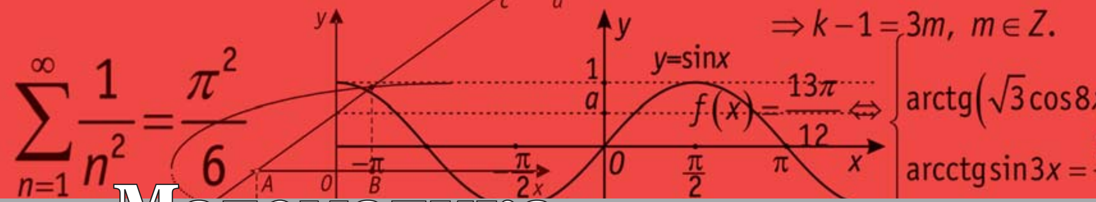


Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Следствие. Часть 2. Равносильные уравнения

В последнее время всё чаше встречаются решения задач с применением равносильных преобразований. Но не всегда понятно, на чём они основаны.

В этой части приводятся примеры решения базовых уравнений, содержащих радикалы, с помощью равносильных преобразований, а также, для сравнения, и другими способами.

Это может оказаться полезным, например, тем, кто впервые начинает пользоваться равносильными преобразованиями. Они попробуют понять разницу между равносильными уравнениями и уравнениями-следствиями, смогут сравнить трудоёмкость использования тех и других.

Уравнение-следствие всегда содержит постороннее уравнение (система-следствие чаще всего содержит заданное уравнение, постороннее уравнение и ОДЗ), а соответствующая равносильная система, кроме уравнения и, быть может, ОДЗ, как правило, содержит условие, исключающее существование решения у постороннего уравнения.

Затронут и вопрос о связи упрощения уравнений с «формулами» алгебры.

На первый взгляд, может показаться, что статья перегружена формулами. На самом деле это примеры того, как проводятся равносильные преобразования, что может помочь школьникам, начиная с конца 8-го класса

Статья так построена, что её можно изучать, начиная с любого пункта.

Часть 2*.

Всегда ли уравнение $f^2(x)=g^2(x)$ является только следствием уравнения $f(x)=g(x)$? Алгебра и уравнения

Для тех, кому не попалась на глаза первая часть этой статьи, напомним, что значит

$$F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0 .$$

Пусть на множестве X заданы два уравнения: $F(x)=0$ и $G(x)=0$.

1) Если *любой* корень уравнения $F(x)=0$, принадлежащий X, является и корнем уравнения $G(x)=0$, то уравнение $G(x)=0$ *называется следствием* уравнения $F(x)=0$.

Это обозначается так:

$$F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0 .$$

2) Если $F(x)=0$ *не имеет решений*, то, независимо от того, есть корни у уравнения $G(x)=0$, принадлежащие X, или нет, уравнение $G(x)=0$ *считается* следствием уравнения $F(x)=0$, т. е. $F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0$. Поэтому в этом случае *любое* уравнение *считает-ся* следствием уравнения, не имеющего корней, т. е. и в этом случае $F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0$.

Два уравнения называются равносильными, если любое из них является следствием другого.

Примечание. В роли X самым «большим» множеством является $X=D(F)\cap D(G)=$.ОДЗ заданного уравнения $F(x)=0$.

Из предыдущей части мы знаем, что

$$\begin{aligned} &f(x)=g(x) \Rightarrow f^2(x)=g^2(x) \Leftrightarrow \\ &\big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)=g^2(x), \\ f(x)g(x)\ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

В соотношениях (1) и (2) молчаливо подразумевается, что они, согласно определению, рассматриваются или на ОДЗ заданного уравнении, или на любом его подмножестве.

Однако, очень часто именно об этом забывают. Поэтому лучше, на взгляд автора, записать соотношения (1) и (2) в другом виде, чтобы об этом помнить всегда:

$$f(x)=g(x) \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} f^2(x)=g^2(x),$$ или

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \begin{cases} f^2(x)=g^2(x), \\ x\in D\big(f(x)\big)\cap D\big(g(x)\big) \end{cases} \qquad (1^*)$$

Что интересно?

Равносильное соотношение (2) при этом замечании *не меняет* своего вида, т. к. неравенство $f(x)g(x)\ge 0$ может иметь смысл только в ОДЗ заданного уравнения.

