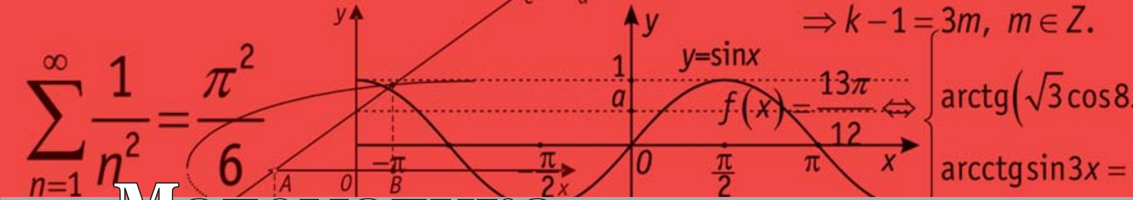


Ажгалиев Урынбасар
Кандидат педагогических наук,
преподаватель в Школе-гимназии
№4 им. Ж. Жабаева, г. Астана.

Шестнадцать задач о квадратах

Квадрат является одной из самых распространённых фигур школьного курса геометрии. На примере квадрата дети впервые знакомятся с понятиями площади и периметра. Можно сказать, что квадрат является одной из самых любимых геометрических фигур у школьников. Это объясняется наглядными свойствами, связанными с его симметричностью, – на нём можно продемонстрировать простейшие свойства осевой и центральной симметрии, поворота, параллельного переноса. Эта наглядность и простота позволяют и в старших классах показать различные способы решения задач. Можно даже рекомендовать показ нового способа решения на примере квадрата. Поэтому мы решили продемонстрировать шестнадцать различных способов решения шестнадцати задач на квадраты. Так как все эти способы и задачи являются различными, среди решений могут быть и не самые рациональные. Поэтому к каждой задаче мы привели краткий перечень способов решения. Мы не исключаем, что читатели могут найти и более рациональные решения, и будем только рады этому.

Задача 1. Точки M и N являются серединами сторон AB и AD квадрата $ABCD$. Прямые CM и CN пересекают диагональ BD в точках E и K соответственно. Доказать равенство отрезков BE, EK и KD (рис. 1).

Решение. Отрезки BE и KD равны в силу симметрии. Достаточно доказать, что $KD = BK/2$. Рассмотрим подобные треугольники BKC и DKN. Они подобны по двум углам. Так как $ND = BC/2$, коэффициент подобия равен 2. Тогда $KD = BK/2$. Значит, $BE = EK = KD$.

Задачу можно решить более чем 20 способами (координатным, век-

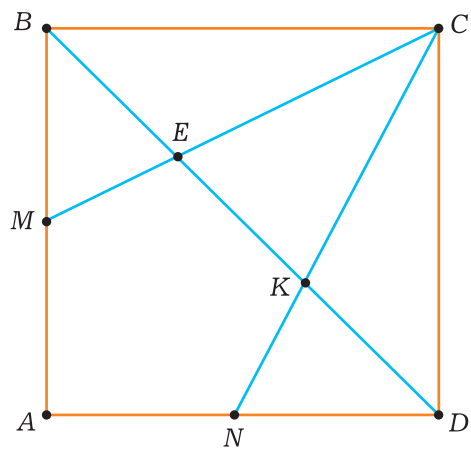


Рис. 1

торным, методом вспомогательной окружности, методом площадей, тригонометрическим методом и т. д.)

Задача 2. (Решение при помощи уравнений) Дан квадрат $ABCD$. На отрезках AC и BC взяты, соответственно, точки M и N, не совпадающие с концами отрезков, так, что $MN = MD$ (рис. 2). Найдите величину угла $\angle MDN$.

