



Колесникова Софья Ильинична

Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».



Сложные задачи олимпиад МФТИ

В предыдущем номере журнала была опубликована первая часть статьи, касающаяся иррациональных неравенств. Во второй части рассматриваются показательные и логарифмические неравенства, а также несколько логарифмических уравнений, которые предлагались в разные годы на олимпиадах МФТИ. Решения всех задач отличны от тех, которые приводятся составителями в соответствующих источниках.

Часть 2. Показательные и логарифмические неравенства

При решении задач используются следующие правила и определения, которые можно найти в пособиях автора [1 – 3].

Показательные неравенства

(ПП 1)	Знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.
(ПП 2)	Знак разности $a^{f(x)} - 1$ совпадает со знаком произведения $(a-1)f(x)$ в ОДЗ.
(О 1)	По определению полагают, что для любого $c > 0, c \neq 1$ $a(x)^{f(x)} = c^{f(x) \log_c a(x)}$.
(ПП 3)	Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.

(ПП 4)	Знак разности $a(x)^{f(x)} - 1$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)f(x)$ в ОДЗ.
--------	--

Логарифмические неравенства

(ПЛ 1)	Знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a - 1)(f(x) - g(x))$ в ОДЗ.
(ПЛ 2)	Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a - 1)(f(x) - 1)$ в ОДЗ.
(О 2)	По определению полагают, что для любого $c > 0, c \neq 1$ $\log_{a(x)} f(x) = \frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}.$
(ПЛ 3)	Знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - g(x))$ в ОДЗ.
(ПЛ 4)	Знак $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - 1)$ в ОДЗ.

При оформлении задач мы часто ссылаемся на приведённые выше правила, а иногда в скобках явно формулируем свойства и факты, на которые опираемся при равносильных переходах. Это делается для лучшего понимания школьниками производимых равносильных переходов. При оформлении работы на ЕГЭ этого можно не делать, а просто написать знак равносильности (без всяких пояснений).

Пример 1. Решите неравенство

$$x \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 2^{\frac{1}{x}} \right) > 1.$$

Решение. Пример очень интересный, так как, во-первых, при решении школьники приводили правую

часть к виду $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$, поделив обе

части на x . При этом многие забыли, что x может быть как положительным, так и отрицательным, и в последнем случае надо *изменить* знак неравенства.

Во-вторых, мы воспользуемся при решении сразу двумя условиями равносильности: (ПЛ 3) и (ПП 3).

Решать будем так, что нам не надо будет отдельно рассматривать случаи $x > 0$ и $x < 0$:

$$x \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 2^{\frac{1}{x}} \right) > 1 \Leftrightarrow$$

$$x \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 2^{\frac{1}{x}} \right) > \frac{x}{x} \Leftrightarrow$$

$$x \left(\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 2^{\frac{1}{x}} \right) - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \right) > 0 \stackrel{(\text{ПЛ } 3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2} > 2^x, \\ x \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{5}{2} - 2^x - \left(\frac{1}{2} \right)^x \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 > \frac{\log_{2,5} 2}{x} \Leftrightarrow \frac{x - \log_{2,5} 2}{x} > 0, \quad (\text{ПЗ 3}) \\ x \left(\frac{1}{2^x} - 2 \right) \left(\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2} \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (\log_{2,5} 2; +\infty), \\ x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{x} + 1 \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (\log_{2,5} 2; +\infty), \\ \frac{(x+1)(x-1)}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (\log_{2,5} 2; 1).$$

Ответ. $(-\infty; -1) \cup (\log_{2,5} 2; 1).$

Пример 2. Решите неравенство

$$4 \log_{2|x|+1} \sqrt{5x+3} - \log_{\sqrt{5x+3}} (2|x|+1) > 0.$$

Решение. Найдём сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} 2|x|+1 \neq 1, \\ 5x+3 > 0, \\ 5x+3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-0,6; -0,4) \cup (-0,4; 0) \cup (0; +\infty).$$

