Колесникова София Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Сложная экспонента $y(x)=a(x)^{f(x)}$

В школе и в заданиях ЕГЭ встречается выражение вида $a(x)^{f(x)}$, но в школьных учебниках не написано, каковы свойства функции $y(x)=a(x)^{f(x)}$, какова её область определения, как решать уравнения и неравенства, её содержащие. Учителя и школьники, не задумываясь, логарифмируют это выражение, чтобы, например, решить уравнение $a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}$. А где написано, что это можно делать? Какова область определения этой функции? Всегда ли $a(x)^{f(x)}>0$?

Когда в школьной программе появляется новая функция, то, как правило, сначала изучаются (или по крайней мере постулируются) её свойства, а потом, основываясь на них, выводятся правила решения уравнений и неравенств, их содержащих.

Иная ситуация с двумя функциями, которые в школе не изучаются (нет ни единого слова об их свойствах) – это функция вида

$$y(x)=a(x)^{f(x)}$$

и функция вида $$y(x)=\log_{a(x)} f(x).$$

Первую учителя называют показательно-степенной, а вторую считают логарифмической. На самом деле и то, и другое неверно.

Всем придётся сдавать ЕГЭ. При решения задания серии С необходимо обосновать решение, причём оценка существенно зависит не только от правильности решения, но и от полноты обоснования. Но что можно написать, решая, например, уравнение $x^{x^2}=x^{x+2}$ или неравенство

$x^{x^2} \ge x^{x+2}$? Каково ОДЗ этой функции? А можно ли продифференцировать, например, x^x? А можно ли построить график функции $y = x^x$? Если да, то как? Попробуем сейчас всё обосновать и объяснить.

1. Степень числа. Степенная и показательная функции

Если посмотреть на выражение

$$y(x) = a(x)^{f(x)},$$

то это не показательная функция, т.к. основание переменно! Но это и не степенная функция, потому что показатель переменный. Тогда что же это за функция?

Про свойства функции $y(x) = a(x)^{f(x)}$ в школе ничего не известно. Поговорим сначала немного о степенной и показательной функциях. Заметим, что при введении *степенной* функции $y(x) = x^\alpha$ нас уже «подстерегали неприятности»: например, области определения функций $y(x) = x^\alpha$ и их свойства различны для разного типа показателей степени.

Что такое a^α?

1. Если $\alpha = n$, где $n \in \mathbb{N}$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ число $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ – n множителей. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $ab \ne 0$ выполнены свойства:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,
3. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$,
4. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$,
5. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Обратим внимание на тот факт, что уже здесь равенства не всегда являются тождествами.

Действительно, например,

$$(xy)^m = x^m \cdot y^m = (-x)^m \cdot (-y)^m,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \left(\frac{-x}{-y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} = \frac{(-x)^m}{(-y)^m}.$$

Заметим, что

$$x^{2k} = x^k \cdot x^k = (-x)^k \cdot (-x)^k = |x|^{2k},$$

поэтому $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

2. Если α – произвольное число, то число a^α определено только для $a > 0$. При этом сначала определяется $\sqrt[2n]{a}$, $a \ge 0$, $n \ge 1$ и $\sqrt[2n+1]{a}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$, откуда следует, что оба существуют для $a \ge 0$. Корень из неотрицательного числа назвали арифметическим корнем и обозначили как $a^{\frac{1}{n}}$, $a \ge 0$, $n \ge 2$. Заметим при этом, что уже здесь не рассматривается $\sqrt[2n+1]{a}$ как $a^{\frac{1}{2n+1}}$: $\sqrt[2n+1]{a} \ne a^{\frac{1}{2n+1}}$, так как у левой и правой частей разные области определения, а операции с $\sqrt[2n+1]{a}$ и $\sqrt[2n]{a}$ проводятся по своим правилам, отличным от приведённых ниже. Далее определяется $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a > 0$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ($a > 0$, т.к. p может быть отрицательным).

Что касается a^α, где α – иррациональное число, то школьники пользуются значениями с калькулятора (вычисления так или иначе связаны с высшей математикой).

Практически постулируется (доказать школьники смогут только для рационального показателя!), что тогда *для любых* $a>0$, $b>0$ и $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ – фиксированных действительных чисел, выполнены свойства, которые являются *для этих* $a,\ b$ (т.е. для $a>0$, $b>0$) *тождествами*:

1. $a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$,
2. $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$,
3. $\left(a^\alpha\right)^\beta=a^{\alpha\beta}=\left(a^\beta\right)^\alpha$,
4. $a^\alpha\cdot b^\alpha=(ab)^\alpha$,
5. $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$ $m,\ n\in\mathbb{Z}$.

