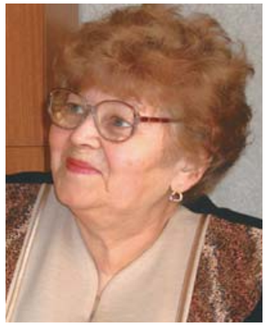

Колесникова Софья Ильинична
*Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ,
специалист ЗФТШ при МФТИ,
редактор журнала «Потенциал».
Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ»
и «Решение сложных задач ЕГЭ».*

Решаем неравенства, не решая неравенств

В статье, согласно заголовку, решаются неравенства вида

$$\sqrt{ax+b} \ge cx+d, \sqrt{ax^2+bx+c} \ge dx+f,$$

$$|ax+b| \ge cx^2+dx+f, |cx^2+dx+f| \ge ax+b$$

не способами решения неравенств, содержащих квадратные корни или модули, а с помощью графиков правой и левой частей неравенства и решения одного уравнения. Решения неравенств противоположного знака

$$\sqrt{ax+b} \le cx+d, \sqrt{ax^2+bx+c} < dx+f,$$

$$|ax+b| \le cx^2+dx+f,$$

$$|cx^2+dx+f| \le ax+b$$

«снимаются» с уже сделанных рисунков, используя найденные точки пересечения.

Сразу заметим, что в статье приведён нестандартный метод решения неравенств. Он требует от учащегося довольно свободного владения навыком построения графиков функций.

$$y = \sqrt{ax+b},\ y = \sqrt{ax^2+cx+d},$$

$$y = |ax+b|,\ y = |ax^2+cx+d|.$$

Идея написать эту заметку возникла из беседы-тестирования десятиклассника, сдавшего на отлично ОГЭ. Он решал неравенство $\sqrt{ax+b} \ge cx+d,$ аккуратно возведя в квадрат обе части, забывая о том, что оно имеет решение и тогда, когда возводить в квадрат нельзя. При напоминании об этом он неохотно согласился. Было видно, что что-то его не устраивает. Зато какое удовлетворение появилось у него в глазах, когда было продемонстрировано графическое решение неравенства – стало абсолютно понятно, что такое «случай», когда $cx+d<0$, и почему при этом нельзя возводить в квадрат обе части неравенства. Одновременно он выразил большое сожаление в том, что в школе графики не используют на практике.

Все задачи в статье взяты из вступительных экзаменов в московские вузы – МГУ, МФТИ, МИФИ и др.

1. Три способа решения неравенств вида $\sqrt{ax+b} \ge cx+d, \sqrt{ax+b} \le cx+d$

Пример 1. Решите неравенство

$$\sqrt{2x-1} > x-2$$

и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все его решения.

Первый способ (самый распространенный)

►Найдём сначала ОДЗ:

$$2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0{,}5 .$$

Теперь рассмотрим два случая.

1) Если $x-2<0$, то неравенство выполнено в ОДЗ, т. к. любое неотрицательное число больше любого отрицательного, т. е. $x \in \left[0,5;2\right)$.

2) Если $x-2 \ge 0$, то обе части неравенства в ОДЗ неотрицательны, поэтому после возведения их в квадрат получим равносильное неравенство, в котором ОДЗ *выполняется автоматически*:

$$\sqrt{2x-1} > x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ 2x-1 > x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ \left(x-1\right)\left(x-5\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(1;5\right) \Leftrightarrow x \in \left[2{,}5\right). \end{cases}$$

Объединяя решения двух пунктов, получаем, что $x \in \left[0{,}5;5\right)$. Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения неравенства, равна 4,5.

Ответ. $\left[0,5;5\right)$; 4,5.

Примечание 1. Самая распространённая ошибка школьников состоит в том, что они, забывая о «случаях», неправильно действуют в ОДЗ: сразу возводят в квадрат обе части, получая не всегда верное неравенство.

Вспомним одно из важнейших (но чаще всего забываемых) свойств неравенств:

если обе части неравенства *неотрицательны*, то после возведения в квадрат обеих частей получается равносильное неравенство, т. е.

если $f\left(x\right) \ge 0$ и $g\left(x\right) \ge 0$, то

$$f\left(x\right) \ge g\left(x\right) \Leftrightarrow f^2\left(x\right) \ge g^2\left(x\right)$$

Если же условие неотрицательности не выполнено, то может получиться как верное, так и неверное неравенство: $-1 > -2$, но $1 > 4$ неверно; $-12 < -3$, но $144 < 9$ неверно, $4 > -1$ и $16 > 1$ верно.