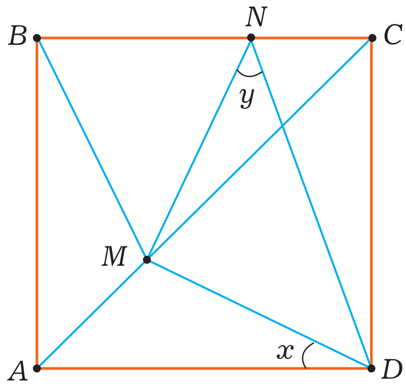


Рис. 2

Решение. Введём обозначения:

$$\angle MDN = \angle MND = y,\ \angle ADM = x.$$

Имеем $\angle ABM = \angle ADM = x$, что следует из равенства треугольников ABM и AMD. Тогда

$$\angle MBN = 90° - x \text{ и } \angle DNC = x + y.$$

Имеем $\Delta ABM = \Delta AMD$ и, следовательно, $BM = NM$ и $\angle MBN = \angle MNB = 90° - x$, откуда следует равенство

$$(90° - x) + y + (x + y) = 180°.$$

Из этого уравнения находим, что $y = 45°$.

Задачу можно также решить координатным, векторным, тригонометрическим способами. Можно в этой задаче применить метод вспомогательной окружности (несколько раз). Всего можно найти не менее десяти способов решения.

Задача 3. (Поворот) Внутри квадрата $ABCD$ дана точка M такая, что $AM = 2\sqrt{3}$, $BM = \sqrt{2}$, $CM = 4$. Доказать, что $\angle AMC = 120°$ (рис. 3).

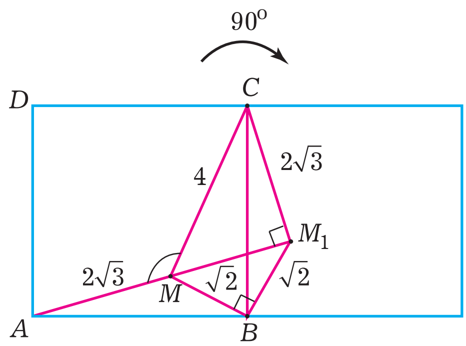


Рис. 3

Решение. Рассмотрим поворот вокруг точки B на 90° по часовой стрелке. При этом повороте $A \to C$, $M \to M_1$, $B \to B$. Тогда

$$AM \to CM_1 = 2\sqrt{3},\ MM_1 = 2$$

(из прямоугольного треугольника MBM_1). Для треугольника MM_1C оказывается выполненной теорема Пифагора, следовательно, он прямоугольный с $\angle MM_1C = 90^{\circ}$, $\angle CMM_1 = 60^{\circ}$. Далее

$$\angle BM_1M = 45^{\circ} \Rightarrow \angle BM_1C = 135^{\circ}.$$

Имеем

$$\angle AMB \to \angle CM_1B.$$

Значит, $\angle AMB = 135^{\circ}$. Тогда точки A, M, M_1 принадлежат одной прямой. Отсюда следует, что

$$\angle AMC = 120^{\circ}.$$

Задачу также можно решить координатным и тригонометрическим методами.

Задача 4. (Метод вспомогательной окружности) Точка M делит сторону AD квадрата $ABCD$ пополам. Точка P – основание перпендикуляра CP, проведённого к прямой BM (рис. 4). Доказать, что $DP = DC$.

Решение. Так как $\angle MPC = \angle MDC = 90^{\circ}$, точки M, P, C, D принадлежат одной окружности, следовательно,

$$\angle ABM = \angle MCD = \angle MPD = \alpha.$$

Тогда $\angle BCP = \alpha$, а

$$\angle DCP = \angle DPC = 90° - \alpha.$$

Значит, $DP = DC$.

Задачу также можно решить тригонометрическим и координатным методами.