Конечно, уравнение $f(x)=g(x)$, в зависимости от вида функций $f(x)$, $g(x)$, решают разными способами.

---

* Часть 1 опубликована в №9 за 2018 год.

Пример 1. Решите уравнение $x^3 = 2 - x^2$.

►

$$x^3 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x^2 - 2 =$$
$$= x^2(x-1) + 2(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ. 1.◄

Пример 2. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x - 2} = \sqrt{\cos x - 2}.$$

► $\sqrt{\sin x - 2} = \sqrt{\cos x - 2} \Leftrightarrow \varnothing$,

т. к ОДЗ пусто.

Ответ. $\varnothing$.◄

Пример 3. Решите уравнение

$2\sqrt{x+2} = -x - 3$.

► Решим наше уравнение графически.

Прикинем эскизы полупараболы $y_1 = 2\sqrt{x+2}$ и прямой $y_2 = -x - 3$ - рис.1 (сплошная линия).

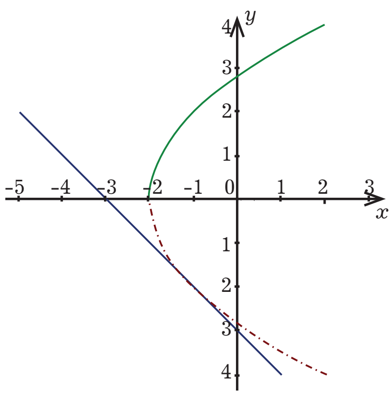


Рис.1

Видно, что пересечений нет – значит, решений заданного уравнения $2\sqrt{x+2} = -x - 3$ тоже нет.

А теперь дорисуем параболу полностью – рис.1 (сплошная и пунктирная линия).

Видно, что прямая касается полупараболы $y_3 = -2\sqrt{x+2}$, т. е.

$$-2\sqrt{x+2} = -x - 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} =$$
$$= x + 3 \Leftrightarrow x = -1,$$

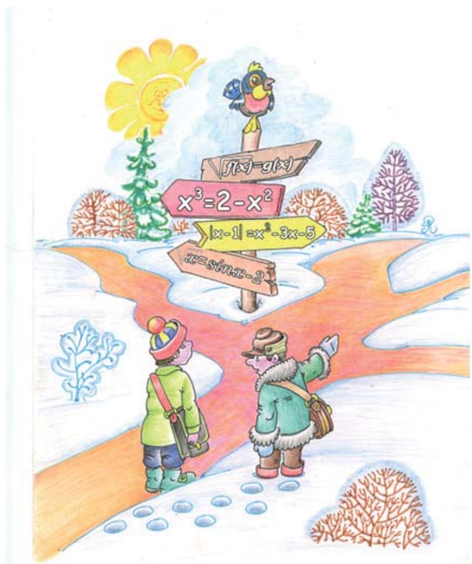
а это как раз означает, что постороннее уравнение $f(x) = -g(x)$ имеет решение.

Ответ. $\varnothing$. ◄

Пример 4. Решите уравнение $|x-1| = x^2 - 3x - 5$.

Первый способ (используем уравнение- следствие (1))

$$|x-1| = x^2 - 3x - 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = x^2 - 3x - 5, \\ x - 1 = -x^2 + 3x + 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 4 = 0, \\ x^2 - 2x - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \pm 2\sqrt{2}, \\ x = 1 \pm \sqrt{7} \end{array}\right.$$



Теперь, так как мы решали следствие, корни надо подставить в уравнение. Не хочется.

Второй способ (с равносильной системой (2)).

Воспользуемся равносильной системой (2), где роль *f(x)g(x)*≥0 выполняет неравенство $x^2-3x-5\geq 0$:

$$|x-1|=x^2-3x-5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-5\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x-1=x^2-3x-5, \\ x-1=-x^2+3x+5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-5\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x-4=0, \\ x^2-2x-6=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{29}}{2};+\infty\right), \\ \left[\begin{array}{l} x=2\pm 2\sqrt{2}, \\ x=1\pm\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases}$$

Корни надо подставить в неравенства. Тоже пока этого делать не будем.