Заметим, что так как $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, то любое число, в частности целое, можно представить в виде дроби, суммы или произведения дробей.

Например, если $a>0$, то $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}=a^2$, и, наоборот, число a^2 можно представить в виде $a^2=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}$. Но если задано a^2, $a<0$, то a^2 существует, а $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}$ – нет, т. е. $a^2\neq a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}$.

Если $a>0$, то, в силу свойства 3, $\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}}=a^{2\cdot\frac{1}{2}}=a=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, но в общем случае $\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}}=|a|$, $a\in\mathbb{R}$ и, в частности, для $a<0$ получаем, что $\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}}=-a,\ a<0$, но $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$ для $a<0$ при этом не существует.

Примечание. *Заметим*, что области определения левой и правой частей в 3 – 5 всё-таки разные.

Если $ab>0$, то

$$a>0,\ b>0:\ (ab)^\alpha=a^\alpha\cdot b^\alpha,\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha};$$

$$a<0,\ b<0:\ (ab)^\alpha=\left((-a)\cdot(-b)\right)^\alpha=$$

$$=(-a)^\alpha\cdot(-b)^\alpha,\ \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{(-a)^\alpha}{(-b)^\alpha}.$$

Поэтому (на это тоже не все обращают внимание) если $ab>0$, то

$$(ab)^\alpha=|a|^\alpha\cdot|b|^\alpha,\ ab>0,\qquad(3^*)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{|a|^\alpha}{|b|^\alpha},\ ab>0.\qquad(4^*)$$

Важно понять, что если $ab>0$, то в общем случае $(ab)^\alpha\neq a^\alpha\cdot b^\alpha$.

Свойства 1 – 5 используются при упрощении выражений, содержащих степень числа, например при упрощении вида уравнения или неравенства. Они называются тождественными преобразовании и имеют место только при положительных $a,\ b$.

Если $a\le 0$ или $b\le 0$, то этими свойствами при преобразовании выражений пользоваться нельзя.

Нельзя вести преобразования и для $a=0$: $0^2\neq 0^3 0^{-1}$.

Итак, для любого $a>0$ и любого $a\in\mathbb{R}$ определено число a^α.

Для любого $a\neq 0$ определено число a^m, $m\in\mathbb{Z}$ и для любого $a\in\mathbb{R}$ определено число $\sqrt[2n+1]{a}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 1$.

Степенная функция

Если теперь зафиксировать $\alpha \in \mathbb{R}$ и «разрешить» x пробегать множество положительных чисел, то появится степенная функция $y = x^{\alpha}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Она непрерывна, монотонна (возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$) и дифференцируема в области определения.

Если «разрешить» x пробегать множество натуральных чисел, то появится так называемая функция натурального аргумента $y(n) = n^{\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, которую мы называем последовательностью и обозначаем обычно как $x_n = n^{\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$. Её свойства отличны от свойств степенной функции, и изучается она отдельно.

Если «разрешить» x пробегать всё множество действительных чисел, то возникают функции $y = x^n$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Показательная функция

Если зафиксировать $a > 0$ и «разрешить» x пробегать множество всех действительных чисел, то появится показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Она непрерывна, монотонна (возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$) и дифференцируема в области определения. Свойства этой функции и вид графика в школе вводятся аксиоматически. Если $a = 1$, то $a^x \equiv 1$, и она как показательная функция неинтересна.

Если зафиксировать $a \in \mathbb{R}$ и разрешить α пробегать множество натуральных чисел, то появится функция натурального аргумента $y(n) = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, которую мы называем геометрической прогрессией и обозначаем обычно как $x_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае мы уже *не имеем права* представлять натуральное число в виде дроби или суммы дробей, т. к. a может быть любого знака.

Итак, мы видим, что если основание степени или основание показательной функции положительны, то определены обе функции.

Уже поэтому *логично*, что функция $y(x) = a(x)^{f(x)}$, которую многие учителя и школьные методисты называют «показательно-степенной», может быть определена *только для* $a(x) > 0$. А значит, по крайней мере странно, что в некоторых источниках разбираются решения уравнений $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$ с нулевым и отрицательным основанием.