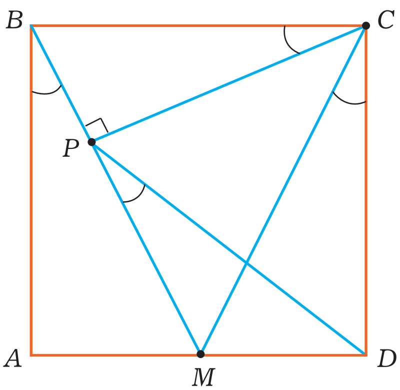


Рис. 4

Задача 5. (Метод площадей) На сторонах AB, BC, CD, AD квадрата $ABCD$ взяты точки H, M, E, K соответственно, причём

$$DE = AK = CM = BH = \frac{1}{4}AB.$$

Площадь квадрата равна S. Рассмотрим пересечения $DM \cap AE = Q$, $DM \cap CH = R$, $AE \cap BK = P$, $CH \cap BK = S$. Найдите площадь четырёхугольника $PQRS$ (рис. 5).

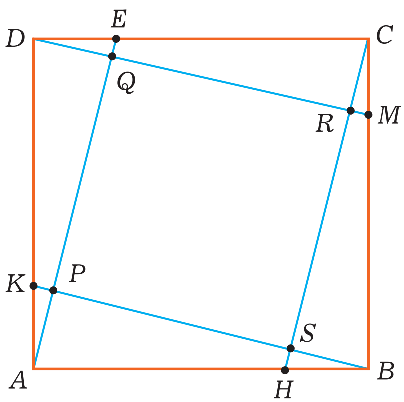


Рис. 5

Решение. Пусть $S_{\Delta DEQ} = m$. Так как $\Delta DCR \backsim \Delta DEQ$ с коэффициентом подобия 4, получаем $S_{\Delta DCR} = 16m$. Поэтому

$$S_{\Delta DCM} = 17m.$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot 4 \cdot S_{\Delta DCM} = 8 \cdot 17m = 136m;$$

$$S_{PQRS} = S_{ABCD} - 2S_{\Delta DCM} - 2S_{DQPK} = \\ = 136m - 34m - 30m = 72m.$$

Значит,

$$\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \frac{72m}{136m} = \frac{9}{17}.$$

Следовательно,

$$S_{PQRS} = \frac{9}{17}S.$$

Задачу можно решить также координатным способом.

Задача 6. (Теорема Птолемея) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A. На гипотенузе BC вне треугольника построен квадрат с центром в точке O. Вычислить AO, если $AB = a$, $AC = b$ (рис. 6).

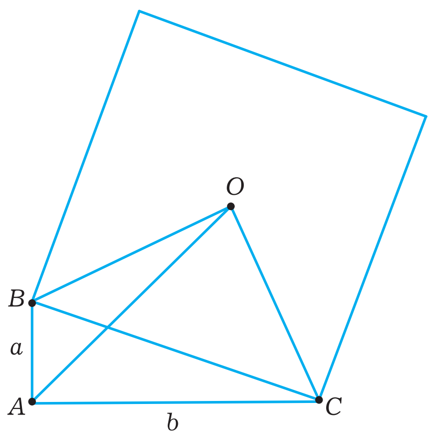


Рис. 6

Решение. Имеем

$$BC = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad OB = OC = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}}.$$

Применим к четырёхугольнику $ABOC$ теорему Птолемея:

$$AB \cdot OC + AC \cdot OB = AO \cdot BC.$$

Получим

$$\frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}} + \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}} = AO \cdot \sqrt{a^2 + b^2},$$

откуда $AO = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Задачу можно решить координатным методом, методом дополнения до квадрата и другими способами.

Задача 7. (Параллельный перенос) Дан квадрат $ABCD$, M – середина стороны BC, O – точка пересечения прямых AC и MD. Вычислить угол MOC (рис. 7).