Примечание 2. Неравенство $\left(x-1\right)\left(x-5\right) < 0$ можно решать методом *интервалов*. А можно сразу записать ответ – ведь *известно*, что квадратный трёхчлен с положительным коэффициентом при квадрате переменной отрицателен в промежутке между его корнями и положителен в промежутке вне корней.

Второй способ – графический (самый быстрый).

Однако быстрее всего неравенство смогут решить те, кто «дружит» с графиками, кто быстро построит эскизы левой и правой частей неравенства. Тогда окажется, что вовсе не надо рассматривать «случаи», а *неравенства* $\sqrt{ax+b} \le cx+d$ или $\sqrt{ax+b} \ge cx+d$ могут быть решены с помощью *единственного уравнения* (которое приходится решать при любом способе).

Для этого построим графики функций $y=\sqrt{2x-1}$, $y=x-2$, затем посмотрим, где первый график расположен выше второго (рис.1). Видно, что $\sqrt{2x-1}>x-2 \Leftrightarrow x\in\left[0,5;x_0\right)$. Для нахождения решения останется найти x_0, т. е. решить *только* уравнение $\sqrt{2x-1}=x-2$ (и *не надо* рассматривать случаи разных знаков для $x-2$):

$$\sqrt{2x-1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0, \\ 2x-1=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ x=3\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

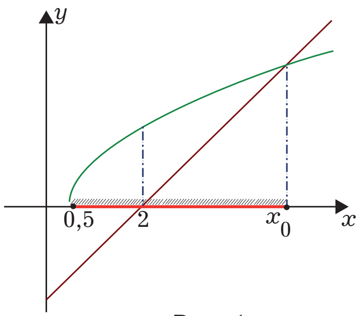

Рис. 1

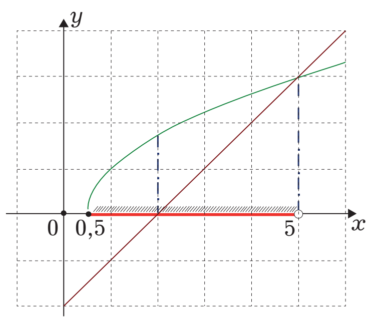

Рис. 2

Получаем сразу, что $x\in\left[0,5;5\right)$.

Ответ. 4,5. $\left[0,5;5\right)$

Примечание 3. На рис.1 хорошо видно, *почему* при стандартном решении необходимо рассматривать *два* случая.

1) На промежутке, где $x-2<0$, очевидно, что полупарабола $y=\sqrt{2x-1}$ расположена выше прямой $y=x-2$.

2) На промежутке, где $x-2\geq 0$, есть промежуток, где $\sqrt{2x-1}>x-2$, и промежуток, где $\sqrt{2x-1}\leq x-2$, поэтому приходится решать неравенство, чтобы найти тот промежуток, где выполнено именно заданное неравенство $\sqrt{2x-1}>x-2$.

Примечание 4. Если эскизы чертить аккуратно, то ответ получается прямо на рисунке – рис. 2.

Третий способ (с помощью *замены переменных*).

Заданное неравенство можно решить и *третьим* способом: сделать замену переменных, положив

$$t=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ x=\dfrac{t^2+1}{2}. \end{cases}$$

Тогда неравенство примет вид *системы* неравенств

$$\begin{cases} t\geq 0, \\ t>\dfrac{t^2+1}{2}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ t^2-2t-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t\geq 0, \\ t\in\left(-1;3\right) \end{cases} \Leftrightarrow t\in\left[0;3\right).$$

На самом деле, в этом случае ответ лучше записать не в виде промежутка $\left[0;3\right)$, а в виде неравенства $0\leq t<3$. Возвращаясь к старым переменным, получаем, что

$$0\leq\sqrt{2x-1}<3 \Leftrightarrow 0,5\leq x<5.$$

Наименьшая длина промежутка, на котором выполнено неравенство, равна 4,5.

Ответ. $\left[0,5;5\right)$; 4,5. ◄

Пример 1*. Решите неравенство

$$\sqrt{2x-1} \le x-2 .$$

►Заметим, что из рис. 1 или рис.2 сразу следует **Ответ**: $x \in [5;+\infty)$. ◄

2. Иррациональные неравенства

Пример 2. Решите неравенство

$$\sqrt{x+7} \ge 0,5(x-1).$$

►Прикинем эскизы графиков правой и левой частей – рис. 3. Видно, что $\sqrt{x+7} \ge 0,5(x-1) \Leftrightarrow x \in [-7;x_0)$.