Теперь приведём все логарифмы к постоянному основанию, левую часть к стандартному виду и затем воспользуемся (ПЛ 1) и (ПЛ 2):

$$\begin{aligned} & 4 \log_{2|x|+1} \sqrt{5x+3} - \\ & - \log_{\sqrt{5x+3}} (2|x|+1) > 0 \quad \text{ОДЗ} \\ & \frac{\lg(5x+3)}{\lg(2|x|+1)} - \frac{\lg(2|x|+1)}{\lg(5x+3)} > 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\lg(5x+3) - \lg(2|x|+1))}{\lg(2|x|+1) \cdot \lg(5x+3)} \times \\ & \times (\lg(5x+3) + \lg(2|x|+1)) > 0 \Leftrightarrow \\ & \frac{((5x+3) - (2|x|+1))}{2|x|(5x+2)} \times \\ & \times ((5x+3)(2|x|+1) - 1) > 0 \Leftrightarrow \\ & \frac{(5x+2-2|x|)(10x|x|+6|x|+5x+2)}{5x+2} > 0. \end{aligned}$$

Придётся рассмотреть два случая: $x > 0$ и $x < 0$.

$$1) x > 0: \frac{(3x+2)(10x^2+11x+2)}{5x+2} > 0$$

неравенство выполнено.

$$2) x < 0: \frac{(7x+2)(10x^2+x-2)}{5x+2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x + \frac{2}{7}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{2}{5}\right)}{x + \frac{2}{5}} < 0 \Leftrightarrow$$

$$(-0,5; -0,4) \cup \left(-\frac{2}{7}; 0,4\right).$$

Учтём оба случая и ОДЗ:

$$x \in (-0,5; -0,4) \cup \left(-\frac{2}{7}; 0\right) \cup (0; +\infty).$$

Ответ.

$$(-0,5; -0,4) \cup \left(-\frac{2}{7}; 0\right) \cup (0; +\infty).$$

Пример 3. Решите неравенство

$$\begin{aligned} & \log_8 \left(\frac{1}{3} - x \right) \log_{\left| 2x + \frac{1}{3} \right|} \left(\frac{1}{3} - x \right) > \\ & > \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3} - x \right)}{\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Решение. Неравенство громоздкое, поэтому ОДЗ найдём отдельно:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - x > 0, \\ 2x + \frac{1}{3} \neq 0, \Leftrightarrow \\ 2x + \frac{1}{3} \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right).$$

Подготовим неравенство к применению классического метода интервалов. Приведём все логарифмы к одному основанию. Здесь нас подстерегает несколько «подводных камешков»:

1) при приведении логарифмов к одному основанию обратим внимание на то, что

$$\log_2 \sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|.$$

Обратите внимание – возник модуль, так как

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2} &= \frac{1}{3} \log_2 \left(2x + \frac{1}{3}\right)^2 = \\ &= \frac{2}{3} \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|; \end{aligned}$$

2) после разложения квадратного трёхчлена относительно

$\log_2 \left(\frac{1}{3} - x\right)$ на множители заметим,

что так как $\frac{1}{3} - x > 0$ в ОДЗ, имеем

$$\left(\frac{1}{3} - x\right) - \left|2x + \frac{1}{3}\right| \equiv \left|\frac{1}{3} - x\right| - \left|2x + \frac{1}{3}\right|, \text{ а}$$

поэтому можно воспользоваться тем, что знак разности модулей $|f| - |g|$ совпадает со знаком произведения $(f+g)(f-g)$ в ОДЗ.