Третий способ (раскрытие модуля)

$$|x-1|=x^2-3x-5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\geq 0, \\ x-1=x^2-3x-5; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0, \\ -x+1=x^2-3x-5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\geq 0, \\ x^2-4x-4=0 \Leftrightarrow 2\pm 2\sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0, \\ x^2-2x-6=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+2\sqrt{2}, \\ x=1-\sqrt{7} \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{2+2\sqrt{2}, 1-\sqrt{7}\right\}$. ◄

Итак, мы показали, что не всякое уравнение вида *f(x)=g(x)* удобно решать возведением в квадрат обеих его частей.

Но иногда без возведения в квадрат обойтись невозможно.

П. 1. Корень чётной степени и «знаменитое» уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$. Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$

Чем же «знаменито» уравнение

$$\sqrt{f(x)}=g(x)?$$

Это практически единственное уравнение с нетривиальным ОДЗ, которое имеет именно уравнение – следствие, а не систему. Остальные уравнения в качестве следствия имеют систему, содержащую уравнение и ОДЗ.

Где задано уравнение? В ОДЗ:

$$\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ x\in D(g(x)) \end{cases}$$

Рассуждать мы будем несколько иначе, чем для произвольного уравнения *f(x)=g(x)* .

Если *в ОДЗ* обе части равны, то равны и их квадраты (это, действительно, следствие!), т. е. «вроде бы»

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} f(x)=g^2(x)$$

Что интересно?

ОДЗ заданного уравнения в уравнении *$f(x)=g^2(x)$ выполняется автоматически*: $f(x)\geq 0$, а из существования $g(x)$ следует и существование $g^2(x)$.

Поэтому *опускаем* знак ОДЗ:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Rightarrow f(x)=g^2(x) \quad (3)$$

Попробуем исследовать уравнение-следствие:

$$f(x)=g^2(x)\Leftrightarrow\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{f(x)}+g(x)\right)=0\Leftrightarrow \quad (4)$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{f(x)}=g(x)\Rightarrow g(x)\geq 0,\\ \sqrt{f(x)}=-g(x)\Rightarrow g(x)\leq 0\end{array}\right.$$

Видно, что уравнение-следствие (3) может иметь постороннее решение – решение уравнения $\sqrt{f(x)}=-g(x)$, если в ОДЗ есть подмножество, на котором функция $g(x)$ отрицательна, но может и не иметь, если в ОДЗ функция $g(x)$ не принимает отрицательных значений. Поэтому, *если $g(x)\geq 0$ в ОДЗ*, то возведение в квадрат обеих частей приводит к *равносильному* уравнению.

Для нашего уравнения

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^2(x),\\ g(x)\geq 0\end{cases} \quad (5)$$

Обратим внимание на то, что

а) заданное уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ и уравнение-следствие $f(x)=g^2(x)$ существуют *одновременно*,

б) но…в уравнение-следствие $f(x)=g^2(x)$ входит, кроме уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$, ещё уравнение $\sqrt{f(x)}=-g(x)$,

в) условие $g(x)\geq 0$ в равносильной системе, дополнительное к уравнению-следствию, *не связано* с ОДЗ уравнения. Это условие *существования решения*.

А теперь посмотрим на уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ совсем с другой стороны.

В алгебре есть понятие арифметического корня n-й степени: арифметическим корнем n-й степени из числа a называется такое *неотрицательное* число b, n-я степень которого равна a, т. е. $b^n=a$. Это число обозначается как $\sqrt[n]{a}$. Очевидно, что $a\geq 0$.

Заметим при этом, что $\sqrt[2n]{a}$ – это арифметический корень. Следовательно, он принимает неотрицательное значение и определён при $a\geq 0$.

Поэтому, *по определению*,

$$\boxed{\sqrt[2n]{a}=b\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq 0,\\ b^{2n}=a\end{cases}} \quad (5^*)$$

В частности, $\sqrt{a}=b\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq 0,\\ b^2=a\end{cases}$

Отсюда немедленно следует, что

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)=g^2(x)\end{cases} \quad (5)$$

На взгляд автора, такая «интерпретация» равносильного соотношения (5) может оказаться более понятной школьнику любого уровня подготовки.

Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$

Рассмотрим уравнение

$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$.

Воспользуемся свойством (5*):

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases} \quad (6)$$

А что будет, если мы возведём обе части уравнения $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ в степень $4n$?

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Rightarrow \begin{cases} f^2(x) = g^{4n}(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Видно? ОДЗ заданного уравнения в уравнении $f^2(x) = g^{4n}(x)$ не выполнено – поэтому в систему-следствие пришлось добавить $f(x) \geq 0$, т. к. уравнение и следствие рассматриваются на *одном* множестве!