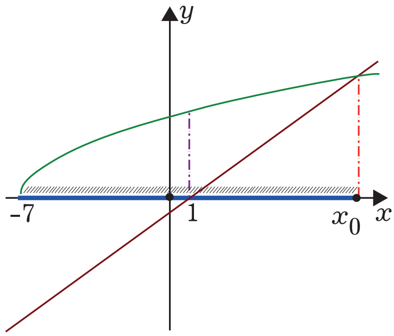

Рис. 3

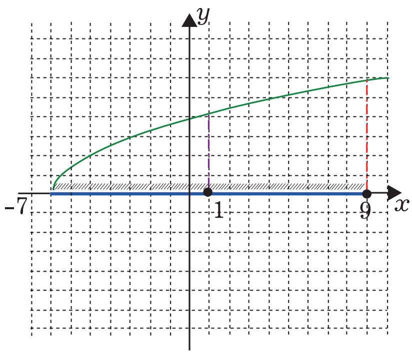

Рис. 4

Найдём x_0:

$$2\sqrt{x+7} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0, \\ 4x+28 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_0 = 9.$

Поэтому $x \in [-7;9]$.

На самом деле, если эскиз чертить аккуратно, то точка пересечения быстро «угадается» – рис. 4.

Ответ. $[-7;9]$.◄

Пример 3. Решите неравенство

$$2-3x < \sqrt{4+9x-9x^2}.$$

►Найдём ОДЗ:

$$4+9x-9x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right].$$

Попробуем и это неравенство решить с помощью одного уравнения.

Для этого начертим сначала пунктиром параболу $y_1 = 4+9x-9x^2$ на отрезке $\left[-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right]$ – рис. 5, затем «прикинем» сплошной линией $y_2 = \sqrt{4+9x-9x^2}$ и проведём прямую $y_3 = 2-3x$ – рис. 5.

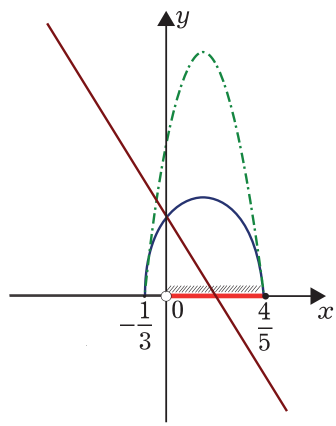

Рис. 5

Видно, что пересечение одно, и оно очевидно. Очевиден и

Ответ. $\left(0;\frac{4}{3}\right]$.

Интересно, что здесь даже уравнения не пришлось решать. А это задача с олимпиады МФТИ! ◀

Пример 4. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-6x}<8+2x.$$

► ОДЗ:

$x^2-6x\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[6;+\infty)$.

Рисуем сначала эскиз $y_1=x^2-6x$ в ОДЗ – рис. 6. Затем $y_2=\sqrt{x^2-6x}$. Заметим, что ветви графика $y_2=\sqrt{x^2-6x}$ «изогнулись» по-другому.

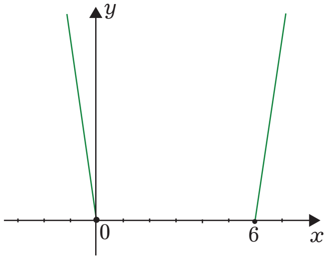

Рис.6

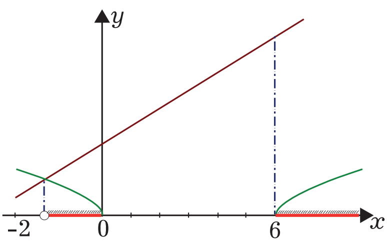

Рис.7

Теперь строим $y_3=8+2x$ – рис.7.

Видно, что решением является множество $x\in(x_0;0]\cup[6;+\infty)$. Видно также, что $x_0<0$. Можно попробовать угадать, а можно найти вычислением:

$$\sqrt{x^2-6x}=8+2x \Leftrightarrow \begin{cases}8+2x\ge 0,\\ x^2-6x=64+32x+4x^2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\ge -4,\\ 3x^2+38x+64=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-19\pm 13}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ. $(-2;0]\cup[6;+\infty)$. ◀

Пример 5. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2-7x-4}>-x-\frac{1}{4}.$$

► Находим ОДЗ:

$$2x^2-7x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[4;+\infty).$$

Строим

$y_1=\sqrt{2x^2-7x-4}$, $y_2=-x-\dfrac{1}{4}$ – рис. 8.