Ещё раз заметим с самого начала, что если задана функция $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, то любое целое число может быть представлено в виде дроби. Например, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$, $2 = \frac{6}{3} = \frac{4}{2}$ и т.д.

Тогда $a = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3$ и т. д.

Если же рассматривается a^n, $n \in \mathbb{N}$, то n нельзя представлять в виде дроби или суммы дробей, потому что a^n, $n \in \mathbb{N}$ определено при любых $a \in \mathbb{R}$ и иначе, чем $a > 0$ в рациональной степени.

Мы не решаем уравнение $(-2)^x = -8$, потому что показательная функция не определена при $a = -2$. А этот факт связан с тем, что $(-2)^3 \neq (-2)^{\frac{12}{4}}$: левая часть существует, а правая – нет! И если ничего не сказано о том, каким может быть x (а, значит, $x \in \mathbb{R}$, и число 3 *может быть* выражено рациональным числом $\frac{12}{4}$), уравнение не имеет решений.

Однако мы решаем уравнение $(-2)^n = -8$, где *заранее* известно, что n – число целое, а операция возведения в *целую* степень отлична от операции возведения в рациональную степень. Решение этого уравнения мы «угадываем»: $n = 3$.

Пример 1. Решите уравнение

$$(-2)^x = 1 - x^2.$$

► Здесь в самой записи по умолчанию предполагается, что слева стоит показательная функция, а справа квадратный трёхчлен. Так как $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ – область определения показательной функции $y = a^x$, то решений нет. Однако может найтись «любопытный» школьник или учитель, который скажет, что $x = 0$ и $x = 3$ обращают заданное уравнение в тождество. На самом деле это не так.

Так как $x \in \mathbb{R}$, то 0 можно представить в виде суммы $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, но $(-2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2)^{-\frac{1}{2}} \neq 1$, аналогично, $(-2)^{\frac{3}{2}} \cdot (-2)^{\frac{3}{2}} \neq -8$. Поэтому ни одно из этих чисел решением уравнения действительно не является.

Ответ. $\varnothing$. ◄

Пример 2. Решите уравнение

$$(-2)^n = 1 - n^2.$$

►Здесь надо найти номера членов последовательностей $a_n = (-2)^n$ и $b_n = 1 - n^2$, имеющих одинаковые значения. Алгоритмов для решения уравнений в целых числах не существует – надо исследовать и подбирать корни. Видно, что $n = 0$, $n = 3$ обращают уравнение в тождество. Представлять теперь 0 и 3 в виде дробей мы уже не имеем права, т. к. правила возведения числа в целую степень и не целую – *разные!* Числа 0 и 3 являются решениями уравнения в целых числах (при этом надо ещё доказать, что других решений нет).

Ответ. $\{0;3\}$. ◄

2. Сложная экспонента $y(x) = a(x)^{f(x)}$. Определение. Область определения и множество значений. Производная сложной экспоненты

По определению полагают, что для любого $c > 0$, $c \neq 1$

$$a(x)^{f(x)} = c^{f(x)\log_c a(x)}.$$

(По существу, степенная функция тоже показательная функция: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ и сложно увязана с ветвями $e^{\alpha \ln z}$.)

Из определения сразу чётко следует, что это всё-таки *показательная* функция. Чаще всего её записывают через натуральное основание

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = e^{f(x)\ln a(x)},} \qquad \text{(O1)}$$

поэтому её называют экспонентой. Многим понятней записать её через основание 10 или 2:

$$a(x)^{f(x)} = 10^{f(x)\lg a(x)} = 2^{f(x)\log_2 a(x)}.$$

Так или иначе, но это *сложная* показательная функция, потому что в показатель входит не только показатель заданного выражения, но и его основание.

> Функцию $y(x) = a(x)^{f(x)} \equiv e^{f(x)\ln a(x)}$ называют *сложной экспонентой*.

Теперь хорошо видно, что *областью определения* сложной экспоненты является множество X, на котором $a(x) > 0$.

Сложная экспонента классическими свойствами показательной функции уже не обладает (например, не является монотонной функцией в области определения), но, как всякая показательная функция, принимает только *положительные* значения. Заметим, что

$$y(x) = a(x)^{f(x)} \equiv e^{f(x)\ln a(x)}, \qquad (\text{П}1)$$
$$\ln y(x) = f(x)\ln a(x),$$

т. е. сложную экспоненту *можно* логарифмировать.