Итак,

$$\begin{aligned} &\log_8 \left(\frac{1}{3} - x\right) \log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left(\frac{1}{3} - x\right) > \\ &> \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3} - x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2}} \Leftrightarrow \\ &\frac{1}{3} \frac{\log_2^2 \left(\frac{1}{3} - x\right)}{\log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|} > \\ &> \log_2 \left(\frac{1}{3} - x\right) - \frac{2}{3} \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right| \Leftrightarrow \\ &\frac{\log_2^2 \left(\frac{1}{3} - x\right) + 2 \log_2^2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|}{\log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|} - \\ &- \frac{3 \log_2 \left(\frac{1}{3} - x\right) \cdot \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|}{\log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|} > 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{\left(\log_2 \left(\frac{1}{3} - x\right) - \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|\right)}{\log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|} \times \\ &\times \left(\log_2 \left(\frac{1}{3} - x\right) - 2 \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right|\right) > 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \\ &\frac{\left(\left(\frac{1}{3} - x\right) - \left|2x + \frac{1}{3}\right|\right) \left(\left(\frac{1}{3} - x\right) - \left|2x + \frac{1}{3}\right|^2\right)}{\left|2x + \frac{1}{3}\right| - 1} > \\ &> 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} - x > 0 \text{ в ОДЗ}\right) \\ &\frac{\left(\frac{1}{3} - x - 2x - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - x + 2x + \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{2}{3}\right)} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(x - \frac{1}{12}\right) \left(x + \frac{2}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x \left(x + \frac{2}{3}\right) \left(x - \frac{1}{12}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Учтём ОДЗ и получим, что

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right).$$

Ответ. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right).$

Пример 4. Решите неравенство

$$\log_{|x-2|} (9^x - 4^x) < \log_{|x-2|} (3^x + 2^x) + \\ + \log_{|x-2|} (3^{x-2} + 2^x).$$

Решение. Здесь надо применять условия равносильности для логарифмов, правила для показательной функции и для модулей.

ОДЗ*:

$$\begin{cases} |x-2| \neq 0, \\ 3^x - 2^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 2) \cup (2; +\infty).$$

Мы не записали в ОДЗ, что $|x-2| \neq 1$, так как неравенство строгое, и при применении условий равносильности это условие выполнится автоматически.

Упростим неравенство, воспользуемся (ПЛ 3), а затем умножим на положительное выражение $(|x-2|+1)$ и применим (ПП 2):

$$\log_{|x-2|} (9^x - 4^x) < \log_{|x-2|} (3^x + 2^x) + \\ + \log_{|x-2|} (3^{x-2} + 2^x) \Leftrightarrow$$

$$\log_{|x-2|} (3^x - 2^x) < \log_{|x-2|} \left(\frac{3^x}{9} + 2^x\right) \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow}$$

$$(|x-2|-1) \left(3^x - 2^x - \frac{3^x}{9} - 2^x\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2+1)(x-2-1) \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{9}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x-3)(x-2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3)$$

Учтём ОДЗ* и получим, что $x \in (0; 1) \cup (2; 3).$

Ответ. $(0; 1) \cup (2; 3).$

Пример 5. Решите неравенство

$$\log_{x^2} |5x+2| < \frac{1}{2}.$$

Решение. В этом неравенстве важно правильно сделать первый шаг – лучше умножить на 2, чтобы избавиться от модуля.

Так как неравенство коротенькое, запишем условие равносильности вместе с ОДЗ:

$$\log_{x^2} |5x+2| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x^2} (5x+2)^2 < \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 5x+2 \neq 0, \\ (x^2-1)((5x+2)^2 - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 5x+2 \neq 0, \\ (x-1)(x+1)(3x+1)(2x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1).$$

Ответ. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1).$

Пример 6. Решите неравенство

$$\log_{(1-x)^3} \left(\frac{x+6}{3+2x-x^2}\right) + \frac{1}{3} \leq 0.$$

Решение. Найдём сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1, \\ \frac{x+6}{x^2-2x-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty; -6) \cup (-1; 0) \cup (0; 1).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \log_{(1-x)^3} \left(\frac{x+6}{3+2x-x^2} \right) &= \\ = \frac{1}{3} \log_{(1-x)} \left(\frac{x+6}{3+2x-x^2} \right) \end{aligned}$$

без всяких модулей!