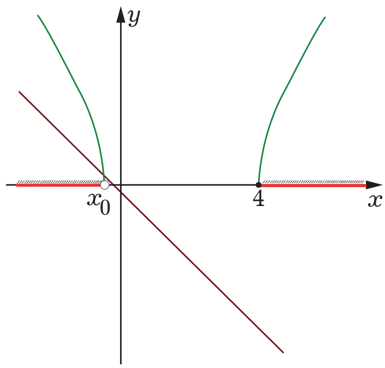

Рис. 8

Видно, что $x\in(-\infty;x_0)\cup(4;+\infty)$.

Найдём x_0:

$$\sqrt{2x^2-7x-4}=-x-\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x-\dfrac{1}{4}\ge 0,\\ 2x^2-7x-4=x^2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{16}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -\dfrac{1}{4},\\ x=\dfrac{15\pm\sqrt{290}}{4}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{15-\sqrt{290}}{4}.$$

Ответ. $x\in\left(-\infty;\dfrac{15-\sqrt{290}}{4}\right)\cup[4;+\infty)$.

Как видим, здесь нам ответ угадать уже не удастся! ◀

Пример 6. Решите неравенство

$$8+6\cdot\left|3-\sqrt{x+5}\right|>x.$$

►Попробуем прикинуть графики, они здесь несколько сложнее. Построим сначала $y_1 = 18 - 6\sqrt{x+5}$ – пунктир на рис. 9, затем отразим отрицательную часть относительно оси Ox – получим график $y_2 = \left|18 - 6\sqrt{x+5}\right|$ – сплошная линия (рис. 9). Теперь строим прямую $y_3 = x - 8$ – рис. 9.

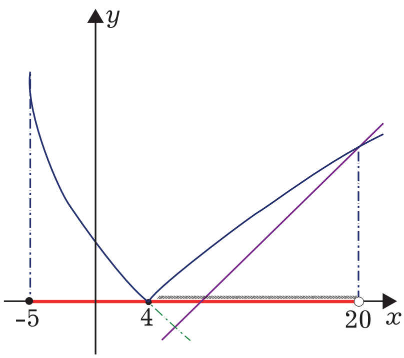

Рис. 9

Видно, что решением является интервал $x \in \left(-5, x_0\right)$, где x_0 – точка пересечения прямой с отражённой частью графика $y_1\left(x\right)$, т. е. с $y_2 = \left|18 - 6\sqrt{x+5}\right|$, когда

$$18 - 6\sqrt{x+5} \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+5} - 3 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 5 \ge 9 \Leftrightarrow x \ge 4$$

а тогда $y_2 = 6 \cdot \left(\sqrt{x+5} - 3\right)$.

Найдём x_0:

$$6 \cdot \left(\sqrt{x+5} - 3\right) = x - 8 \Leftrightarrow 36x + 180 =$$

$$= x^2 + 20x + 100 \Leftrightarrow x = 8 \pm 12 \overset{x\ge4}{\Leftrightarrow} x_0 = 20.$$

Ответ. $\left[-5;20\right)$.◄

Пример 7. Решите неравенство

$$\sqrt{5+x} - \sqrt{8-x} \le \sqrt{3-x}.$$

Ответ. $\left[-5;\dfrac{-4+\sqrt{316}}{5}\right]$.

►Неравенство

$$\sqrt{5+x} - \sqrt{8-x} \le \sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5+x} \le \sqrt{8-x} + \sqrt{3-x}$$

мы решим с помощью одного уравнения. Для этого начертим эскизы правой и левой частей неравенства. Сначала прикинем пунктиром графики $y_1 = \sqrt{8-x}$, $y_2 = \sqrt{3-x}$. Затем «сложим» их – сумма двух монотонно убывающих функций является монотонно убывающей – получим $y_3 = \sqrt{8-x} + \sqrt{3-x}$ (контрольной точкой может быть значение в точке $x = 0$: $y_3\left(0\right) = \sqrt{8} + \sqrt{3}, 3 < \sqrt{8} + \sqrt{3} < 4$) – сплошная линия на рис. 10. Теперь можно начертить $y_4 = \sqrt{5+x}$ – рис. 10.

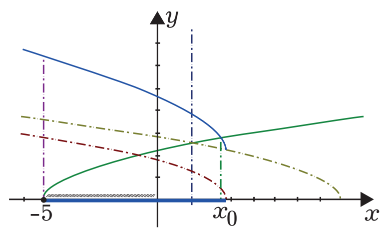

Рис.10

Из рисунка 10 видно, что решением неравенства является отрезок $\left[-5;x_0\right]$, где x_0 – точка пересечения графиков левой и правой частей. Найдем x_0:

$$\sqrt{5+x} = \sqrt{8-x} + \sqrt{3-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5+x \ge 0, \\ 5+x = 8-x+2\sqrt{8-x}\sqrt{3-x}+3-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5+x \ge 0, \\ -6+3x = 2\sqrt{8-x}\sqrt{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5+x \ge 0, \\ 3-x \ge 0, \\ -6+3x \ge 0, \\ 36-36x+9x^2 = 96-44x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ 5x^2+8x-60 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \frac{-4+\sqrt{316}}{5}.$$

Ответ. $\left[-5;\dfrac{-4+\sqrt{316}}{5}\right]$.◄

Пример 8. При каждом значении параметра a решите неравенство $\sqrt{x+2a} > x+\sqrt{2a}$.

