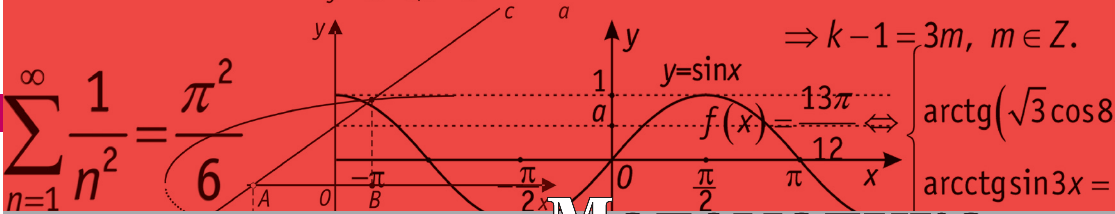

Вавилов Валерий Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 23 книг, более 300 статей научного, методического и научно-популярного характера.

Разрезание и складывание многоугольников

Одной из ярких геометрических жемчужин является теорема о том, что любой многоугольник можно разрезать на конечное число многоугольных частей, из которых можно сложить квадрат. Ниже приведено одно из конструктивных доказательств этой теоремы. В конце статьи сформулированы два проекта, которые могут стать началом самостоятельных исследований школьников.

1. Два многоугольника называются *равносоставленными*, если один из них можно разбить (разрезать) на некоторые другие многоугольники, из которых затем можно составить второй многоугольник. Равносоставленные многоугольники, конечно, имеют одинаковую площадь (равновелики), и поэтому свойство равносоставленности позволяет иногда получить формулы для вычисления площадей. Примером может служить сравнение (вычисление) площадей параллелорама и прямоугольника: проводятся две высоты параллелограмма, которые являются сторонами прямоугольника той же площади (рис. 1).

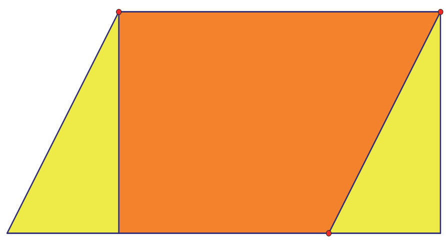

Рис. 1

Таким же способом Евклид в своих знаменитых «Началах» (III в. до н. э.) доказывал, что *параллелограммы $ABCD$ и $ABC'D'$ с общей стороной AB и равными соответствующими им высотами равновелики.*

Для доказательства (рис. 2) на прямой AB отложим последовательно ряд отрезков AB и через каждую точку деления проведём прямые, параллельные отрезкам AD и AD'. Тогда полоса между параллельными

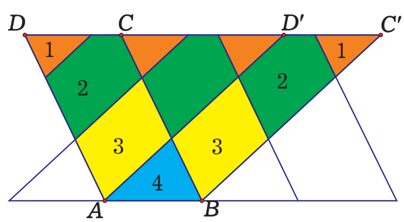

Рис. 2

прямыми AB и CD разобьётся на ряд многоугольников; фрагмент этого разбиения полосы и показан на рис. 2. Фигуры, отмеченные одинаковыми цифрами на рис. 2, равны (докажите это самостоятельно) и поэтому имеют одинаковые площади. Кроме того, из рис. 2 видно, что параллелограммы $ABCD$ и $ABC'D'$ составлены из одинаковых частей 1, 2, 3 и 4.

2. При помощи разрезания и складывания американский учёный Генри Перигаль получил любопытное доказательство теоремы Пифагора. Его способ состоит в следующем. Сначала квадраты со сторонами a и b (катеты треугольника, c – гипотенуза) прикладываются друг к другу как на рис. 3, а затем эта фигура (два квадрата) разбивается на три части: два равных прямоугольных треугольника с катетами a и b (зелёный и розовый) и «стрелка» (белый пятиугольник на рис. 3).