Теперь можно записать и равносильную систему:

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) = g^{4n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

В отличие от корня чётной степени, который одновременно является и арифметическим корнем, корень нечётной степени определён по-другому: корнем степени $2n+1$ из числа a называется такое число $c \in \mathbb{R}$, $2n+1$-я степень которого равна a, т. е. $c^{2n+1} = a$ Это число обозначается как $\sqrt[2n+1]{a}$. Очевидно, что и $a \in \mathbb{R}$.

Поэтому, по определению,

$$\sqrt[2n+1]{a} = c \Leftrightarrow a = c^{2n+1}.$$

Тогда

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x) \quad (9)$$

В школе часто решают уравнение $f(x) = g^2(x)$, не задумываясь о том, что оно следствие – просто у них нет другого пути. Затем делают проверку. Решим и мы так же такое уравнение.

Пример 5. Решите уравнение $6\sqrt{x+1} = 3x+1$.

► *Первый способ* (школьный).

$$6\sqrt{x+1} = 3x+1,\ 36(x+1) =$$

$$= 9x^2 + 6x + 1,\ 9x^2 - 30x - 35 = 0,$$

$$x = \frac{5-2\sqrt{15}}{3},\ x = \frac{5+2\sqrt{15}}{3}$$

Теперь надо делать проверку, *подставляя корни в уравнение*:

$$6\sqrt{\frac{5-2\sqrt{15}}{3}+1} - 3\cdot\frac{5-2\sqrt{15}}{3} - 1 =$$

$$6\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{3}} - 6 + 2\sqrt{15} =$$

$$= \frac{6\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} - 6 + 2\sqrt{15} =$$

$$= -12 + 4\sqrt{15} \neq 0 \Rightarrow \varnothing;$$

$$6\sqrt{\frac{5+2\sqrt{15}}{3}+1} - 3\cdot\frac{5+2\sqrt{15}}{3} - 1 =$$

$$\frac{6\sqrt{5}+6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 6 - 2\sqrt{15} = \frac{6\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - 2\sqrt{15} \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5+2\sqrt{15}}{3}$$

Ответ. $\frac{5+2\sqrt{15}}{3}$.

Вот такая проверка получилась!

Школьники, решающие так, просто не догадываются, что уравнение-следствие: имеет *то же ОДЗ*, что и заданное уравнение, а *следствием* оно является потому, что при *возведении* в квадрат появляется посторонний корень – корень уравнения $6\sqrt{x+1}=-(3x+1)$. Поэтому проверить надо только *условие* $3x+1\geq 0$!

Второй способ (с равносильной системой)

Этот пример решим по-другому – используем равносильный переход (4):

$$6\sqrt{x+1}=3x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1\geq 0, \\ 36(x+1)=9x^2+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{3}, \\ 9x^2-30x-35=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\geq -\frac{1}{3}, \\ x=\frac{5\pm 2\sqrt{15}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5+2\sqrt{15}}{3}..$$

Ответ. $\frac{5+2\sqrt{15}}{3}$. Есть разница?◄

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt{x}=1$.

► *Первый способ*

Воспользуемся равносильной системой (2):

Так как $\sqrt{x}\cdot 1\geq 0$ в ОДЗ, то, в силу (2), $\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$.

Ответ. 1.

Второй способ (возведём, ради интереса, обе части в 4-ую степень)

Воспользуемся равносильной системой (8):

$$\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ. 1

Примечание. Два уравнения $\sqrt{x}=1$ и $x^2=1$. Является ли уравнение $x^2=1$ просто следствием уравнения $\sqrt{x}=1$, без всяких ограничений? Нет.

Уравнения сравнимы лишь при $x\geq 0$, а там они равносильны. Поэтому, конечно, $x^2=1$ является следствием, но при условии, что $x\geq 0$ (как любое равносильное уравнение в ОДЗ). ◄

Пример 7. Решите уравнение $\sqrt{x}=x-1$.

► *Первый способ*

Решим уравнение-следствие (1):

$$\sqrt{x}=x-1 \Rightarrow x=(x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Корни надо подставить в уравнение, т. к. решалось следствие. Повременим с этим.

Второй способ

Решим равносильную систему (2):

$$\sqrt{x}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=(x-1)^2, \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Третий способ (просто интересно)
Возведение в 4-ю степень.