Свойства сложной экспоненты.

1. $a(x)^{f(x)} \cdot a(x)^{g(x)} = a(x)^{f(x)+g(x)}$

(т.к. $a(x)^{f(x)} \cdot a(x)^{g(x)} =$

$$= e^{f(x)\ln a(x)} \cdot e^{g(x)\ln a(x)} =$$

$$= e^{f(x)\ln a(x) + g(x)\ln a(x)} =$$

$$= e^{(g(x)+b(x))\ln a(x)} = a(x)^{f(x)+b(x)}).$$

2. $a(x)^{f(x)} = a(x)^{f(x)-b(x)+b(x)} \equiv$

$$\equiv e^{(f(x)-b(x)+b(x))\ln a(x)} \equiv$$

$$\equiv e^{(f(x)-b(x))\ln a(x)} \cdot e^{b(x)\ln a(x)} \equiv$$

$$\equiv a(x)^{f(x)-b(x)} \cdot a(x)^{b(x)}$$

и так далее.

Сложная экспонента является непрерывной функцией в области определения там, где непрерывны $a(x)$ и $f(x)$, и дифференцируемой там, где дифференцируемы $a(x)$ и $f(x)$.

Теперь становится ясно также, по каким правилам дифференцируется сложная экспонента:

$$y'(x) = \left(a(x)^{f(x)}\right)' = \left(e^{f(x)\ln a(x)}\right)' =$$

$$= e^{f(x)\ln a(x)}\left(f(x)\ln a(x)\right)' =$$

$$= e^{f(x)\ln a(x)}\left(f'(x)\ln a(x) + f(x)\cdot\frac{a'(x)}{a(x)}\right). \qquad (\text{П } 2)$$

Однако часто находят производную по-другому – находят сначала так называемую логарифмическую производную, используя то, что $\ln y(x) = f(x)\ln a(x)$.

$$\ln y(x) = f(x)\ln a(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} =$$

$$= f'(x)\ln a(x) + \frac{f(x)a'(x)}{a(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = y(x)\left(f'(x)\ln a(x) + \frac{f(x)a'(x)}{a(x)}\right),$$

или

> $$\left(a(x)^{f(x)}\right)' =$$
> $$= a(x)^{f(x)}\left(f'(x)\ln a(x) + \frac{f(x)a'(x)}{a(x)}\right), \qquad (\text{П } 2^*)$$

что совпадает с формулой (П 2).

Пример 3. Найдите производную функции $y(x) = \left(3x^2 + 4\right)^{\cos x}$.

► $y(x) = \left(3x^2 + 4\right)^{\cos x} = e^{\cos x \ln\left(3x^2+4\right)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'(x) = \left(3x^2 + 4\right)^{\cos x} \times$$

$$\times\left(-\sin x\cdot\ln\left(3x^2+4\right)+\cos x\cdot\frac{6x}{3x^2+4}\right). ◀$$

Пример 4. Постройте график функции $y=x^{x^2}$.

▶ Так как $D(y)=(0;+\infty)$, то, прежде всего, необходимо выяснить поведение на «границе», т. е. найти два предела:

$$\lim_{x\to+0}x^{x^2}=\lim_{x\to+0}e^{x^2\ln x}=1, \text{ т. к.}$$

$$\lim_{x\to+0}x^2\ln x=0 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln x}=+\infty.$$

Теперь найдём производную:

$$y'=\left(x^{x^2}\right)'=\left(e^{x^2\ln x}\right)'=$$

$$=e^{x^2\ln x}\left(2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=xe^{x^2\ln x}(2\ln x+1).$$

Найдём критические точки в области определения:

$$y'=0\Leftrightarrow xe^{x^2\ln x}(2\ln x+1)=$$

$$=0\Leftrightarrow\ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Расставим знаки производной – рис. 1.