Тогда

$$\begin{aligned} \log_{(1-x)^3} \left(\frac{x+6}{3+2x-x^2} \right) + \frac{1}{3} &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \log_{(1-x)} \left(\frac{(x+6)(1-x)}{3+2x-x^2} \right) &\leq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \\ (1-x-1) \left(\frac{(x+6)(1-x)}{3+2x-x^2} - 1 \right) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x(7x-3)}{(x-3)(x+1)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Решаем неравенство методом интервалов и с учётом ОДЗ получаем

$$\text{Ответ. } (-\infty; -6) \cup \left(0; \frac{3}{7} \right].$$

Пример 7. Решите неравенство

$$2 \log_{2x-12} (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x}) < 1.$$

Решение. Оформим задачу без комментариев.

ОДЗ*:

$$\begin{cases} 2x-12 > 0, \\ 9-x \geq 0, \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (6; 9].$$

$$2 \log_{2x-12} (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x}) < 1 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\log_{2x-12} (x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x}+9-x) <$$

$$< \log_{2x-12} (2x-12) \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow}$$

$$(2x-12-1) \left(10-2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x}-(2x-12) \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{13}{2} \right) \left((11-x) - \sqrt{x+1}\sqrt{9-x} \right) <$$

$$< 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \text{ (так как } x < 11)$$

$$\left(x - \frac{13}{2} \right) \left((11-x)^2 - (\sqrt{x+1}\sqrt{9-x})^2 \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{13}{2} \right) (x-8)(x-7) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 6,5) \cup (7; 8).$$

Учтём ОДЗ и получим, что $x \in (6; 6,5) \cup (7; 8)$.

Ответ. $(6; 6,5) \cup (7; 8)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\log_{x^2} 9}{\sqrt{\frac{1}{2} + \log_{x^2} (x+1)} - \sqrt{\frac{3}{2}}} &\geq \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{\log_3 (x+1) - \log_9 x^4}. \end{aligned}$$

Решение. Найдём ОДЗ*, воспользуемся при этом условием равносильности (ПЛ 4):

$$2 \log_{x^2} (x+1) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ \log_{x^2} ((x+1)^2 x^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+1 > 0, x^2 \neq 0, x \neq 1, \\ (x^2-1)((x+1)^2 x^2 - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+1 > 0, x^2 \neq 0, x \neq 1, \\ (x-1)(x+1)(x^2+x-1)(x^2+x+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+1 > 0, x^2 \neq 0, x \neq 1, \\ (x-1)(x^2+x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-1; 0) \cup \left(0; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup (1; +\infty).$$

Перейдём во всех логарифмах к одному основанию и в первой дроби умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю. Тогда

$$\frac{\log_{x^2} 9}{\sqrt{\frac{1}{2} + \log_{x^2} (x+1)} - \sqrt{\frac{3}{2}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\log_3 (x+1) - \log_9 x^4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{2} \log_{x^2} 3 \cdot (\sqrt{1+2\log_{x^2} (x+1)} + \sqrt{3})}{1+2\log_{x^2} (x+1) - 3} \geq \frac{\sqrt{2} \log_{x^2} 3}{\log_{x^2} (x+1) - 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log_{x^2} 3 \cdot (\sqrt{1+2\log_{x^2} (x+1)} + \sqrt{3} - 1)}{\log_{x^2} (x+1) - 1} \geq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \frac{\log_{x^2} 3}{\log_{x^2} (x+1) - \log_{x^2} x^2} \geq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{(x^2-1)(3-1)}{(x^2-1)((x+1)-x^2)} \geq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Учтём ОДЗ* и получим, что

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \left(1; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

Ответ.