Решаем систему-следствие (7):

$$\sqrt{x}=x-1\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0,\\x^2=(x-1)^4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\geq 0,\\\left(x-(x-1)^2\right)\left(x+(x-1)^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Корни надо подставить в уравнение, т. к. решалось следствие. Повременим с этим.

Четвёртый способ

Решаем равносильную систему (8):

$$\sqrt{x}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=(x-1)^4,\\x-1\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\x^2=(x-1)^4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\\left(x-(x-1)^2\right)\left(x+(x-1)^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\x-(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Ответ. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.◄

Как быстрее и проще? Почему второй способ? Потому что не надо иррациональный корень подставлять в уравнение! А почему? Потому что для уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$ уравнение $f(x)=g^2(x)$ является не просто следствием, а равносильным данному при условии, что $g(x)\geq 0$. ◄

Пример 8. Решите уравнение

$$\sqrt{x}=\sin x-2.$$

► *Первый способ* (с равносильной системой)

$$\sqrt{x}=\sin x-2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x-2\geq 0\Leftrightarrow\varnothing,\\x=(\sin x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$$

Ответ. $\varnothing$.

Второй способ (решаем уравнение-следствие)

$$\sqrt{x}=\sin x-2\Rightarrow x=(\sin x-2)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 x-4\sin x+4-x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x=2\pm\sqrt{4-4+x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=2+\sqrt{x}\geq 2\Leftrightarrow\varnothing,\\\sin x=2-\sqrt{x}\end{array}\right.$$

Вот это да! Получили заданное уравнение, да и ещё и постороннее. Ни одно из них не решается аналитически!

А что, если мы не заметили, что второе уравнение – постороннее, а оно, похоже, имеет решение. Покажем его графически (рис. сделан на компьютере) – рис. 4.

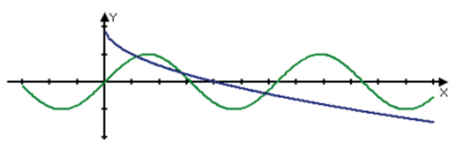


Рис. 4

А что делать школьнику, который понятия не имеет о посторонних уравнениях?

Ответ – лучше знать о равносильных.◄

Пример 9. Решите уравнение

$$\sqrt{-\sin x+\sqrt{\cos x}}=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}.$$

► Поняли, что значит проверять корни уравнения-следствия?

Поэтому сразу воспользуемся равносильной системой:

$$\sqrt{-\sin x+\sqrt{\cos x}}=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\ge 0,\\ -\sin x+\sqrt{\cos x}=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\end{cases}$$

Решим уравнение отдельно:

$$-\sin x+\sqrt{\cos x}=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin x+\sqrt{\cos x}=1-\sin x\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\cos x}=1\Leftrightarrow x=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

Теперь проверим условие $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\ge 0$, подставив туда найденные решения:

$$\sin\pi k-\cos\pi k=(-1)^{k+1}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k+1=2n, n\in\mathbb{Z}$$

Значит, $x=2\pi(2n-1), n\in\mathbb{Z}$.

Ответ. $2\pi(2n-1), n\in\mathbb{Z}$.

Примечание. Обратите внимание – мы *не решали* неравенство $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\ge 0$, а просто *подставили* туда корни уравнения $\sqrt{\cos x}=1$. ◄

Мы привели достаточно много разных примеров с несколькими способами решения, чтобы каждый учащийся или учитель понял, какой способ ему больше подходит. Может быть, с уравнением-следствием, а, может быть, с использованием равносильной системы. Кому-то подойдёт и графический способ решения некоторых задач.

Решения дальнейших уравнений так или иначе используют способ решения уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

П. 2. Уравнение $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$ и $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

Заметим, что обе части уравнения $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$ неотрицательны в ОДЗ – значит, после возведения в квадрат обеих частей получим *равносильное в ОДЗ* уравнение

$$f(x)+2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}+g(x)=h(x),$$

а *не* следствие.

Но самое *замечательное* состоит в том, что при этом ОДЗ исходного уравнения *сохранилось*!

Поэтому (без всяких дополнительных значков над $\Leftrightarrow$)

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)-f(x)-g(x)\qquad(10)$$

Интересно и то, *что в этом случае* у нас получилось

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x).$$

А вот решение получившегося уравнения будет зависеть *не только от ОДЗ*, но и от знака правой части.