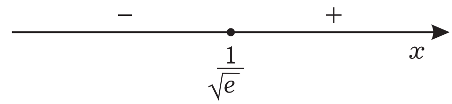

Рис.1

Ясно, что точка $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ – точка минимума,

$$y_{\min}=y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\frac{1}{e}}=e^{-\frac{1}{2e}}.$$

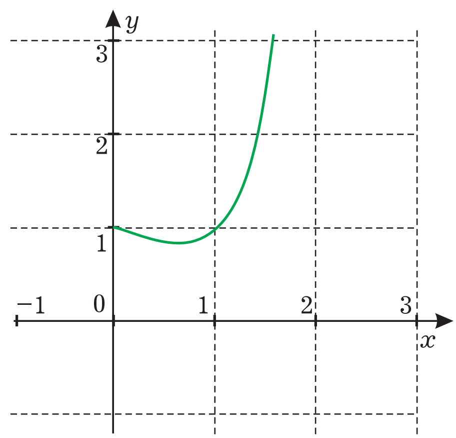

Рис. 2

Строим эскиз графика – рис.2. ◀

3. Уравнения, содержащие сложную экспоненту

Рассмотрим теперь уравнение

$$a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}.$$

В известном задачнике Сканави просто постулируются правила решения уравнений и неравенств, содержащих $y(x)=a(x)^{f(x)}$ при $a(x)>0$, ничего не говоря об ОДЗ самого выражения $y(x)=a(x)^{f(x)}$. Мы выведем эти правила.

Воспользуемся определением сложной экспоненты (возьмём в роли с число 10 – наиболее знакомое школьникам основание логарифма).

Так как

$$a(x)^{f(x)}=10^{f(x)\lg a(x)},$$

$$a(x)^{g(x)}=10^{g(x)\lg a(x)}, \text{ то}$$

$$a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{f(x)\lg a(x)}=10^{g(x)\lg a(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\lg a(x)=g(x)\lg a(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg a(x)\left(f(x)-g(x)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln a(x)=0, \\ \begin{cases} a(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} a(x)=1, \\ f(x)=g(x). \end{array}\right.$$

(П 3)

или полное условие равносильности

$$a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(x)=1, \\ \begin{cases} a(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

(П 3*)

Соотношение

$$a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)\lg a(x)=g(x)\lg a(x)$$

показывает, что равносильное уравнение получается таким же, как если бы его прологарифмировали как «обычную» степень по допустимому основанию.

Замечательно, что ОДЗ левой и правой частей всегда совпадают! Именно поэтому этот равносильный переход обычно называют и *осуществляют логарифмированием* уравнения $a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}$.

Вот мы и получили те уравнения, которые просто декларируются в литературе.

Пример 5. Решите уравнение

$$x^{x^2+1}=x^{3x+5}.$$

► Воспользуемся выведенным правилом (П 3*):

$$x^{x^2+1}=x^{3x+5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; \\ \begin{cases} x>0, \\ x^2+1=3x+5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1; \\ \begin{cases} x>0, \\ x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm 5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Ответ. $\{1;4\}$.

Примечание 1. Заметим, что, если подставить в исходное уравнение $x=0$ или $x=-1$, то уравнение вроде бы превратится в тождество. Однако мы не считаем эти числа решением нашего уравнения, потому что, во-первых, они не принадлежат ОДЗ уравнения, во-вторых, с точки зрения решения уравнений, содержащих сложную экспоненту, уравнения

$$x^{x^2}x^{0,5}=x^{3x+4,5},\ x^{x^2+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=x^{3x+5},$$
$$x^{x^2+1}=x^{3x+5},\ x^{x^2}x=x^{3x+5}$$

равносильны (ведь не известно, после проведения каких преобразований появилось уравнение примера или любого, равносильного ему). Но теперь у первого уравнения и $x=0$, и $x=-1$ – не решения, у второго $x=-1$ – не решение, а $x=0$ – решение, у третьего $x=0$ и $x=-1$ – решения, а у четвёртого $x=-1$ – решение, а $x=0$ – не решение.

В-третьих, $x=0: 0^1 \neq 0^2\cdot 0^{-1}$; $x=-1: (-1)^2 \neq (-1)^{\frac{3}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}}$. ◄

Примечание 2. Заметим, что заданное уравнение «случайно» имеет целочисленные корни. Поэтому для сравнения решим ещё пример.

Пример 6. Решите уравнение

$$n^{n^2+1}=n^{3n+5},\ n\in\mathbb{Z}.$$

►Положительные корни найдены: $n=1$, $n=4$. Будем разбираться с 0 и отрицательными n.

Прежде всего подставим «засветившееся» $n=-1; (-1)^2\equiv(-1)^2$ (не имеем права представлять 2 как $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$).