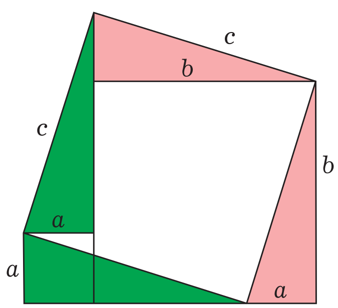

Рис. 3

Теперь, отрезая эти два разноцветных треугольника и приставляя их так, как показано на рис. 3, мы получим квадрат со стороной c (докажите это самостоятельно). Тем самым два квадрата со сторонами a и b равносоставлены с квадратом со стороной c, и поэтому их площади равны; следовательно, $c^2 = a^2 + b^2$. Из этого рассмотрения следует не только теорема Пифагора, но и следующее утверждение: *любой набор из конечного числа квадратов можно разрезать на части, из которых можно составить один квадрат*. Последнее утверждение получается последовательным применением рассмотренного приёма разрезания двух квадратов на 5 частей (рис. 3).

3. Произвольный треугольник, конечно, можно разрезать на части, из которых складывается прямоугольник. Действительно, выберем наибольшую сторону треугольника в качестве основания и продлим среднюю линию треугольника, ему параллельную (рис. 4). Проведя перпендикуляры на неё из вершин основания треугольника, по свойству средней линии мы получим две пары равных треугольников, что и доказывает нужное утверждение: нужно отрезать два треугольника с номерами 1 и 2 от исходного треугольника и приставить их к трапеции так, как показано на рис. 4.

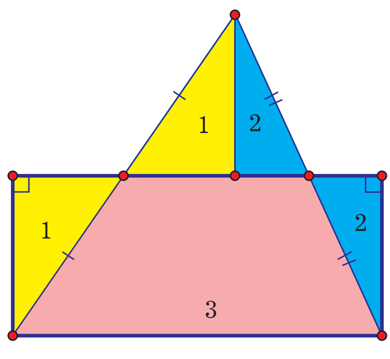

Рис. 4

4. Докажем, что *прямоугольник и равновеликий ему квадрат равносоставлены*.

Пусть стороны прямоугольника равны a и b, $a \geq b$. Рассмотрим три случая.

1) Если $a = b$, то доказывать нечего, так как прямоугольник равен квадрату.

2) Пусть $b < a \leq 4b$.

Обозначим через c сторону квадрата $AEFH$, равновеликого прямоугольнику $ABCD$, и расположим квадрат и прямоугольник так, как показано на рис. 5; $c^2 = ab$.

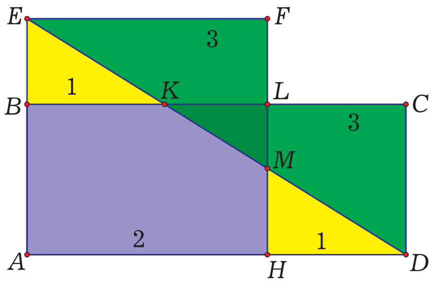

Рис. 5

Из подобия треугольников MDH и EDA замечаем, что $MH \cdot AD = AE \cdot HD$ и, тем самым,

$$MH = AE \cdot \frac{HD}{AD} = c \cdot \frac{(a-c)}{a} = c - \frac{c^2}{a} = c - b.$$

В рассматриваемом случае $4b \geq a$, и поэтому $4b^2 \geq ab = c^2$. Следовательно, $2b \geq c$, и поэтому $c - b \leq b$. Другими словами, данный случай отвечает взаимному расположению квадрата и прямоугольника, когда точка M принадлежит отрезку HL.

Заметим, что $EB = c - b = MH$; следовательно, прямоугольные треугольники MHD и EBK равны. Также равны и прямоугольные треугольники EFM и KCD, так как

$$FM = c - (c - b) = CD.$$

Таким образом, и прямоугольник, и квадрат состоят из одних и тех же трёх частей – из пятиугольника $ABKMH$, треугольников MHD и EBK и треугольников KCD и EFM (на рис. 5 они обозначены числами 1, 2 и 3). Итак, рассматриваемый прямоугольник и равновеликий ему квадрат равносоставлены.