Поэтому при дальнейшем возведении обеих частей в квадрат *в ОДЗ* получится именно *уравнение-следствие*, т. к. оно будет содержать ещё и уравнение

$$2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=-\big(h(x)-f(x)-g(x)\big):$$

Продолжим «освобождаться» от радикалов:

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}= \qquad (11)$$

$$=h(x)-f(x)-g(x)\overset{ОДЗ}{\Rightarrow}$$

$$4f(x)g(x)=\big(h(x)-f(x)-g(x)\big)^2$$

или полная система-следствие

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4f(x)g(x)=\big(h(x)-f(x)-g(x)\big)^2, \\ \left[\begin{array}{l}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases} \qquad (11^*)$$

Можно записать и равносильную систему, включающую ОДЗ:

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)g(x)=\big(h(x)-f(x)-g(x)\big)^2, \\ h(x)-f(x)-g(x)\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0.\end{array}\right.\end{cases} \qquad (12)$$

На взгляд автора, при решении лучше пользоваться *равносильной* системой.

Пример 10. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2-x}.$$

► *Первый способ* (с системой-следствием).

Выпишем систему-следствие (10*):

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}=-1-3x\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x+1\ge 0,\\ 4(x+1)(x+2)=(1+3x)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0,\\ 5x^2-6x-7=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{44}}{5}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{44}}{5}.$$

Теперь «положено» найденные корни подставить в заданное уравнение, чтобы «отсечь» посторонние.

Не будем делать проверку – мы запишем равносильную систему и её решим.

Второй способ (с равносильной системой).

Выпишем равносильную систему (12):

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2-x}\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}=-1-3x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(x+1)(x+2)=(1+3x)^2,\\ -1-3x\ge 0,\\ x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}5x^2-6x-7=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm 2\sqrt{11}}{5},\\ -1\le x\le -\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3-2\sqrt{11}}{5}$$

Ответ. $x=\dfrac{3-2\sqrt{11}}{5}$.

Пример 11. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{3x+1}.$$

►Проведём последовательно равносильные преобразования:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}\right)^2=\left(\sqrt{3x+1}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$(x+1)+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}+(x-4)=3x+1$$

(левая часть – сумма неотрицательных слагаемых, а, значит, и правая тоже).

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}=x+4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-4\ge 0,\\ 4(x+1)(x-4)=(x+4)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\ge 4,\\ 3x^2-20x-32=0\Leftrightarrow x=\dfrac{10\pm 14}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=8$$

Ответ. $\{8\}$.

Примечание 1. Уравнение $4(x+1)\times$ $\times(x-4)=(x+4)^2$ *не является* следствием уравнения $2\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}=x+4$ – не хватает условия $\left[\begin{array}{l}x+1\ge 0,\\ x-4\ge 0\end{array}\right.$. ◄

А теперь решайте сами, что делать: решать уравнение с использованием следствия или равносильной системы.

П. 3 «Формулы» и $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

В этой части речь пойдёт не о связи уравнений-следствий или равносильных уравнений с соответствующими числовыми следствиями или равносильными соотношениями.

Если числовые соотношения, рассмотренные ранее, были справедливы для любых действительных чисел, то в алгебре есть свойства, которые очень похожи на формулы, но справедливы на конкретных подмножествах действительных чисел.

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, как эти свойства используются при решении соответствующих уравнений.

Эта часть статьи продолжает разговор об упрощении уравнений, содержащих корни. Но подход к решению таких уравнений будет связан не всегда с соотношением $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$, хотя это и возможно, а с правильным применением формул алгебры.

Правильное применение соответствующих формул приводит к равносильным системам, содержащим ОДЗ, но которые *не содержат посторонних уравнений.* Конечно, как всякое равносильное соотношение, его можно считать и следствием.

В алгебре формулы верны для любых входящих в них букв. Это, например, формулы сокращённого умножения

$$\begin{array}{l}a^2-b^2\equiv(a-b)(a+b);\\ a^3\pm b^3\equiv(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)\end{array}\qquad(*)$$

$$\begin{array}{l}(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;\\ (a\pm b)^3\equiv a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\end{array}\qquad(**)$$

и т. д.

Мы пользуемся ими для упрощения алгебраических выражений при решении уравнений или неравенств.

Однако *сложность* применения при решении уравнений или неравенств даже этих формул состоит в том, что, в отличие от чисел, любая функция имеет свою область определения и множество значений.