Попробуем подставить $n=0$: $0^1 \equiv 0^5$ (не имеем права представлять 1 как $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$). При $n \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow n^{n^2+1}=n^{3n+5} \Leftrightarrow n^{(n+1)(n-4)}=1 \Rightarrow$ других целочисленных отрицательных решений нет, т. к. при $n<-1$ квадратный трёхчлен положителен и $|n|^{(n+1)(n-4)}>1$.

Ответ. $\{-1; 0; 1; 4\}$.

Видна разница? ◄

Поэтому, так как об этой функции в школе ни слова, то чаще всего в заданиях ЕГЭ или задачах вступительных экзаменов просят найти решение соответствующего уравнения или неравенства при условии, что $a(x)>0$ (или уже в самом условии задачи видно, что $a(x)>0$).

Пример 7. Решите уравнение

$$\left(x^2-2\right)^{x^2}=\left(x^2-2\right)^{x+2}$$

► $\left(x^2-2\right)^{x^2}=\left(x^2-2\right)^{x+2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2=1, \\ \begin{cases} x^2-2>0, \\ x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ. $\{\pm\sqrt{3}, 2\}$.

Примечание. И опять кто-то скажет, что $x=\pm\sqrt{2}$ и $x=-1$ обращают уравнение в тождество. Но как подставить для проверки $x=\pm\sqrt{2}$? Если возьмём, например, значение $\sqrt{2}$ с избытком, то справа «вроде» бы получится 0. А если возьмём значение $\sqrt{2}$ с недостатком? Тогда значение правой части не существует, т. к. отрицательное число придётся возводить в нецелую степень.

Если $x=-1$, то $(-1)^1 \neq (-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}}$ (заметим, что в комплексной плоскости $(-1)^1=(i)(i)=(-i)(-i)$).◄

Решим для сравнения другой пример.

Пример 8. Решите уравнение

$$\left(n^2-2\right)^{n^2}=\left(n^2-2\right)^{n+2}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

►Методов решения уравнений в целых числах нет. При $n^2-2>0$ решение найдено в предыдущем примере – это $n=2$. Что дальше? Подбирать. Проверим сначала «промелькнувшее» $n=-1$: $(-1)^1=(-1)^1$ – годится (теперь мы не имеем права представлять 1 в виде суммы $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$). Больше очевидных решений не проглядывается. Но, чтобы решить задачу до конца, надо доказать, что других целочисленных решений нет. Легко показать, что других решений при $n \leq -2$ нет.

Ответ. $\{-1; \ 0; \ 2\}$.

Пример приведён для того, чтобы показать, какая разница при решении уравнений со сложной экспонентой и уравнений в целых числах.◄

Пример 9. Решите уравнение

$$x^{\sqrt[3]{x^2}}=\left(\sqrt{x}\right)^x.$$

► Прологарифмируем уравнение по основанию 10.

$$x^{\sqrt[3]{x^2}}=\left(\sqrt{x}\right)^x \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}\lg x=\frac{x}{2}\lg x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x^{\frac{2}{3}}=\frac{x}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=8. \end{array}\right.$$

Ответ. $\{1; \ 8\}$.

Примечание. Если $x>0$, $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$, но $\sqrt[3]{x^2}=|x|^{\frac{2}{3}}$ при любых x. ◄

Задачи для самостоятельного решения

Пример 1. Решите уравнение

$$x^2=x^{\frac{x^2}{2}}.$$

Ответ. $\{1;2\}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$\left(x^2-1\right)^{x^3+3x^2}=\left(x^2-1\right)^{-2x}.$$

Ответ. $\{-2;-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$.

Пример 3. Решите уравнение

$$\left(x^2-3x+2\right)^{2x^2+2}=\left(x^2-3x+2\right)^{x^2-x+3}.$$

Ответ. $\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Пример 4. Решите уравнение $\left(n^2-3n+2\right)^{2n^2+2}=\left(n^2-3n+2\right)^{n^2-n+3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ. $\{1;2\}$.

4. Неравенства, содержащие сложную экспоненту. Правила П1 и П2

При доказательстве условий равносильности для сложной экспоненты нам придётся воспользоваться правилами для решения логарифмических неравенств (см. [4]).

Правило П Л1. Знак разности $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ.

Правило П Л2. Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x)-1\big)$ в ОДЗ.