3) Пусть $a > 4b$. В этом случае построим новый прямоугольник, основание которого a' в два раза меньше, а высота b' в два раза больше соответственно основания и высоты данного прямоугольника. Для этого разрежем прямоугольник на два равных прямоугольника и приставим полученные части друг к другу. Если для вновь построенного прямоугольника выполняется неравенство $a' < 4b'$, то это случай 2, и мы его можем разрезать на части, из которых можно сложить квадрат. При этом каждая из половинок исходного прямоугольника разрежется на некоторые части, из которых можно сложить исходный прямоугольник, а также и квадрат (расположив их, конечно, уже другим способом). Если же на первом шаге «утолщения» исходного прямоугольника мы ещё не достигнем нужного нам неравенства $a' < 4b'$, то будем повторять эту операцию «утолщения» до тех пор, пока неравенство не будет выполняться, а дальше можно будет разрезать этот вновь полученный прямоугольник так, как это делалось в случае 2.

Итак, нами установлено, что равновеликие прямоугольник и квадрат равносоставлены.

Замечание. Выше (рис. 5) установлено, что прямоугольник (с условием $b < a \leq 4b$) можно разрезать на три части, из которых можно сложить квадрат. Однако это разбиение не является единственным. Можно, например, привести пример нужного разбиения прямоугольника на четыре части (рис. 6).

Упражнение 1. Убедитесь, что показанное на рис. 6 превращение прямоугольника в квадрат действительно реализуемо.

Упражнение 2 (лабораторная работа). Используя плотную бумагу, проделайте описанные построения и разрежьте правильный треугольник на пять частей, из которых можно сложить прямоугольник, параллелограмм и квадрат.

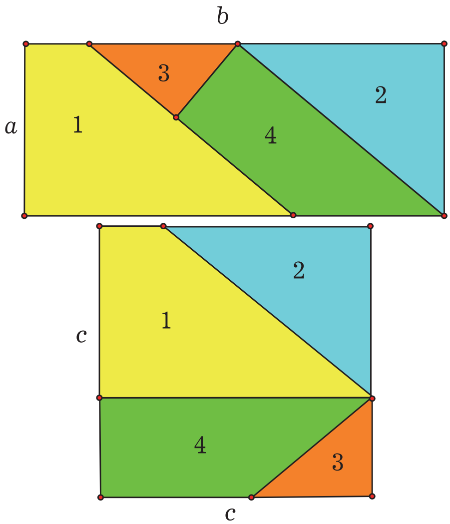

Рис. 6

5. Сейчас мы докажем теорему, которая упоминалась в начале статьи. Считается, что её доказали независимо друг от друга венгерский математик, драматург и поэт Фаркаш Бойяи (1832), друг К.Ф. Гаусса, и любитель математики Пауль Гервин (годом позже), который был лейтенантом пехотного полка прусской армии. Доказательство Фаркаша Бойяи (он отец Яноша Бойяи, одного из создателей неевклидовой геометрии) было довольно громоздким, а доказательство П. Гервина элегантным и простым, которое и по сей день излагается в математической литературе.

Теорема Бойяи – Гервина. *Два простых многоугольника равновелики тогда и только тогда, когда они равносоставлены.*

Доказательство. Напомним, что простым называется такой многоугольник, граница которого представляет собой одну замкнутую ломаную линию без самопересечений.

Если два многоугольника равносоставлены, то они имеют одинаковые площади. Доказательства требует только обратное утверждение теоремы.

Пусть P и Q – два данных равновеликих простых многоугольника. Идея доказательства состоит в следующем. Рассмотрим сначала многоугольник P и покажем, что его можно разрезать на части, из которых можно сложить квадрат. Это же справедливо и для многоугольника Q. Мы получим два одинаковых квадрата (так как их площади равны), и каждый из них имеет свою систему разрезов – одна для P, а другая для Q. Теперь возьмём точно такой же третий квадрат и проведём обе системы разрезов с первых двух квадратов. Разрезав по этим линиям квадрат, мы получим части, из которых можно составить как P, так и Q.