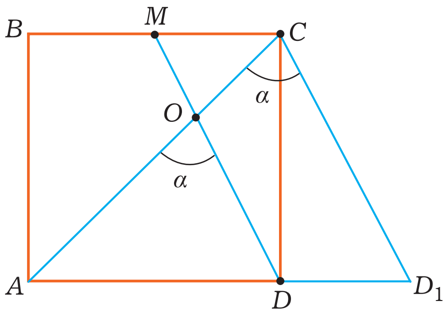


Рис. 7

Решение. Перенесём MD параллельно в положение CD_1. Тогда

$$\angle MOC = \angle AOD = \angle ACD_1.$$

Пусть $CD = 1$. Тогда

$$AC = \sqrt{2}, \quad DD_1 = MC = \frac{1}{2},$$

$$CD_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad AD_1 = \frac{3}{2}.$$

Применив к треугольнику ACD_1 теорему косинусов, получим

$$\cos\angle ACD_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Значит,

$$\angle MOC = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Задачу можно решить тригонометрическим, координатным, векторным и другими способами.

Задача 8. (Теорема синусов) Дан квадрат $ABCD$. На диагонали BD взята точка E. Точка O_1 – центр описанной окружности треугольника ABE, O_2 – центр описанной окружности треугольника ADE. Доказать, что четырёхугольник AO_1EO_2 – квадрат (рис. 8).

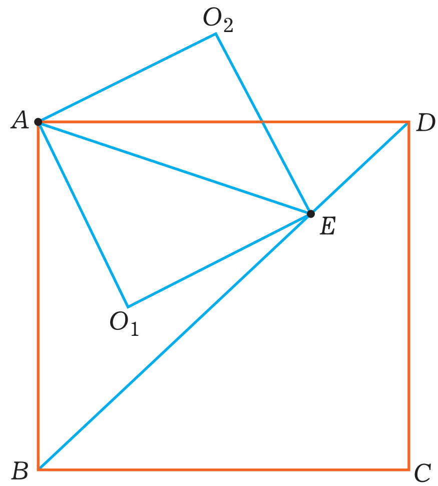


Рис. 8

Решение. Применяя теорему синусов к треугольникам ABE и ADE, имеем:

$$AE = 2AO_1 \sin\angle ABE = \sqrt{2}AO_1,$$

$$AE = 2AO_2 \sin\angle ADE = \sqrt{2}AO_2.$$

Отсюда $AO_2 = AO_1$. Кроме того, $AO_1 = EO_1$ и $AO_2 = EO_2$. Получается, что четырёхугольник AO_1EO_2 – ромб. Осталось заметить, что

$$\angle AO_1E = 2\angle ABE = 90^\circ.$$

Следовательно, AO_1EO_2 – квадрат.

Задачу можно решить и координатным способом.

Задача 9. (Прямой подсчёт) Точка K – середина стороны AB квадрата $ABCD$, точка Z расположена на диагонали AC, причём $AZ: ZC = 3:1$. Найдите угол KZD.

Решение. Проведём отрезки KZ, ZD и прямую $MN \parallel BC$, где $M \in AB$ и $N \in CD$ (рис. 9). $\Delta MKZ = \Delta DNZ$ по двум катетам. Пусть $\angle ZDN = \alpha$. Тогда

$$\angle MZK = \alpha \text{ и } \angle NZD = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle MZK + \angle NZD = 90^\circ.$$

Значит, $\angle KZD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Задачу можно решить координатным методом, тригонометрическим методом, методом вспомогательной окружности.

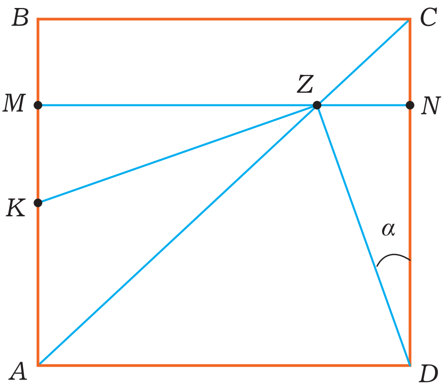


Рис. 9

Задача 10. (Равенство и подобие треугольников) Точка M – середина стороны AB квадрата $ABCD$. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная DM и пересекающая диагональ BD и сторону BC соответственно в точках O и E (рис. 10). Найти отношение $DO : OB$.

