Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Следствия. Равносильные уравнения

В последние годы в пособиях разработчиков ЕГЭ стали всё чаще встречаться равносильные преобразования, изредка появляется аббревиатура «ОДЗ». Появились рассуждения об уравнениях-следствиях, равносильных уравнениях. Изредка стал использоваться и значок «$\vee$» для сравнения уравнений и неравенств. Некоторые авторы используют при решении уравнений не равносильные уравнения, а уравнения-следствия.

Честно говоря, автору показалось, что и само понятие следствия, и приведённые решения уравнений с использованием уравнений-следствий довольно сложны. Для автора этих строк предпочтительней использовать равносильные в ОДЗ преобразования.

В статье рассматриваются числовые следствия, равносильные соотношения и вытекающие из них уравнения-следствия и равносильные уравнения (системы). Приводится сравнение «громоздкости» решений уравнений-следствий и равносильных уравнений. Впервые автором активно используется значок «$\vee$».

Заметка может оказаться полезной учащимся профильных классов, которым не интересно формально применять методы решений, а также учителям, впервые работающим в профильных классах.

1. Числовые следствия и уравнения-следствия

1. Пожалуй, самое известное в арифметике следствие звучит так. Пусть $a,b \in \mathbb{R}$. Если $a=b$, то $a^2=b^2$, или

$$a=b \Rightarrow a^2=b^2. \qquad (1)$$

Посмотрим на (1) внимательнее. Если $a=b$, то, во-первых, заведомо *числа* $a,b \in \mathbb{R}$ одного знака, а во-вторых, они равны. Но, так как они могут быть оба как положительны, так и отрицательны, то соотношение $a^2 = b^2$ говорит о том, что равны их *модули*. Заметим также, что

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b, \end{array}\right. \qquad (2)$$

т. е. равенство $a^2 = b^2$ содержит ещё и равенство двух чисел, равных по модулю, но *разных* по знаку. Поэтому, если мы сразу заметим, что равенство $a = b$ имеет место только тогда, когда *числа* $a, b \in \mathbb{R}$ одного знака, то при этом условии следствие превращается в равносильное соотношение:

$$\begin{cases} a = b, \\ ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = b^2. \qquad (3)$$

2. Есть ещё следствие.

Если $a \geq b$, а $c \geq d$, то $a + c \geq b + d$. Это можно записать так:

$$\begin{cases} a \geq b, \\ c \geq d \end{cases} \Rightarrow a + c \geq b + d, \qquad (4)$$

т. е. из системы неравенств следует одно неравенство. Это свойство говорит о том, что неравенства *одного знака* можно складывать.

3. В частности, можно записать ещё одно хорошо известное неравенство-следствие.

Если $a \geq b$, а $b \geq c$, то $a \geq c$. Это можно записать так:

$$\begin{cases} a \geq b, \\ b \geq c \end{cases} \Rightarrow a \geq c. \qquad (5)$$

При сложении неравенств мы произвели *сокращение* – исчезло b.

2. Уравнение-следствие. Определение

Обратим внимание на то, что в отличие, например, от числового равенства $a = b$ соотношение $f(x) = g(x)$ не является «равенством». Поэтому следствия уравнений и неравенств не являются точным повторением числовых следствий.

На практике часто «следствие» выписывается интуитивно, довольно часто также мы употребляем явно или «в уме» слово «следует», хотя на самом деле речь может идти о равносильном преобразовании. Например, мы говорим: «Пусть $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Тогда, если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) = g(x)$ при любом допустимом основании a», а на самом деле согласно свойствам логарифмической функции имеет место равносильность двух уравнений:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x).$$

Следствия и равносильные соотношения чаще всего получаются при *преобразованиях*, упрощающих уравнения или неравенства. Учащиеся частенько употребляют значок $\Rightarrow$ и для следствия, и для равносильного соотношения.

В математической литературе появились понятия и уравнения-следствия, и неравенства-следствия.