Проще всего работать с многочленами для которых $D(P_n)=\mathbb{R}$ и $E(P_n)=\mathbb{R}$. Для них формулы верны.

Если же $f(x),g(x)$ – не многочлены, то функции $f(x),g(x)$ имеют свои области определения $D(f),D(g)$...

И тогда совсем другое дело!

Уравнение $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$. Существует ли «формула» $\sqrt{a}=\sqrt{b}$?

В уравнении можно избавиться от радикалов, используя соотношения (1*) и (2.)

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ \left[\begin{array}{l}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases}\qquad(13)$$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ \sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}\ge 0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ \left[\begin{array}{l}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases}\qquad(14)$$

Удивились? Соотношения (13) и (14) абсолютно одинаковы!

Что мы видим?

Во-первых, не видно посторонних уравнений в системе-следствии.

Во-вторых, система-следствие и равносильная система абсолютно одинаковы. Почему?

Это очень просто, хоть и не просто!

Дело в том, что в освобождении от радикалов здесь, в частности, работает «другой механизм» – правильное применение формул алгебры.

И мы сейчас подойдём к выводу соотношений (13) и (14) совсем с другой стороны.

Мы уже ввели понятие арифметического корня n-й степени, корня чётной степени и корня нечётной степени.

Продолжим разговор о корнях чётной степени на примере квадратного корня из числа.

Доказывается в алгебре, что

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0,b\ge 0,\\ a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b,\\ \left[\begin{array}{l}a\ge 0,\\ b\ge 0\end{array}\right.\end{cases}\qquad(15)$$

Теперь рассмотрим уравнения

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$$

А тогда, опираясь на (15), можно сразу записать:

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ \left[\begin{array}{l}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases}\qquad(14)$$

Можно, конечно, записать и так:

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ \left[\begin{array}{l}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases},\qquad(13)$$

или

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\overset{ОДЗ}{\Rightarrow}f(x)=g(x)\qquad(13^*)$$

При решении соотношения (13*), вообще говоря, можно поступить *двояко.*

Либо прикинуть, какие корни уравнения $f(x)=g(x)$ не входят в ОДЗ, а остальные подставить в заданное уравнение (именно эта часть работы при таком способе проверки совершенно излишняя), чтобы отсечь посторонние, если таковые имеются (не имеются!).

Либо сразу подставить корни уравнения $f(x)=g(x)$ в заданное уравнение – при этом автоматически проверяется, принадлежат ли они ОДЗ.

Если бы уравнение $f(x)=g(x)$ было бы *просто* следствием в ОДЗ, то корни уравнения $f(x)=g(x)$ надо было бы подставлять в уравнение $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$, а в нашем случае надо только *проверить* ОДЗ (даже меньше – знак только одного из подкоренных выражений).

Примечание 1. Обратите внимание на то, что «следствие» (13) , *не содержит никакого постороннего уравнения*! Поэтому считать его следствием довольно странно.

Пример 12. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2x-2}{x+4}+ctgx}=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}+ctgx}\,.$$

►Воспользуемся равносильной системой (14), включающей ОДЗ:

$$\sqrt{\frac{2x-2}{x+4}+ctgx}=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}+ctgx}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x-2}{x+4}+ctgx=\dfrac{x-1}{x+2}+ctgx,\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{2x-2}{x+4}+ctgx\ge 0,\\ \dfrac{x-1}{x+2}+ctgx\ge 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x-2}{x+4}=\dfrac{x-1}{x+2},\\ \dfrac{x-1}{x+2}+ctgx\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{(x+4)(x+2)}=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=1\end{array}\right.,\\ \dfrac{x-1}{x+2}+ctgx\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1.$$

Ответ. $\{1\}$.◄

Пример 13. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2+4x-3}=\sqrt{-3-5x}\,.$$

►Воспользуемся равносильной системой (14):

$$\sqrt{2x^2+4x-3}=\sqrt{-3-5x}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+4x-3=-3-5x,\\ -3-5x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2x+9)x=0,\\ x\le -\dfrac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow x=-4{,}5.$$

Ответ. $\{-4{,}5\}$.◄

Пример 14. Решите уравнение

$$\sqrt[4]{x+1}=\sqrt{x}\,.$$

► *Первый способ*

Возведём последовательно два раза в квадрат обе части уравнения:

$$\sqrt[4]{x+1}=\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=x^2\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2},\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt5}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$.