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \left(1; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

Пример 9. Решите неравенство

$$\log_{(x-1)^4} (4-x)^2 + \log_{(1-x)^2} (x+1) \leq 1.$$

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ |x-1| \neq 1, \\ x \neq 4, \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 4, \\ x+1 > 0. \end{cases}$$

$$\log_{(x-1)^4} (4-x)^2 + \log_{(1-x)^2} (x+1) \leq 1 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\log_{(x-1)^2} (x-4)^2 + \log_{(1-x)^2} (x+1)^2 \leq \log_{(x-1)^2} (x-1)^4 \Leftrightarrow$$

$$((x-1)^2 - 1)((x-4)^2(x+1)^2 - (x-1)^4) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2)((x-4)(x+1) - (x-1)^2)((x-4)(x+1) + (x-1)^2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2)(x+5)(2x^2-5x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+5)(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\text{с учётом ОДЗ}) x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup [3; 4) \cup (4; +\infty).$$

Ответ.

$$\left(-1; -\frac{1}{2}\right] \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup [3; 4) \cup (4; +\infty).$$

Пример 10. Решите неравенство

$$\log_{6-2^{2-x}} (3x^2 - 2x - 4) \geq \\ \geq \log_{1,5+2^{x-1}} (3x^2 - 2x - 4).$$

Решение. Прежде чем решать данное неравенство, надо воспользоваться определением логарифма по переменному основанию (О 2) (которого, кстати, нет в обычном учебнике), а затем уже применить правила (ПЛ 1) и (ПЛ 2):

$$\log_{6-2^{2-x}} (3x^2 - 2x - 4) \geq \\ \geq \log_{1,5+2^{x-1}} (3x^2 - 2x - 4) \Leftrightarrow \\ \frac{\lg(3x^2 - 2x - 4)}{\lg(6 - 2^{2-x})} \geq \\ \geq \frac{\lg(3x^2 - 2x - 4)}{\lg(1,5 + 2^{x-1})} \Leftrightarrow \\ \frac{\lg(3x^2 - 2x - 4)}{\lg(6 - 2^{2-x}) \cdot \lg(1,5 + 2^{x-1})} \times \\ \times (\lg(1,5 + 2^{x-1}) - \lg(6 - 2^{2-x})) \geq 0.$$

Теперь найдём ОДЗ*:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 4 > 0, \\ 6 - 2^{2-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x > \frac{1 + \sqrt{13}}{3}, \\ x < \frac{1 - \sqrt{13}}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1 + \sqrt{13}}{3}. \\ x > 2 - \log_2 6 \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\lg(3x^2 - 2x - 4)}{\lg(6 - 2^{2-x}) \cdot \lg(1,5 + 2^{x-1})} \times \\ \times (\lg(1,5 + 2^{x-1}) - \lg(6 - 2^{2-x})) \geq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \\ \frac{(3x^2 - 2x - 5) \cdot (2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8)}{5 - \frac{4}{2^x}} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{(x+1) \left(x - \frac{5}{3}\right) \cdot (2^x - 2^3)(2^x - 2^0)}{2^x - \frac{4}{5}} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{(x+1) \left(x - \frac{5}{3}\right) \cdot (x-3)x}{x - \log_2 \frac{4}{5}} \geq \\ \geq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \frac{\left(x - \frac{5}{3}\right) \cdot (x-3)}{x - \log_2 \frac{4}{5}} \geq 0 \Leftrightarrow \\ x \in \left(\log_2 \frac{4}{5}; \frac{5}{3}\right] \cup [3; +\infty).$$

Учтём ОДЗ* и получим, что

$$x \in \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{3}; \frac{5}{3}\right] \cup [3; +\infty).$$

Ответ. $\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{3}; \frac{5}{3}\right] \cup [3; +\infty).$

Пример 11. Решите неравенство

$$\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}} > 1.$$

Решение. Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Прологарифмируем неравенство и воспользуемся (ПП 4):

$$\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15} \right)^{-x+\sqrt{x^2-1}} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(-x + \sqrt{x^2-1} \right) \ln \left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x^2-1} - x \right) \left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15} - 1 \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x^2-1} - x \right) \left(6|2x+1| - (4x^2+15) \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x^2-1} - x \right) (12x + 6 - 4x^2 - 15) \times$$