►Переобозначим параметр, чтобы сразу было видно, что он принимает только неотрицательные значения: $\sqrt{2a} = b^2$. Тогда неравенство примет вид

$$\sqrt{x+b^4} > x+b^2.$$

Теперь видно, что поведение решения будет зависеть от того, b^2 больше или меньше 1, т. к. если $b^2 > 1$, то $b^4 > b^2 \Leftrightarrow -b^4 < -b^2$, и начало полупараболы будет расположено левее прямой – рис.11 , а, если $b^2 < 1$, то $b^4 < b^2 \Leftrightarrow -b^4 > -b^2$, и начало полупараболы будет расположено правее прямой – рис.12–13.

Прикинем эскиз графиков правой и левой частей неравенства.

1. Пусть

$$b^2 > 1 \Rightarrow b^4 > b^2 \Leftrightarrow 2a > \sqrt{2a} \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}.$$

Тогда эскиз имеет вид как на рис. 11.

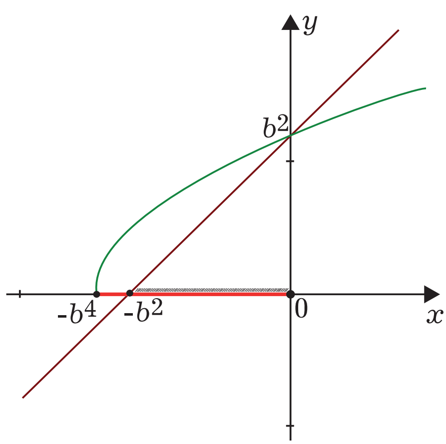

Рис. 11. $b^2 = 1{,}2$

Видно, что тогда

$$\sqrt{x+b^4} > x+b^2 \Leftrightarrow x \in \left[-b^2;0\right),$$

или, в исходных обозначениях параметра, $x \in \left[-\sqrt{2a};0\right)$.

2. Очевидно, что если $b^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2a} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$, то $x \in (-1;0)$.

3. Пусть

$$b^2 < 1 \Rightarrow b^4 < b^2 \Leftrightarrow 2a < 2\sqrt{2a} \Leftrightarrow 0 \le a < \frac{1}{2}.$$

Тогда полупарабола будет начинаться правее прямой – рис. 12 и 13. Проверим, каковы тогда точки пересечения полупараболы и прямой:

$$\sqrt{x+b^4} = x+b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+b^2 \ge 0, \\ x+b^4 = x^2+2xb^2+b^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -b^2, \\ x^2+\left(2b^2-1\right)x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1-2b^2 \ge -b^2 \end{array}\right.$$

$$\overset{b^2<1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \begin{cases} b^2 < 1, \\ x = 1-2b^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

а) Пусть

$$1-2b^2 \le 0 \Rightarrow 1 \le 2b^2 < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \le 2\sqrt{2a} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le a < \frac{1}{2}.$$

Тогда $x \in \left(1-2b^2;0\right)$ – рис. 12, или, в исходных обозначениях параметра, $x \in \left(1-2\sqrt{2a};0\right)$.

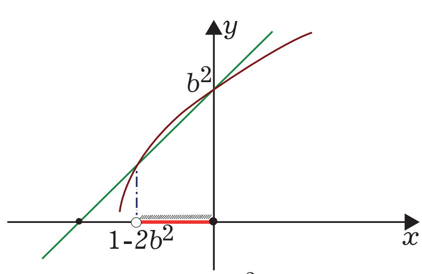

Рис.12. $b^2 = 0{,}7$

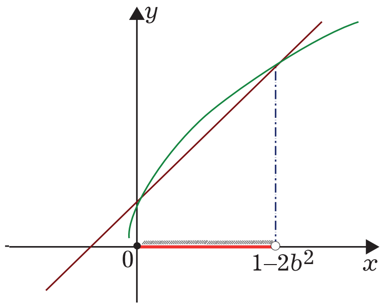

Рис. 13. $b^2 = 0,2$

б) Пусть

$1-2b^2 > 0 \Leftrightarrow 0 \le 2b^2 < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le 2\sqrt{2a} < 1 \Leftrightarrow 0 \le a < \frac{1}{8}$.