Покажем, что неравенство $a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}>0$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)>0$$

в ОДЗ, т. е. имеет место следующее *условие равносильности*:

$$a(x)^{f(x)}>a(x)^{g(x)}\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)>0.$$

(УР П1)

► *Доказательство*. Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве c, например, число 10 (можно взять любое другое допустимое число), а затем воспользуемся правилом (П Л2)

$$a(x)^{f(x)}>a(x)^{g(x)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10^{f(x)\lg a(x)}>10^{g(x)\lg a(x)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)\lg a(x)>g(x)\lg a(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lg a(x)\big(f(x)-g(x)\big)>0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)>0,$$

что и требовалось доказать.

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases} \qquad \text{(УР П1*)}$$

Если неравенство нестрогое, то просто знак неравенства заменяется на знак нестрогого неравенства – условие равносильности принимает вид:

$$a(x)^{f(x)} \ge a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \ge 0. \end{cases}$$

(УР П1**) ◀

Следствие.

1. Если $g(x) \equiv 0$, то условия равносильности (УР П1) примет вид:

$$a(x)^{f(x)} > 1 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a(x)-1)f(x) > 0.$$

(УР П2)

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

2. При доказательстве (УР П1) мы попутно получили равносильное соотношение

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-g(x))\lg a(x) > 0. \qquad \text{(УР П3)}$$

Получается так, как будто мы «прологарифмировали» заданное неравенство. Именно поэтому этот равносильный переход так и осуществляют.

3. Проанализируем условие равносильности (УР П3):

а) если $a(x) > 1$, то $f(x) > g(x)$,

б) если $0 < a(x) < 1$, то $f(x) < g(x)$,

т. е. мы получили те условия, которые в литературе просто *декларируются*.

Итак, из выведенных условий равносильности следуют стандартные способы, рассматривающие отдельно случаи, когда основание больше или меньше единицы. При применении *наших* условий равносильности это не имеет значения. Кроме того, если $a(x)$, $f(x)$, $g(x)$ – рациональные функции, то за один шаг мы перешли к классическому варианту метода интервалов для рациональных функций (наверное, поэтому его кто-то назвал методом рационализации), который изучается в 9-м классе.

Но самое *замечательное* состоит в том, что отсюда ещё следуют замечательные правила, которые уже *намного* упростят решение сложных неравенств, содержащих в качестве множителя разность $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ или разность $a(x)^{f(x)} - 1$.

Правило П П1

Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.

► Условие равносильности (УР П1) выведено для неравенства $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} > 0$. При изменении знака неравенства изменится и знак произведения, а тогда уже ясно, что знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.◀

Правило П П2

Знак разности $a(x)^{f(x)} - 1$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)f(x)$ в ОДЗ.

Замечание. Интересно? В школе такого нет, но ведь здорово, что *формально* равносильные соотношения выглядят *одинаково* как для показательной функции, так и для логарифмической, да ещё как для постоянного, так и для переменного оснований.

Эти правила дают возможность *просто* решать, например, неравенство вида

$$h(x)\left(a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}\right)\times$$
$$\times\left(b(x)^{r(x)}-b(x)^{s(x)}\right)\ge 0\ (\le 0).$$

►Решение неравенства

$$h(x)\left(a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}\right)\times$$
$$\times\left(b(x)^{r(x)}-b(x)^{s(x)}\right)\ge 0\ (\le 0)$$

зависит от знаков сомножителей, а в силу правила (П П1) знак разности $a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ, знак разности $b(x)^{r(x)}-b(x)^{s(x)}$ совпадает со знаком (–) произведения $(b(x)-1)(r(x)-s(x))$ в ОДЗ. Поэтому

$$h(x)\left(a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}\right)\times$$
$$\times\left(b(x)^{r(x)}-b(x)^{s(x)}\right)\ge 0\ (\le 0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h(x)(a(x)-1)(b(x)-1)\times$$
$$\times(f(x)-g(x))(r(x)-s(x))\ge 0\ (\le)$$

в ОДЗ. ◄

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите неравенство

$$(x-2)^{4x^2+35}\le(x-2)^{24x}.$$

► Воспользуемся условием равносильности (УР П2)**:**

$$(x-2)^{4x^2+35}\le(x-2)^{24x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2>0,\\(x-2-1)\left(4x^2-24x+35\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2>0,\\(x-3)(x-3{,}5)(x-2{,}5)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(2;\ 2{,}5]\cup[3;\ 3{,}5].$$

Ответ. $(2;\ 2{,}5]\cup[3;\ 3{,}5]$.

