Епифанова Татьяна Николаевна
Учитель математики высшей категории ГБОУ «Школа №1358» г. Москва. Отличник народного просвещения, победитель конкурса лучших учителей РФ в рамках ПНПО в 2009 году, эксперт ЕГЭ. Автор ряда статей в научно-теоретических и методических журналах.

Решение нелинейных уравнений в целых числах

На факультативах мы рассматриваем задачи из разделов математики, изучению которых в общеобразовательной школе уделяется слишком мало времени. Но такие задания необходимы для подготовки школьников к олимпиадам и ЕГЭ по математике. Одна из таких тем: «Решение нелинейных уравнений в целых числах».

Уравнения $P=c$, где P – многочлен с целыми коэффициентами от одной или нескольких переменных, а c – целое число, можно решить, раскладывая левую и правую части на множители и используя единственность разложения из основной теоремы арифметики.

Пример 1. Найти все решения уравнения

$$x^2-xy-2y^2=-11$$

в целых числах.

Решение. Разложим на множители левую часть уравнения. Уравнение

$$x^2-xy-2y^2=0$$

является квадратным относительно x:

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4\left(-2y^2\right)}}{2}=\frac{y\pm 3y}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-y,\\ x=2y.\end{array}\right.$$

В результате исходное уравнение примет вид

$$(x+y)(x-2y)=-11.$$

Поскольку x и y – целые числа, то $x+y$ и $x-2y$ также целые числа, произведение которых равно –11.

Рассмотрим всевозможные разложения –11 на два целых множителя:

$$-11=1\cdot(-11)=11\cdot(-1)=(-1)\cdot 11=(-11)\cdot 1.$$

Осталось решить четыре системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases}x+y=1,\\ x-2y=-11,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3,\\ y=4;\end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases}x+y=11,\\ x-2y=-1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7,\\ y=4;\end{cases}$$

3) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x-2y=11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=-4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-11, \\ x-2y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7, \\ y=-4. \end{cases}$

Ответ. (–3; 4), (7; 4), (3; –4), (–7; –4).

Популярной идеей решения уравнений в целых числах является ограничение перебора. Один из способов – выражение одной переменной через другую.

Пример 2. Найти все решения уравнения $xy = 2x + 2y$ в целых числах.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$y(x-2) = 2x.$$

Очевидно, что $x = 2$ не является решением уравнения. Тогда

$$y = \frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow y = 2 + \frac{4}{x-2}.$$

По условию x и y – целые, поэтому число 4 должно делиться на $x - 2$ без остатка. Возможны варианты:

1) $\begin{cases} x-2=1, \\ y=6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2=2, \\ y=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2=4, \\ y=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-2=-4, \\ y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-2=-2, \\ y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x-2=-1, \\ y=-2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$

Ответ. (3; 6), (4; 4), (6; 3), (–2; 1), (0; 0), (1; –2).

Пример 3. Найти все решения уравнения

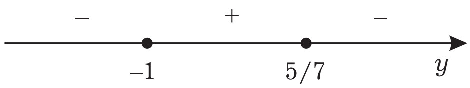
$$2y^2 + 4x^2 - 2xy - 2x + y = 1$$

в целых числах.

Решение. Решим квадратное уравнение относительно x:

$$x = \frac{1 + y \pm \sqrt{(5-7y)(y+1)}}{4}.$$

Ограничим перебор y, используя неотрицательность дискриминанта: $D \ge 0$, если $(5-7y)(y+1) \ge 0$.



$$\begin{cases} -1 \le y \le \frac{5}{7}, \\ y \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1, \\ y=0. \end{array} \right.$$

Если $y = -1$, то $x = 0$.

Если $y = 0$, то $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

По условию x и y – целые, поэтому

$$\begin{cases} x=0, \\ y=-1. \end{cases}$$

Ответ. (0; –1).

Пример 4. Найти все решения уравнения

$$3xy + 14x + 17y + 71 = 0$$

в целых числах.

Решение. Выразим y через x:

$$y = -\frac{14x+71}{3x+17} \Leftrightarrow y = -5 + \frac{x+14}{3x+17} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y = -15 + \frac{3x+42}{3x+17} \Leftrightarrow 3y = -14 + \frac{25}{3x+17}.$$

При целом x также будет целым $3y$, если 25 делится на $(3x+17)$, что возможно, если $3x+17$ равно ±1, ±5, ±25. Возможны варианты:

1) Если $3x+17=1$, то x не является целым.

2) Если $3x+17=-1$, то $x=-6$, и тогда $y=-13$.

3) Если $3x+17=5$, то $x=-4$, и тогда $y=-3$.

4) Если $3x+17=-5$, то x не является целым.

5) Если $3x+17=25$, то x не является целым.

6) Если $3x+17=-25$, , то $x=-14$, и тогда $y=-5$.

Ответ. (–6; –13), (–4; –3), (–14; –5).

Пример 5. Найти все решения уравнения

$$y^3-xy+2x-7y+11=0$$

в целых числах.

Решение. В уравнение неизвестное x входит в первой степени, поэтому выразим x через y:

$$y^3+x(2-y)-7y+11=0,$$

$$x=\frac{y^3-7y+11}{y-2}.$$

Чтобы было удобно разделить числитель на знаменатель, введём новую переменную $t=y-2$, тогда

$$y=t+2 \text{ и } y^3=t^3+6t^2+12t+8.$$

Выразим x через t:

$$x=\frac{t^3+6t^2+12t+8-7(t+2)+11}{t},$$

$$x=t^2+6t+5+\frac{5}{t}.$$

По условию t и x – целые, поэтому 5 делится на t без остатка. Таким образом, возможны варианты:

1) Если $t=1$, то $x=17$ и $y=3$.
2) Если $t=-1$, то $x=-5$ и $y=1$.
3) Если $t=5$, то $x=61$ и $y=7$.
4) Если $t=-5$, то $x=-1$ и $y=-3$.

Ответ. (17; 3), (–5; 1), (61; 7), (–1; –3).

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Я бы блистал в стенах Сорбонны,
Судьёй сидел бы в парике,
Но мне второй закон Ньютона
Отец внушил с ремнём в руке.
Старик Эйнштейн – лентяй, гулёна,
Путей стандартных не искал.
Чтоб не учить закон Ньютона,
Свою теорию создал.
Я, как Эйнштейн, прослыл кутилой,
Но не родил больших идей.
В науке так: не стал светилом –
Иди в народ, учи детей!
Ну как больному поколенью
Сегодня можно объяснить
Зачем таблицу умноженья
При калькуляторе учить!?
Не победит закон Ньютона
Всепоглощающую лень.
Пора признать вполне законным
Банальный кожаный ремень!