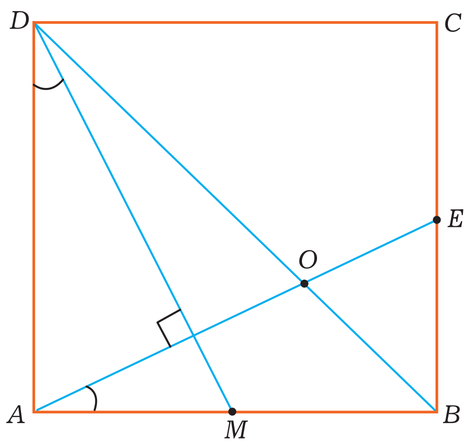


Рис. 10

Решение. $\angle ADM = \angle BAE$ как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами. $\Delta ADM = \Delta ABE$ по катету и острому углу. Тогда $BE = AM = \frac{1}{2}AB$. Поэтому треугольники ADO и BOE подобны с коэффициентом 2. Значит, $DO{:}OB = 2$.

Задачу можно решить координатным, векторным, тригонометрическим способами, а также методами площадей, подобия, вспомогательной окружности и т. д. Существует не менее тридцати способов решения этой задачи.

Задача 11. (Осевая симметрия) Внутри квадрата $ABCD$ взята такая точка M, что $\angle MBC = \angle BCM = 15^o$. Доказать, что треугольник ADM правильный (рис. 11).

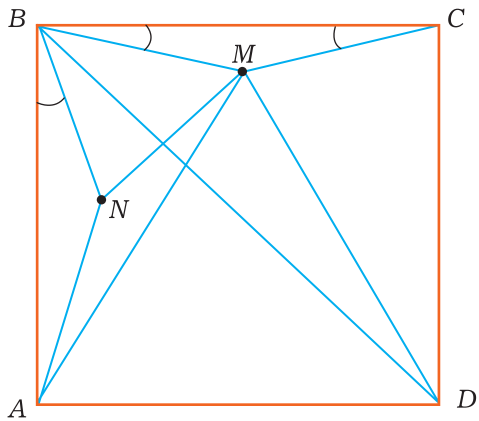


Рис. 11

Решение. Рассмотрим осевую симметрию с осью BD. При этой симметрии точка M перейдёт в точку N. Так как $BM = BN$ и $\angle MBN = 60^o$, треугольник MBN правильный. Так как $\angle ANB = \angle BMC = 150^o$, получаем $\Delta ABN = \Delta ANM$ (по первому признаку). Значит, $AM = AB = AD = DM$. Следовательно, треугольник ADM правильный.

Задачу можно решить координатным методом, тригонометрическими методами, параллельным переносом и т. д. Существует не менее 10 решений этой задачи.

Задача 12. (Метод ключевой задачи) Внутри квадрата $ABCD$ дана точка M, отстоящая от вершин A, B и C соответственно на расстояния 7, 17 и 23 (рис. 12). Вычислить площадь квадрата.

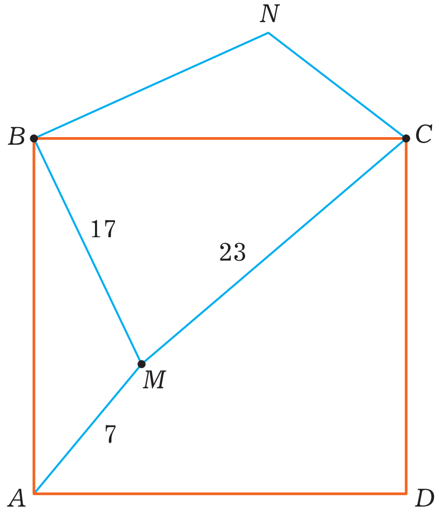


Рис. 12

Решение. Воспользуемся легко проверяемым известным утверждением: для любой внутренней точки M прямоугольника $ABCD$ имеет место соотношение

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2. \quad (1)$$

Подставив в соотношение (1) числовые данные, получаем, что $MD = 17$. Тогда $M \in AC$ и $AC = 30$,

$$BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}},$$

$$S_{ABCD} = \frac{900}{2} = 450.$$

Задачу можно решить координатным методом, методом поворота (даже двойного поворота). При решении этой задачи можно использовать осевую симметрию и тригонометрические методы. Всего задачу можно решить не менее чем десятью способами.