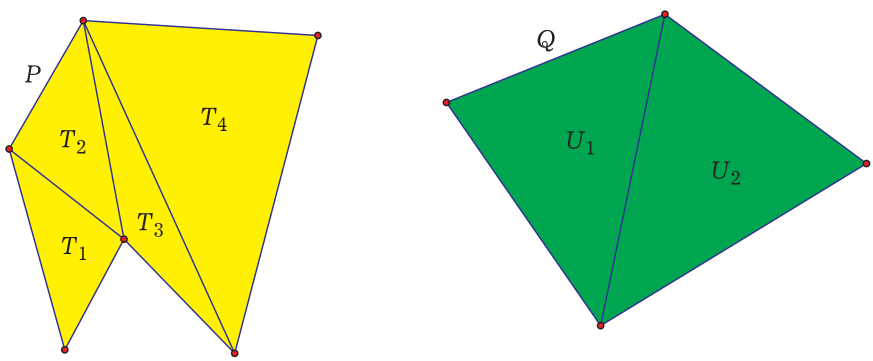

Рис. 7

Приступим к реализации этой идеи.

Проводя последовательно внутренние диагонали в многоугольниках, разрежем P на треугольники $T_1, T_2, \dots, T_n$ (на рис. 7 показаны примеры нужных разбиений как для P, так и для Q), все вершины которых являются вершинами многоугольника P. Сделаем это так. Проведём какую-либо внутреннюю диагональ в многоугольнике P (такая существует, но это требует доказательства, которое мы здесь опускаем). Она разобьёт многоугольник P на два новых простых многоугольника. Если они не треугольники, то в каждом из них снова проведём по одной внутренней диагонали и т. д. Ясно, что описанная процедура приведёт к некоторому нужному разбиению на треугольники. Однако нужно иметь в виду, что такая триангуляция (разбиение на треугольники), вообще говоря, не единственна. Можно, например, выбирать на каждом шаге различные диагонали.

По доказанному выше каждый из треугольников $T_1, T_2, \dots, T_n$ можно разрезать на части и получить из них некоторые прямоугольники $R_1, R_2, \dots, R_n$; они, тем самым, равносоставлены с $T_1, T_2, \dots, T_n$ соответственно (рис. 8).

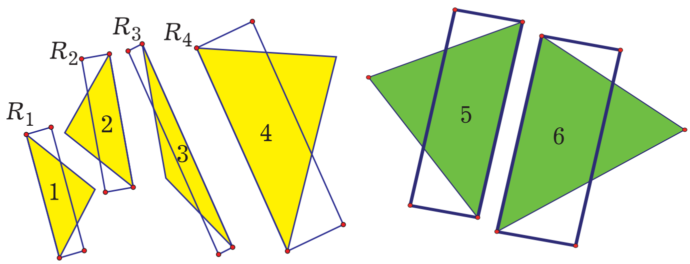

Рис. 8

По доказанному выше каждый из полученных прямоугольников равносоставлен с квадратом (рис. 9); получаем множество квадратов $S_1, S_2, \dots, S_n$.

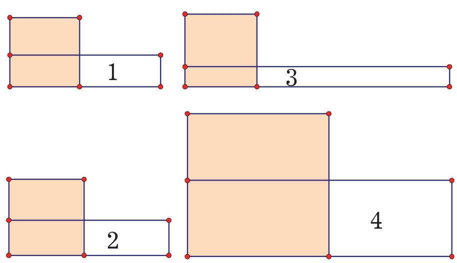

Рис. 9

Квадрат S, равный по площади сумме площадей всех этих квадратов, равносоставлен с квадратами $S_1, S_2, \dots, S_n$ (рис. 10). Это является следствием доказанного выше утверждения о двух квадратах; так, применяя этот способ разбиения двух квадратов $(n-1)$ раз, мы и получим «маленькие» части, из которых можно сложить один «большой» квадрат. Таким образом, многоугольник P равносоставлен с равновеликим ему квадратом S.