Тогда $x \in \left(0;1-2b^2\right)$ – рис. 13 и 14, или, в исходных обозначениях параметра $x \in \left(0;1-2\sqrt{2a}\right)$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\sqrt{4x^3+8x^2-5x} \le 2x-1 .$$

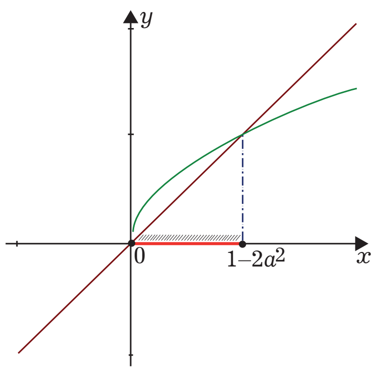

Рис. 14. b=0

Ответ.

$a < 0 : \varnothing$;

$0 \le a \le \frac{1}{8} : x \in \left(0;1-2\sqrt{2a}\right)$;

$\frac{1}{8} < a \le \frac{1}{2} : x \in \left(1-2\sqrt{2a};0\right)$;

$\frac{1}{2} < a : x \in \left[-2a;0\right)$. ◄

► Сейчас перед нами более трудная задача – под корнем многочлен 3-й степени!

Попробуем найти его корни. Так как один корень равен 0, то задача разрешима легко:

$$4x^3+8x^2-5x = x\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Прикинем эскиз графика функции $y_1 = x\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ – пунктир на рис. 15. Теперь «извлечём корень » – построим эскиз графика функции $y_2 = \sqrt{4x^3+8x^2-5x}$, а затем график прямой $y_3 = 2x-1$ – рис. 15.

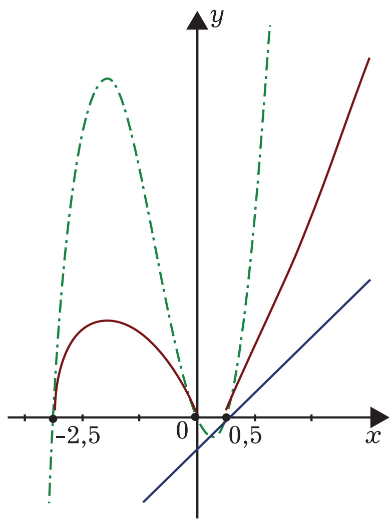

Рис.15.

Что мы видим? Неравенство, а решением является число. Вот так!

Ответ. 0,5.◄

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите длину промежутка, в котором выполнено неравенство

$$\sqrt{2x+34} \le 7 - x\sqrt{b^2-4ac}\ .$$

Ответ. 18.

2. Найдите длину промежутка, в котором выполнено неравенство

$$\sqrt{2x-1} > x-2\ .$$

Ответ. 4,5.

3. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства

$$\sqrt{25-x} > 13-x.$$

Ответ. 25.

Решите неравенства 4 – 8.

4. $\sqrt{7-x}-\sqrt{2+x} \le \sqrt{9+x}$.

Ответ. $\left[\dfrac{10-2\sqrt{95}}{5};7\right]$.

5. $\sqrt{x^3+8x^2-20x} \le 2x-4$.

Ответ. 2.

6. $\sqrt{3x^2-8x-3} > \dfrac{1-2x}{3}$.

Ответ. $\left(-\infty;\dfrac{34-30\sqrt{2}}{23}\right)\cup\left[3;+\infty\right)$.

7. $\sqrt{x^3+x^2-2\text{x}+1} \le x$.

Ответ. 1.

8. Решите неравенство

$$2-3x < \sqrt{4+3x-x^2}.$$

и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все его решения. **Ответ.** $\left(0;4\right]$; 4.

9. При каждом значении параметра a решите неравенство $\sqrt{x+4b^2} > x+2\left|b\right|$.

Ответ : $0 \le \left|b\right| \le \dfrac{1}{4}: x \in \left(0;1-4\left|b\right|\right)$;

$\dfrac{1}{4} < \left|b\right| \le \dfrac{1}{2}: x \in \left(1-4\left|b\right|;0\right)$;

$\left|b\right| > \dfrac{1}{2}: x \in \left[-4b^2;0\right)$.

3. Неравенства с модулем

Пример 1. (ЕГЭ) Решите неравенство $\left(\left|x+2\right|-3\right)\left(\sin x-\pi\right) \ge 0$ и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все его решения.

► *Первый способ* (традиционный).