Второй способ

Возведём обе части уравнения сразу в 4-ю степень:

$$\sqrt[4]{x+1}=\sqrt{x}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=x^2\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2},\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt5}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$.◄

Уравнения $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)$ и $\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)$.

Существует ли «формула» $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$?

В арифметике $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ и $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$.

А в алгебре? В алгебре по-другому:

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\ a\ge 0, b\ge 0, \qquad (16)$$

но...

$$\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}, ab>0 \qquad (17)$$

Для функций, имеющих область определения и могущих принимать как положительные, так и отрицательные значения, конечно, «формулы» $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=\sqrt{f(x)g(x)}$ *не существует*, т. к. очевидно, что ОДЗ левой и правой частей разные.

Равенство, похожее на «формулу», превращается в уравнение:

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=\sqrt{f(x)g(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right. \qquad (18)$$

Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x).$$

Воспользуемся соотношениями (1*) и (2):

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)\overset{ОДЗ}{\Rightarrow} f(x)g(x)=$$

$$=h^2(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)g(x)=h^2(x),\\ \left[\begin{array}{l} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases} \qquad (19)$$

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)g(x)=h^2(x),\\ h(x)\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases} \qquad (20)$$

Есть ли связь между уравнениями

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x), f(x)\ge 0, g(x)\ge 0,$$

и $\sqrt{f(x)g(x)}=h(x), f(x)g(x)\ge 0$?

Да, есть. Уравнения можно сравнивать только на множестве, где оба определены.

Поэтому, в силу (16),

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{f(x)g(x)}=h(x),\\ \left[\begin{array}{l} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases}. \qquad (21)$$

Это, конечно, не исключает того, что равносильная система тоже является следствием.

Продолжим «упрощать» уравнение $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)$:

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{f(x)g(x)}=h(x),\\ \left[\begin{array}{l} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} h(x)\ge 0,\\ f(x)g(x)=h^2(x)\\ \left[\begin{array}{l} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\end{cases} \qquad (20)$$

Заметим, что к системам (19) и (20) мы пришли за два шага – условия ОДЗ появились при первом возведении в квадрат, где *никакого по-*

стороннего уравнения не появилось, а уравнение приняло вид «знаменитого» уравнения $\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)$.

Новое уравнение после возведения в квадрат и приобрело постороннее уравнение.

Что лучше решать? Уравнение из системы-следствия, систему-следствие, включающую ОДЗ, или равносильную систему?

Посмотрим на примерах.

Пример 15. Решите уравнение $\sqrt{x-2}\sqrt{x-8}=2x+3$.

►Воспользуемся системой-следствием (19*):

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x-8}=2x+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-2)(x-8)=(2x+3)^2, \\ x\ge 8\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\ge 8, \\ 3x^2+22x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-11\pm\sqrt{142}}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

Ответ. $\varnothing$. ◄

Пример 16. Решите уравнение

$$\sqrt{x-3}\sqrt{2x+7}=7-x.$$

► *Первый способ* (с системой-следствием)

Воспользуемся системой-следствием (19*):

$$\sqrt{x-3}\sqrt{2x+7}=7-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-3)(2x+7)=49-14x+x^2, \\ x-3\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2+15x-70=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-15\pm\sqrt{505}}{2}, \\ x\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\sqrt{505}-15}{2}.$$

$$\frac{\sqrt{505}-15}{2}\vee 3 \Leftrightarrow \sqrt{505}>21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{505}-15}{2}>3$$

Надо корень подставить в уравнение. Пока этого делать не будем. Может быть, обойдёмся более простой проверкой?

Второй способ (с равносильной системой)

Воспользуемся равносильной системой (6):

$$\sqrt{x-3}\sqrt{2x+7}=7-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(2x+7)=(7-x)^2, \\ 7-x\ge 0, \\ x\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}3\le x\le 7, \\ x^2+15x-70=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\le x\le 7, \\ x=\dfrac{-15\pm\sqrt{505}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{505}-15}{2}.$$

Дождались!

Не надо подставлять x в уравнение! Надо только проверить, удовлетворяет ли x двойному неравенству $3\le x\le 7$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{505}-15}{2}$.

Сравните способы решения. ◄

В следующей части мы продолжим разговор о «формулах» – не формулах.