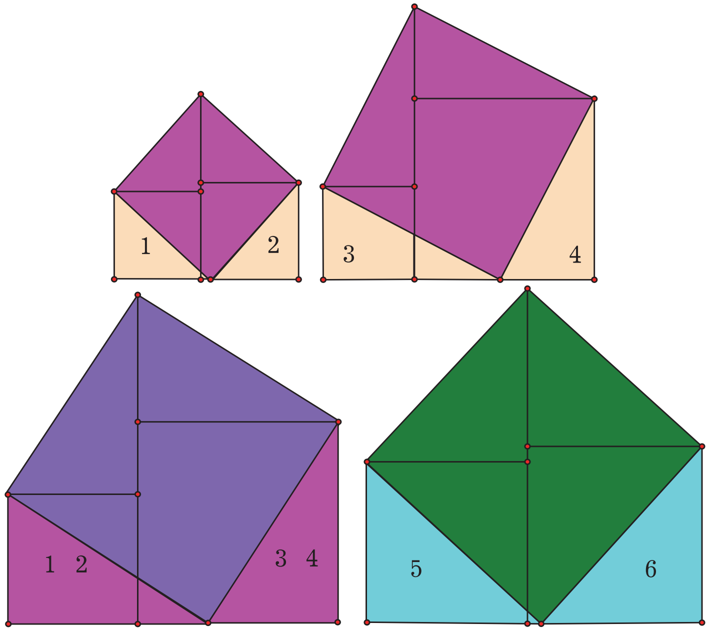

Рис. 10

Действуя аналогично с многоугольником Q, мы получаем, что он равносоставлен с равновеликим ему квадратом. Объединяя эти два разбиения квадратов в один (см. начало доказательства теоремы), заключаем, что равновеликие многоугольники P и Q равносоставлены.

Теорема Бойяи – Гервина полностью доказана.

Упражнение 3. Постройте разбиение на многоугольники двух правильных треугольников, из которых можно сложить правильный треугольник.

Упражнение 4 (лабораторная работа). Возьмите плотный лист бумаги и нарисуйте любые три квадрата. Дважды проделайте описанные выше разбиения на многоугольники. Используя ножницы, вырежьте полученные части и попытайтесь из них сложить квадрат.

Упражнение 5. А. Дьюдени (см. [5]) получил элегантное разбиение правильного восьмиугольника на части, из которых можно сложить квадрат (рис. 11). Обоснуйте эту конструкцию и получите одно из возможных разбиений на четыре части, из которых также можно сложить квадрат.

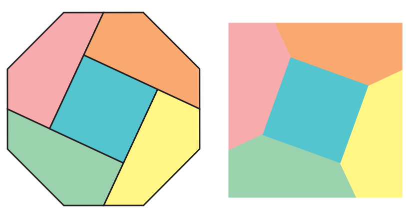

Рис. 11

Упражнение 6. Постройте разбиение правильного шестиугольника (пятиугольника) на шесть (пять) многоугольников, из которых можно сложить правильный треугольник. Существует ли такое разбиение на пять (четыре) частей?

Упражнение 7. На рис. 12 показано разрезание шестиконечной звезды (она получается объединением двух правильных треугольников) и правильный треугольник. Они равносоставлены: звезда на рис. 12 разрезана на пять частей, из которых сконструирован правильный треугольник. Убедитесь в правильности этого разбиения.

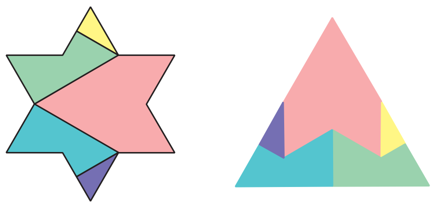

Рис. 12

6. Помимо рассмотренного нами метода разрезания и складывания часто используют и *метод дополнения*. Он состоит в том, чтобы одновременно дополнить две фигуры равными частями так, чтобы в результате получилась одна и та же фигура (а не пытаться найти разложение фигуры на части и потом из этих частей собрать другую фигуру, как это было в методе разложения). Примером применения (рис. 13) является стандартное доказательство равновеликости прямоугольника и параллелограмма, имеющих одинаковые основания и высоты (и формулы для их вычисления). Они дополняются равными треугольниками, и в результате получаются равные трапеции. Следовательно, прямоугольник и параллелограмм равновелики.