Неравенство довольно простое. Решаем:

$$\left(\left|x+2\right|-3\right)\left(\sin x-\pi\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|x+2\right|-3 \le 0.$$

Раскроем модуль:

$$\left|x+2\right|-3 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2 \ge 0,\\ x+2 \le 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x+2 \le 0,\\ -x-2 \le 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}-2 \le x \le 1,\\ -5 \le x \le -2\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[-5;1\right].$$

Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения, равна 6.

Ответ. $\left[-5;1\right]$, 6.

Второй способ (применение равносильных преобразований)

Можно решение сделать короче, *без раскрытия* модуля, а потому быстрее.

Вспомним, что

$$\left|f\left(x\right)\right| \le g\left(x\right) \Leftrightarrow \begin{cases}f\left(x\right) \le g\left(x\right),\\ f\left(x\right) \ge -g\left(x\right).\end{cases}$$

Тогда

$$\left|x+2\right|-3 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x+2 \le 3,\\ x+2 \ge -3\end{cases} \Leftrightarrow \in\left[-5;1\right].$$

Ответ. $\left[-5;1\right]$, 6.

Третий способ (графический)

Начертим графики функций $y_1 = |x+2|, y_2 = 3$ – рис. 16.

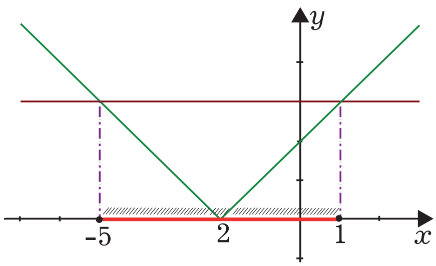

Рис. 16

Ответ виден на рис. 16: $x \in [-5;1]$.

Ответ. $[-5;1]$, 6. ◄

Пример 2. Решите неравенство и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все решения неравенства $|2x+9| \le x+18$.

Ответ. $[-9;9]$, 18.

►Начертим графики левой и правой частей неравенства $y_1 = |2x+9|, y_2 = x+18$ – рис. 17.

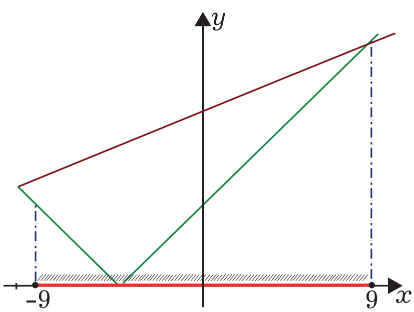

Рис. 17

Если чертить по клеточкам, то ответ получится сразу, без всяких вычислений: $x \in [-9;9]$.

Если же рисовать эскиз, то, чтобы получить точки пересечения, придётся решить уравнение

$$|2x+9| = x+18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+18 \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x+9 = x+18, \\ 2x+9 = -x-18 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -9 \end{array}\right. \Rightarrow l = 18.$$

Ответ. $[-9;9]$, 18. ◄

Пример 3. Решите неравенство и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все решения неравенства $8|x-8| \le 32+4x-x^2$.

►Начертим сначала параболу $y_1 = 32+4x-x^2$, затем $y_2 = 8|x-8|$ – рис. 18.

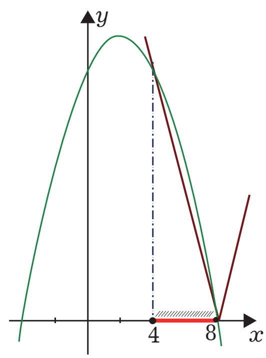

Рис. 18

Видно, что «угол » опирается на одну из точек, где $y_1 = 32+4x-x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = -4 \end{array}\right.$, т. е. в точку $x = 8$. Есть вторая точка пересечения параболы и левой стороны «угла» (там $|x-8| = 8-x$), пока не очень ясно.

Проверим:

$$\begin{cases} x < 8, \\ 64-8x = 32+4x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 8, \\ x^2-12x+32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Отсюда следует, что $8|x-8| \le 32+4x-x^2 \Leftrightarrow x \in [4;8]$, и наименьшая длина промежутка, который содержит все решения неравенства, равна 4.

Ответ. $[4;8]$, 4.

Примечание. Если чертить на клеточной бумаге, то ответ можно «угадать».◄

Пример 4. Решите неравенство $\left|x^2-3x\right| \le 2x-4$.

►Начертим параболу $y_1 = x^2-3x$ – пунктирная линия, затем $y_2 = \left|x^2-3x\right|$ – сплошная линия и прямую $y_3 = 2x-4$ – рис.19.