Задача 13. (Векторный метод) Около квадрата $ABCD$ описана окружность радиуса R, M – произвольная точка окружности (рис. 13). Доказать, что

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8R^2.$$

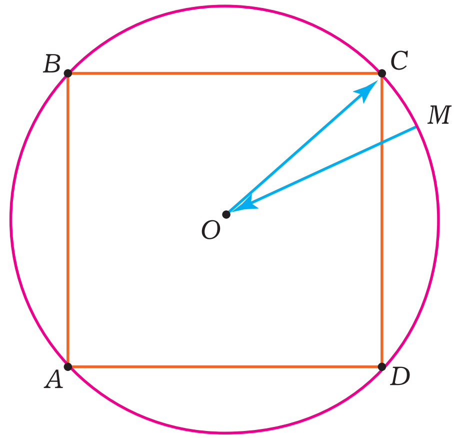


Рис. 13

Решение. Применяя правило треугольника для сложения векторов, имеем:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 =$$
$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 +$$
$$+ (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = 4\overrightarrow{MO}^2 +$$
$$+2\overrightarrow{MO}\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \overrightarrow{OA}^2 +$$
$$+\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OD}^2 = 8R^2 +$$
$$+2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = 8R^2,$$

так как

$$MO^2 = OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2 = R^2$$
$$\text{и } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$$

как сумма двух пар равных по модулю, но противоположно направленных векторов.

Задачу можно также решить координатным методом и при помощи тригонометрии.

Задача 14. (Теорема Пифагора) Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит две другие стороны на части 2 см и 23 см. Вычислить радиус окружности.

Решение. Пусть E – точка пересечения окружности со стороной BC, O – центр окружности и M – точка касания с AB. Из точки E опустим перпендикуляр EK (рис. 14) на радиус $MO = r$. Тогда $KO = r - 2$, $EK = 25 - r$,

$OE = r$. Применяя теорему Пифагора для треугольника OKE, имеем:

$$(25 - r)^2 + (r - 2)^2 = r^2,$$

или

$$r^2 - 54r + 629 = 0,$$

откуда $r_1 = 17$ и $r_2 = 37$. Второе значение не годится по смыслу. Значит, $r = 17$.

Задачу можно решить координатным и тригонометрическим способами.

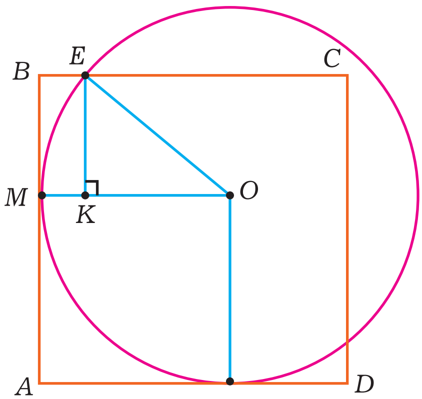


Рис. 14

Задача 15. (Координатный метод) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