$$\times (12x + 6 + 4x^2 + 15) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x-3)^2 \left(\sqrt{x^2-1} - x \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 1, 5; \\ \sqrt{x^2-1} < x, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, 5; \\ x \geq 0, \\ x^2-1 \geq 0, \\ x^2-1 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\log_4 (x+5)^4 \cdot \log_{16} (x+3)^2 + \log_2 \frac{(x+3)^3}{x+5} - 3 < 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\log_2 |x+5| \log_2 |x+3| + 3 \log_2 |x+3| - \log_2 |x+5| - 3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 |x+5| (\log_2 |x+3| - 1) + 3 (\log_2 |x+3| - 1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(\log_2 |x+3| - 1) (\log_2 |x+5| + 3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(|x+3|-2)(8|x+5|-1) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+5)(8x+39)(8x+41) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(-\frac{41}{8}; -5 \right) \cup \left(-\frac{39}{8}; -1 \right).$$

Учтём ОДЗ и получим, что

$$x \in \left(-\frac{41}{8}; -5 \right) \cup (-3; -1).$$

Ответ. $\left(-\frac{41}{8}; -5 \right) \cup (-3; -1).$

Пример 13. Решите уравнение

$$\log_{(19-x^2)} (3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x}) =$$

$$= \log_{(x-1)} (3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x}).$$

$$x \in [1; 1,5) \cup (1,5; +\infty).$$

Ответ. $[1; 1,5) \cup (1,5; +\infty).$

Пример 12. Решите неравенство

$$\log_4 (x+5)^4 \cdot \log_{16} (x+3)^2 + \\ + \log_2 \frac{(x+3)^3}{x+5} - 3 < 0.$$

Решение. Особенность данного неравенства в том, что очень необычно записывается его ОДЗ:

$$\frac{x+3}{x+5} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5) \cup (-3; +\infty).$$

Отсюда следует, что числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки, но могут быть одновременно как положительными, так и отрицательными. Поэтому при упрощении логарифмов необходимо писать модуль:

Решение. В начале решения данного уравнения тоже надо воспользоваться определением логарифма по переменному основанию (О 2):

$$\log_{(19-x^2)} (3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x}) =$$

$$= \log_{(x-1)} (3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lg (3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x})}{\lg (19 - x^2)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lg(3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x})}{\lg(x-1)} \Leftrightarrow \\
 &\frac{\lg(3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x})}{\lg(19-x^2) \cdot \lg(x-1)} \times \\
 &\times (\lg(x-1) - \lg(19-x^2)) = 0.
 \end{aligned}$$

Запишем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases}
 19 - x^2 > 0, \\
 19 - x^2 \neq 1, \\
 x - 1 > 0, \\
 x - 1 \neq 1, \\
 3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x} > 0.
 \end{cases}$$

Заметим, что при решении уравнений ОДЗ пишем, но без особой надобности не решаем.

Теперь решаем уравнение:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\lg(3^x - 12 + 4 \cdot 3^{2-x})}{\lg(19-x^2) \cdot \lg(x-1)} \times \\
 &\times (\lg(x-1) - \lg(19-x^2)) = 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 3^{2x} - 13 \cdot 3^x + 36 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{13 \pm 5}{2}, \\
 x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{2}
 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}
 x = 2, \\
 x = \log_3 4, \\
 x = 4, \\
 x = -5.
 \end{cases}$$

Легко учитывая ОДЗ и получаем, что $x \in \{\log_3 4; 4\}$.

Ответ. $\log_3 4; 4$.

Пример 14. Решите уравнение

$$\begin{aligned}
 &\log_{6x-5}(6x^2 - 11x + 5) \cdot \log_{x-1}(x^3 - 1) = \\
 &= \log_{6x-5}(6x^2 - 11x + 5) + \log_{x-1}(x^3 - 1).
 \end{aligned}$$