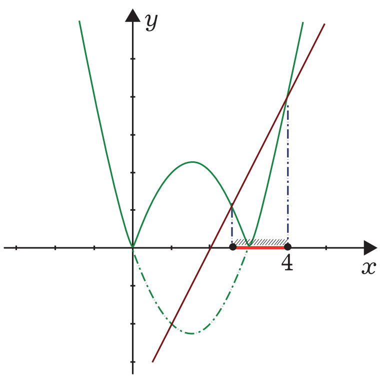

Рис. 19

Видно, что прямая пересекает обе части: и «опрокинутую», и саму параболу.

Найдём точки пересечения:

$$\left|x^2-3x\right| = 2x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x = 2x-4, \\ x^2-3x = -2x+4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 1; \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}. \end{array}\right.$$

Отсюда следует, что $x \in \left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};4\right]$.

Ответ. $\left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};4\right]$.

Примечание. Здесь уже «угадать» не удастся.◄

Пример 5. Решите неравенство и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все решения неравенства $5|x-2| \ge 3x^2-6x-4$.

►Начертим графики правой и левой частей. Видно, что парабола пересекается с обеими сторонами «угла» – рис. 20.

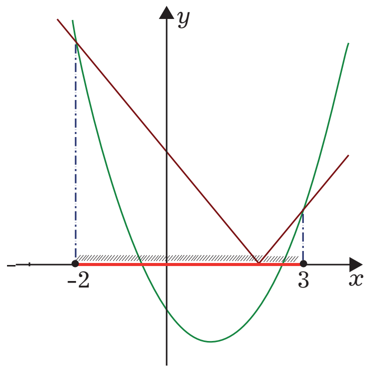

Рис. 20

Найдем точки пересечения:

$$5|x-2| = 3x^2-6x-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ 5x-10 = 3x^2-6x-4; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \le 0, \\ -5x+10 = 3x^2-6x-4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ 3x^2-11x+6 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \le 0, \\ 3x^2-x-14 = 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-2;3]$$

Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения неравенства, равна 5.

Ответ. $[-2;3]$, 5.

Примечание. Если чертить на клеточной бумаге, то ответ можно «угадать».◄

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все решения соответствующего неравенства.

1. $|2x-6| \le x$

Ответ. $[2;6]$, 4.

2. $|3x-8| \le x+16$

Ответ. $[-2;12]$, 14.

3. $x^2+9x+|3x+27| \le 0$.

Ответ. $[-9;-3]$, 6.

4. $|x^2-2x-3| < 3x-3$.

Ответ. $(2;5)$.

5. $x^2+|6x-24| \le 16$.

Ответ. 2.

Каледоскоп Каледоскоп Каледоскоп

Полноценные робомобили появятся в городах к 2040 году

Консалтинговая компания PwC подготовила отчет о том, как ИИ повлияет на человечество. Среди множества положительных результатов для самых различных областей есть прогноз для транспортной отрасли. По мнению экспертов компании, весь транспорт в городах станет полностью автономным к 2040 году.

ИИ сильно изменит транспорт. Главное — он сделает его более эффективным. PwC прогнозирует, что именно ИИ позволит людям пользоваться транспортом только тогда, когда это нужно. Основой этому станут различные сервисы беспилотного такси. Такое само приедет и само отвезет, куда нужно. Из-за тотальной подключенности за транспортной системой будущего будет гораздо проще следить. Делать это будет опять же ИИ. Он сможет корректировать маршруты транспорта, направлять больше автобусов в самые загруженные области. Но реально это будет опять же из-за того, что под управлением глобального транспортного искусственного интеллекта будут локальные ИИ- в каждом автобусе, такси или трамвае. Такие без ошибок выполнят любую команду, и сделают это быстрее и эффективнее человека.

В компании считают, что до уровня, когда все это сможет бесшовно и быстро взаимодействовать, технологии дорастут через 22 года. Пока они отмечают отдельные автономные решения, вроде беспилотников Waymo, но в масштабах всей транспортной системы сегодня они конечно же ничего не значат. Но сейчас особенно важное время для транспорта будущего. Завершаются основные тесты беспилотников, на их основе чиновники принимают решения и выпускают законы. Уже по этим законам индустрии жить дальше. Поэтому пока автономный транспорт упирается не только в технологии, но и в законы. По мнению PwC, два десятка лет достаточный срок, чтобы справиться и с тем, и с другим.

Другие специалисты тоже считают беспилотный транспорт переломной технологией. Аналитическая компания IHS Markit прогнозирует, что за относительно короткий промежуток времени беспилотники захватят более четверти рынка новых автомобилей. В компании говорят, что к 2040 году 26% новых автомобилей, попадающих на рынок, будут беспилотными — это 33 млн в год.