Пример 2. Решите неравенство

$$x^{x(x^2-9)}\le x^{\frac{x^2-9}{2}}.$$

► $x^{x(x^2-9)}\le x^{\frac{x^2-9}{2}}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\(x-1)\left(x^3-9x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{9}{2}\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\(x-1)(x-3)(x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right]\cup[1;\ 3].$$

Ответ. $\left(0;\ \frac{1}{2}\right]\cup[1;\ 3]$. ◄

Пример 3. Решите неравенство

$$\frac{(1-x)^{x^2+2x+2}-(1-x)^{4x+5}}{\left(12x^2+7x+1\right)\left(\left((x+4)^2\right)^{(6x^2+4x)}-1\right)}\le 0.$$

► Заметим, что

$$\left((x+4)^2\right)^{(6x^2+4x)}\ne(x+4)^{2(6x^2+4x)},$$

так как у правой и левой частей разные ОДЗ. Найдём ОДЗ *:

$$\begin{cases}1-x>0,\\x\ne-4\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty;-4)\cup(-4;1).$$

Воспользуемся правилами П П1 и П П2:

$$\frac{(1-x)^{x^2+2x+2}-(1-x)^{4x+5}}{\left(12x^2+7x+1\right)\left(\left((x+4)^2\right)^{(6x^2+4x)}-1\right)}\le 0\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$
$$\frac{(1-x-1)\left(x^2+2x+2-4x-5\right)}{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left((x+4)^2-1\right)\left(6x^2+4x\right)}\le 0\Leftrightarrow$$
$$\frac{x(x-3)(x+1)}{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)(x+5)(x+3)x\left(x+\frac{2}{3}\right)}\ge 0\Leftrightarrow$$
$$x\in(-5;-3)\cup\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};-1\right]\cup[3;+\infty).$$

После учёта ОДЗ получаем, что

$$x\in(-5;-4)\cup(-4;-3)\cup\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};-1\right].$$

Ответ.

$$(-5;-4)\cup(-4;-3)\cup\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};-1\right].$$ ◄

Пример 4. Решите неравенство $\left(2^x+0{,}09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\geq\left(2^x+0{,}09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{1-x}}$.

► Воспользуемся сначала условием равносильности (П3*), а затем правилом (П4):

$$\left(2^x+0{,}09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\geq\left(2^x+0{,}09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{1-x}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2^{2x}-2^x+0{,}09\right)\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2^x+0{,}09\cdot 2^{-x}-1\right)\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{1-x}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(2^x-\frac{1}{10}\right)\left(2^x-\frac{9}{10}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)}\geq 0\Leftrightarrow$$

(в силу (П П1)),

$$\frac{\left(x-\log_2\frac{1}{10}\right)\left(x-\log_2\frac{9}{10}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)}\geq 0.$$

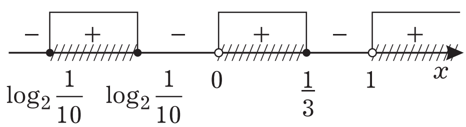

Рис. 3

С рисунка 3 снимаем

Ответ.

$$\left[\log_2\frac{1}{10};\log_2\frac{9}{10}\right]\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty).$$ ◄

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{\left(\left(100x^2-99\right)^{6x^2+7x}-\left(100x^2-99\right)^{49}\right)\left(2^{2x-9}-2^{-x-2}\right)}{(x+3{,}4)(x-0{,}9)}\leq 0.$$

► Неравенство громоздкое, поэтому найдём сразу ОДЗ*:

$$x\in\left(-\infty;-\sqrt{0{,}99}\right)\cup\left(\sqrt{0{,}99};+\infty\right).$$

$$\frac{\left(\left(100x^2-99\right)^{6x^2+7x}-\left(100x^2-99\right)^{49}\right)\left(2^{2x-9}-2^{-x-2}\right)}{(x+3{,}4)(x-0{,}9)}\leq 0\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(100x^2-99-1\right)\left(6x^2+7x-49\right)(2x-9+x+2)}{(x+3{,}4)(x-0{,}9)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x+1)(x+3{,}5)(3x-7)^2}{(x+3{,}4)(x-0{,}9)}\leq 0\overset{\text{с учётом ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

(снимаем ответ с рисунка 4)

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3{,}5]\cup(-3{,}4;\ -1]\cup\left(\sqrt{0{,}99};\ 1\right]\cup\left\{\frac{7}{3}\right\}.$$