; -2] \cup [4; 6) \cup (6; 7, 5) \cup (7, 5; +\infty).$$

Пример 11. Решите неравенство

$$\frac{|x^2 - 5x + 6| + |9 - 2x| - 5}{\sqrt{19x^2 - 4x^3 - 4x + 19}} \leq 0.$$

Решение.

$$\frac{|x^2 - 5x + 6| + |9 - 2x| - 5}{\sqrt{19x^2 - 4x^3 - 4x + 19}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x^2 - 5x + 6| + |9 - 2x| - 5}{\sqrt{(19 - 4x)(x^2 + 1)}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{19}{4}, \\ |x^2 - 5x + 6| + |9 - 2x| - 5 \leq 0. \end{cases}$$

Решим неравенство:

$$|x^2 - 5x + 6| + |9 - 2x| - 5 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 5x + 6| \leq 5 - |9 - 2x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \leq 5 - |9 - 2x|, \\ x^2 - 5x + 6 \geq -5 + |9 - 2x| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2x \leq -x^2 + 5x - 1, \\ 9 - 2x \geq x^2 - 5x + 1 \\ 9 - 2x \leq x^2 - 5x + 11, \\ 9 - 2x \geq -x^2 + 5x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2; 5], \\ x \in \left[\frac{3 - \sqrt{41}}{2}; \frac{3 + \sqrt{41}}{2}\right], \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty), \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[2; \frac{3 + \sqrt{41}}{2}\right] \Rightarrow x < \frac{19}{4}.$$

Ответ. $\left[2; \frac{3 + \sqrt{41}}{2}\right).$

Пример 12. Решите неравенство

$$\frac{|x^2 - 3x + 2| + |2x + 1| - 5}{\sqrt{4x^3 + 3x^2 + 4x + 3}} \leq 0.$$

Ответ. $\left[\frac{5 - \sqrt{41}}{2}; 2\right).$

Пример 13. Решите неравенство

$$\frac{(\sqrt{x + 3} + x - 3)(\sqrt{4x + 5} + x - 4)}{\sqrt{4 + 4x - x^2 - x^3}} \leq 0.$$

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 4x + 5 \geq 0, \\ 4 + 4x - x^2 - x^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1; 2) \Rightarrow \begin{cases} x - 3 < 0, \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{(\sqrt{x + 3} + x - 3)(\sqrt{4x + 5} + x - 4)}{\sqrt{4 + 4x - x^2 - x^3}} \leq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x + 3} + (x - 3)) \times$$

$$\times (\sqrt{4x+5} + (x-4)) \leq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (x+3-x^2+6x-9) \times$$

$$\times (4x+5-x^2+8x-16) \leq 0 \Leftrightarrow$$

(умножили числитель на положительные сопряжённые выражения, так как

$$\sqrt{x+3} - (x-3) > 0,$$

$$\sqrt{4x+5} - (x-4) > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-6)(x-11) \leq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=1 \in \text{ОДЗ}.$$

Ответ. 1.

Пример 14. Решите неравенство

$$\frac{(\sqrt{4-x} - (x+2))(\sqrt{9-4x} - (x+3))}{\sqrt{(x+1)(x-2)(x-3)}} \leq 0.$$

Ответ. 0.

Пример 15. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+5}} \geq \frac{1}{2+x}.$$

Решение. Найдём ОДЗ*:

$$x^2-6x+5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty).$$

Приведём неравенство к стандартному виду и решим его:

$$\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+5}} \geq \frac{1}{2+x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-6x+5} - (2+x)}{(2+x)\sqrt{x^2-6x+5}} \leq 0 \stackrel{\text{ОДЗ*}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ*}}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{x^2-6x+5} - (x+2)}{x+2} \leq 0 \stackrel{\text{ОДЗ*}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{\text{ОДЗ*}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2 < 0; \\ x+2 > 0, \\ \left(\sqrt{x^2-6x+5}\right)^2 - (x+2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2); \\ \begin{cases} x > -2, \\ 10x-1 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2); \\ x \geq 0, 1. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ*, получаем, что

$$x \in (-\infty; -2) \cup \left[\frac{1}{10}; 1\right) \cup (5; +\infty).$$

$$\text{Ответ. } (-\infty; -2) \cup \left[\frac{1}{10}; 1\right) \cup (5; +\infty).$$

Литература

1. Колесникова С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому Государственному экзамену – М.: Айрис-Пресс (можно скачать из Интернета).
2. Математика. Решение сложных задач Единого Государственного экзамена (рубрика «Домашний репетитор»). – М.: Айрис-Пресс.
3. Колесникова С.И. Иррациональные уравнения // Потенциал – 2005, №1.
4. Колесникова С.И. Иррациональные неравенства // Потенциал. Математика. Физика. Информатика. – 2005, №2.
5. Колесникова С.И. Иррациональные уравнения. ЕГЭ. Математика. – М.: Азбука, 2010.
6. Колесникова С.И. Иррациональные неравенства. ЕГЭ. Математика. – М.: Азбука, 2010.
7. Колесникова С.И. Уравнения и неравенства, содержащие модули. ЕГЭ. Математика. – М.: Азбука, 2010.