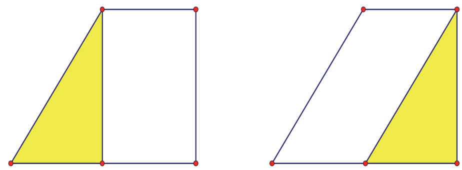

Рис. 13

С помощью этого метода можно получить одно из древних доказательств теоремы Пифагора. Построим квадраты на катетах и гипотенузе. Дополним одними и теми же треугольниками квадрат со стороной, равной длине гипотенузы, и два квадрата, построенные на катетах, как показано на рис. 14. В результате получатся два равных квадрата.

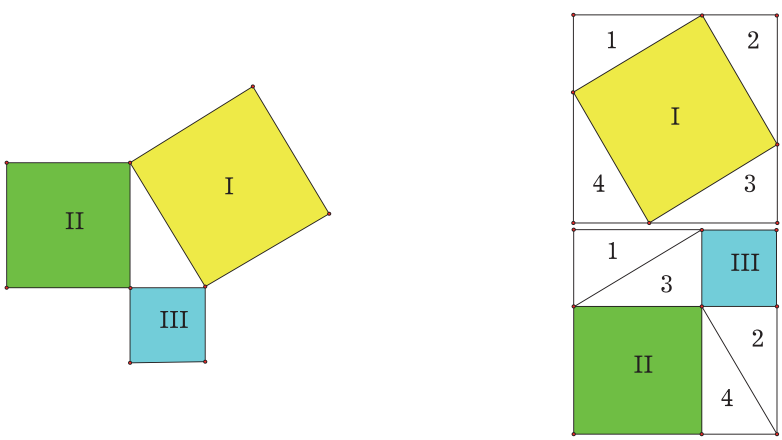

Рис. 14

Упражнение 8. Используя рисунок 15, методом дополнения получите простое доказательство теоремы косинусов. Для этого достаточно двумя разными способами посчитать площадь «окаймляющего» шестиугольника. Какие различные фигуры здесь дополняются до одной фигуры?

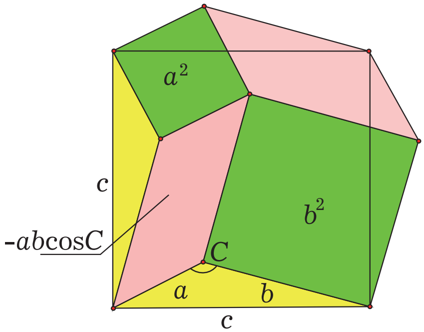

Рис. 15

Упражнение 9. Докажите, что отношение равносоставленности (равнодополняемости) многоугольников является транзитивным. То есть, если многоугольник P равносоставлен с многоугольником Q, а Q, в свою очередь, равносоставлен с многоугольником R, то P равносоставлен с R. Иллюстрацией к доказательству может служить рис. 16.

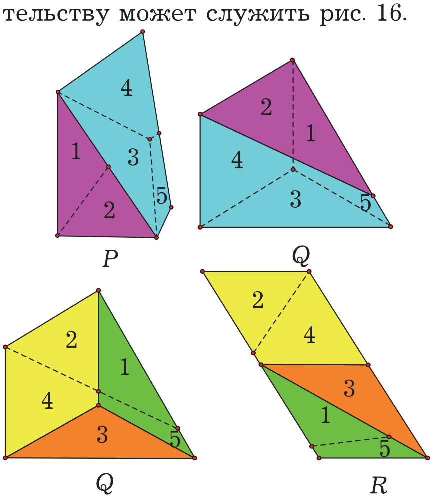

Рис. 16

Упражнение 10. Доказать, что теорема Бойяи – Гервина верна, если в её формулировке свойство равносоставленности заменить свойством равнодополняемости.

7. Сформулируем два проекта, которые могут стать началом самостоятельного исследования.