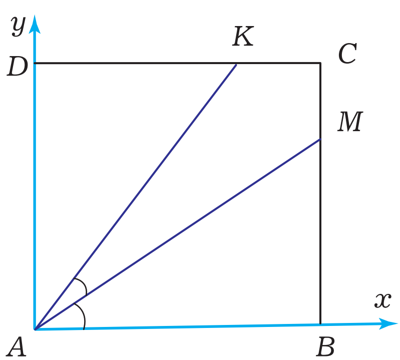


Рис. 15

Решение. Не нарушая общности, можно считать, что $AB = 1$. Введём прямоугольную систему координат так, чтобы вершины квадрата и точки на сторонах имели следующие координаты (рис. 15): $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $M(1;\alpha)$, $K(\beta;1)$. Используя формулу косинуса угла между двумя векторами, получаем:

$$\cos\angle BAM = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$\cos\angle MAK = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{1+\beta^2}\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

По условию эти углы равны, значит, равны их косинусы, откуда находим

$$\beta = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}.$$

Легко видеть, что

$$BM + DK = \alpha + \beta.$$

Выразим значение длины AK через $\alpha + \beta$:

$$AK = \sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha},$$

Мы получили, что $BM + DK = AK$.

Задачу можно решить также при помощи поворота.

Задача 16. (Тригонометрический метод) Точка M лежит внутри квадрата $ABCD$, а точка K вне его, причём треугольники AMD и CKD равносторонние (рис. 16). Докажите, что точки B, M и K лежат на одной прямой.

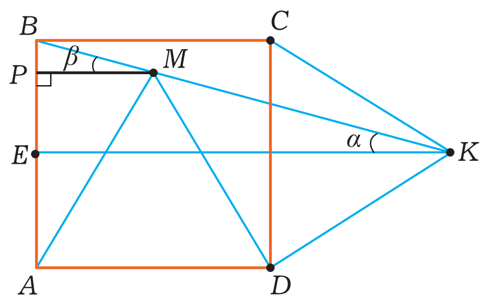


Рис. 16

Решение. Пусть $BC = 2$. Опустим из точек K и M перпендикуляры

KE и MP на сторону AB данного квадрата. Пусть $\angle BKE = \alpha$ и $\angle BMP = \beta$. Докажем, что $\alpha = \beta$. В самом деле,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BE}{EK} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{BP}{PM} = \frac{2-\sqrt{3}}{1}.$$

Следовательно, $\alpha = \beta$.

Задачу также можно решить при помощи поворота и координатным методом.

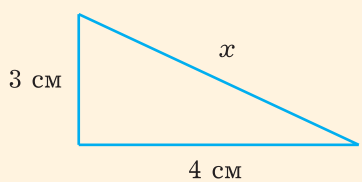
Литература

1. *Аверьянов Д.И.* Задачник по геометрии. 9 класс. – М.: Илекса, 2006.
2. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 9 класс. – М.: Просвещение, 2004.
3. *Ажгалиев У.* Десять способов решения одной олимпиадной задачи //«Потенциал. Математика. Физика. Информатика», 2013, № 3.
4. *Гордин Р.К.* Планиметрия. Задачник 7 – 9 класс. – М.: МЦНМО, 2008.
5. *Зеленяк О.П.* Решение задач по планиметрии. Москва. Санкт-Петербург. Киев, 2008.
6. *Калита Е.Н., Филиппова Г.Г.* 350 экзаменационных разноуровневых задач по математике с примерами решений. Минск: Юнипресс, 2003.
7. *Липилина В.В.* Сборник задач и другие материалы математических турниров и олимпиад. Оренбург, 2008.
8. *Толпыго А.К.* Тысяча задач Международного Турнира городов. – М.: МЦНМО, 2009.

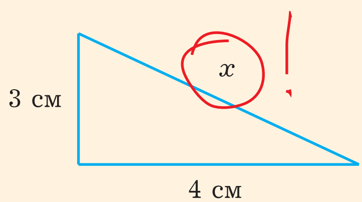
Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Отменная находчивость

– Найди x, если дан такой прямоугольный треугольник:



– Да вот же он:



Мотив выбора

– Мне кажется, что сын станет математиком.

– У него обнаружились математические способности?

– Дело не в этом... Сын узнал, что при умственной деятельности расходуется сахар и надо его пополнять в организме, а он – сладкоежка.