Решение. Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases}
 6x - 5 > 0, \\
 6x - 5 \neq 1, \\
 6x^2 - 11x + 5 > 0, \\
 x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1, \\
 x - 1 \neq 1.
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\log_{6x-5}(6x^2 - 11x + 5) \cdot \log_{x-1}(x^3 - 1) = \log_{6x-5}(6x^2 - 11x + 5) + \log_{x-1}(x^3 - 1) \Leftrightarrow \\
 &\log_{6x-5}((6x-5)(x-1)) \cdot \log_{x-1}(x^3 - 1) = \log_{6x-5}((6x-5)(x-1)) + \log_{x-1}(x^3 - 1) \Leftrightarrow \\
 &(1 + \log_{6x-5}(x-1)) \log_{x-1}(x^3 - 1) = (1 + \log_{6x-5}(x-1)) + \log_{x-1}(x^3 - 1) \Leftrightarrow \\
 &\log_{x-1}(x^3 - 1) + \log_{6x-5}(x-1) \cdot \log_{x-1}(x^3 - 1) = 1 + \log_{6x-5}(x-1) + \log_{x-1}(x^3 - 1) \Leftrightarrow \\
 &\log_{6x-5}(x-1) \cdot \log_{x-1}(x^3 - 1) = 1 + \log_{6x-5}(x-1) \Leftrightarrow \\
 &\log_{6x-5}(x-1) \cdot (\log_{x-1}(x^3 - 1) - 1) = 1 \Leftrightarrow \\
 &\log_{6x-5}(x-1) \cdot \log_{x-1}(x^2 + x + 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_{x-1}(x^2 + x + 1)}{\log_{x-1}(6x-5)} = 1 \Leftrightarrow \\
 &x^2 + x + 1 = 6x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow x - 1 = 1, \\ x = 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ. 3.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{x} \log_5 \left(\frac{10}{3} - 5^{-x} \right) > 1.$$

Ответ. $\left(\log_5 0,3; \log_5 \frac{1}{3} \right) \cup (0; \log_5 3).$

2. Решите неравенство

$$x \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{28}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3^x} \right) > 1.$$

Ответ. $\left(-\infty; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\log_{\frac{28}{9}} 3; 1 \right).$

3. Решите неравенство

$$4 \log_{3|x|+1} \sqrt{4x+3} - \log_{\sqrt{4x+3}} (3|x|+1) > 0.$$

Ответ. $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{2}{7}; 0 \right) \cup (0; +\infty).$

4. Решите неравенство

$$\left(\log_{x+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x \right) - 1 \right) \log_{16} \left(\frac{1}{4} - x \right) > \log_4 \frac{\frac{1}{4} - x}{\left| x + \frac{1}{2} \right|}.$$

Ответ. $\left(-2; -\frac{3}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{8}; 0 \right).$

5. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|} (4^{-x} - 1) < \log_{|x+2|} (2^{-x} + 1) + \log_{|x+2|} (2^{-x-1} + 1)$$

Ответ. $(-3; -2) \cup (-1; 0).$

6. Решите неравенство

$$\log_{x^2} |3x+1| < \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\left(-1; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{4}; 0 \right) \cup (0; 1).$

7. Решите неравенство

$$2 \log_{2x-8} (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) < 1.$$

Ответ. $(4; 4,5) \cup (5; 6).$

8. Решите неравенство

$$\frac{\log_{x^2} 4}{\sqrt{\frac{1}{6} + \log_{x^6} (1-x)} - \sqrt{\frac{1}{2}}} \geq \frac{\sqrt{6}}{\log_2 (1-x) - \log_4 x^4}.$$

Ответ.

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1 \right) \cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$$

9. Решите неравенство

$$\log_{(x-4)^4} (1-x)^2 + \log_{(4-x)^2} (6-x) \leq 1.$$

Ответ.

$$(-\infty; 1) \cup (1; 2] \cup (3; 4) \cup (4; 5) \cup \left[\frac{11}{2}; 6 \right).$$

Литература

1. Колесникова С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому Государственному экзамену. – М.: Айрис-Пресс (можно скачать из Интернета).

2. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач Единого Государственного экзамена (рубрика «Домашний репетитор»). – М.: Айрис-Пресс (можно скачать из Интернета).

3. Колесникова С.И. Показательные и логарифмические уравнения. ЕГЭ. Математика. – М.: Азбука, 2010.