Исследовательский проект 1. В доказательстве основной теоремы мы использовали тот факт, что любой плоский простой многоугольник обладает внутренней диагональю.

Для многогранников это уже не так. Например, рассмотрим два правильных треугольника ABC и $A'B'C'$, которые расположены в параллельных плоскостях, и второй из них в своей плоскости повернут относительно линии центров (перпендикуляра к плоскостям, содержащим центры треугольников) на угол в $30°$. Тогда многогранник с шестью вершинами A, B, C, A', B', C', двенадцатью рёбрами AB, BC, CA, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, AA', BB', CC', AB', BC', CA' и восьмью треугольными гранями ABC, $A'B'C'$, $AA'C$, $CC'B$, $BB'A$, $AA'B'$, $BB'C'$, $CC'A'$ не имеет ни одной внутренней диагонали. Убедитесь в этом самостоятельно.

Имеются и другие примеры таких многогранников, у которых все диагонали или их части расположены вне многогранника.

Цель проекта – изучить весь класс таких многогранников и дать какие-то его характеристики. Сначала попробуйте построить некоторые примеры. Неплохо было бы доказать, что для любого n, $n \geq 6$, существует многогранник с n вершинами и без внутренних диагоналей.

Исследовательский проект 2. Составить алгоритм и на его основе написать программу, которая (в той или иной компьютерной технологической среде) позволяет получать разбиение одного многоугольника на части, из которых можно составить другой многоугольник. Это не безнадёжная задача, так как само доказательство теоремы Бойяи – Гервина носит конструктивный характер.

Если при этом удалось бы как-то позаботиться о разбиениях на наименьшее число частей (хотя бы в каких-то классах многоугольников), то было бы просто замечательно.

Литература

1. *Евклид.* Начала. ТТ. 1 – 3. – М. – Л.: Гостехиздат, 1948 – 1950.

2. *Болтянский В.Г.* Равновеликие и равносоставленные фигуры // Популярные лекции по математике. Выпуск 22. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.

3. *Кордемский Б.А., Русалев Н.В.* Удивительный квадрат. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952.

4. *Фурре Е.* Геометрические головоломки и паралогизмы. Очерки истории элементарной геометрии. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

5. *Болл У., Коксетер Г.* Математические эссе и развлечения. – М.: Мир, 1986.

6. *Линдгрен Г.* Занимательные задачи на разрезания. – М.: Мир, 1977.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Самое большое простое число

Как известно, простыми называют натуральные числа, большие единицы, не имеющие других делителей, кроме самого себя и единицы. Поиском таких чисел издавна занимаются многие исследователи (хотя, казалось бы, какая от них польза!). Один из рекордов поставил в своё время Леонард Эйлер, найдя простое число $2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$.

Строго говоря, название данной заметки является неправильным, так как речь идёт о самом большом из известных простых чисел, и возможно, пока вы читаете эти строки, найдено ещё большее простое число. Максимального же простого числа не существует вообще! Первое доказательство этого принадлежит древнегреческому математику Евклиду, жившему около 300 г. до н. э. Суть его в следующем. Предположим, что мы нашли самое большое простое число. Перемножим все известные простые числа и прибавим к произведению 1. Полученное число (большее «нашего») будет простым, т. к. при делении на любое число результат не будет целым, в остатке всегда будет 1. Если то же самое сделать применительно к новому «наибольшему» простому числу, то также получим ещё большее простое число и т. д. Не правда ли, изящно?

Наибольшим известным простым числом по состоянию на февраль 2012 года является $2^{43112609} - 1$. Оно содержит 12 978 189 цифр. Его нашли в США 23 августа 2008 года на математическом факультете университета UCLA в рамках проекта по распределённому поиску простых чисел Мерсенна – GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Research).

Кстати, Фонд электронного фронтира (Electronic Frontier Foundation, EFF) выплачивал денежные призы за нахождение простых чисел из 1 млн и 10 млн цифр. А за открытие простого числа, состоящего из 100 миллионов цифр, объявлена награда в 150 тысяч долларов...

Кандидат технических наук ***Д.М. Златопольский.***