Уравнение-следствие? С одной стороны, вроде бы понятно, что это такое, но, с другой стороны, всё-таки требует определения. В одном из пособий разработчиков ЕГЭ это звучит так: «Если каждый корень первого уравнения является и корнем второго, то второе уравнение называется *следствием* первого». В одном из учебников есть дополнение к этому определению: «Если уравнение не имеет решения, то любое уравнение считается его следствием». В одном известном автору источнике решаются уравнения с использованием уравнений-следствий, но нигде автору не встретился значок $\Rightarrow$.

Исходя из приведённого определения, в одном источнике приводятся, например, в качестве примера уравнение

$$\log_{a(x)} f(x)=b$$

и его «следствие»

$$f(x)=\left(a(x)\right)^b,$$

в другом – уравнение

$$\lg\left(x^2-4\right)=\lg(4x-1)$$

и его «следствие»

$$x^2-4=4x-1.$$

По мнению автора данной статьи, это, мягко говоря, неточно. Чего-то не хватает. Как сравнить, например, уравнение $\log_{a(x)} f(x)=b$, где функция $y(x)=\log_{a(x)} f(x)$ в школе практически не определена, с уравнением $f(x)=\left(a(x)\right)^b$, где область определения $D(y)$ функции $y(x)=\left(a(x)\right)^b$ определена по-разному в зависимости от того, каково b: $b\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{Z}$ или $b\in\mathbb{R}$?

Чуть-чуть математической логики

Чтобы понять, что такое следствие, придётся чуть-чуть познакомиться с математической логикой.

Высказывание в математической логике – это утверждение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Например, высказывание «5=5» верно (истинно), высказывание «$5=-5$» неверно (ложно). Но $x^2=1$ высказыванием не является, так как мы не можем сказать, верно оно или нет.

Выражения вида $F(x)=0$,

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=0,\\ g(x)\ge 0(\le 0),\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} g(x)=0,\\ n(x)\le 0\end{array}\right.$$

и т. д. называют *предложениями* с параметром x и обозначают, например, так:

$$A(x)\equiv\left\{F(x)=0\right\},\ B(x)\equiv\left\{\left[\begin{array}{l} f(x)=0,\\ g(x)\ge 0(\le 0)\end{array}\right.\right\},$$

$$C(x)\equiv\left\{\left\{\begin{array}{l} g(x)=0,\\ n(x)\le 0\end{array}\right.\right\},\ D(x)\equiv\left\{x^2-1=0\right\},$$

$$E(x)\equiv\left\{\left\{\begin{array}{l} x-3>0,\\ \sqrt{x^2-4}=1\end{array}\right.\right\},\ M(x)\equiv\left\{\lg x=\lg x^3\right\}.$$

Для каждого предложения *должно* быть *указано*, на каком множестве X оно *определено*. В наших примерах

$D(x)\equiv\left\{x^2-1=0\right\},\ x\in\mathbb{R};$

$E(x)\equiv\left\{\left\{\begin{array}{l} x-3>0,\\ \sqrt{x^2-4}=1\end{array}\right.\right\},\ x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty);$

$M(x)\equiv\left\{\lg x=\lg x^3\right\},\ x>0.$

Всё это ещё не высказывания, потому что про них мы тоже не можем сказать, истинны они или ложны.

Рассмотрим теперь предложение $A(x)$ при некотором значении $x_0\in X$. Возникает *высказывание* $A(x_0)$, $x_0\in X$. Например,

$$A(x_0)\equiv\left\{F(x_0)=0,\ x_0\in D(F)\right\}.$$

Спрашивается, истинно высказывание или нет. Число $x_0\in X$, для которого $A(x_0)$ истинно, мы называем корнем уравнения $F(x)=0$. Если

$A(x_0)$ ложно, то $x_0 \in X$ не является корнем. И наоборот, если $x_0 \in X$ – корень уравнения $F(x)=0$, то высказывание $F(x_0)=0,\ x_0 \in D(F)$, истинно, а если $x_0 \in X$ не является корнем, то высказывание $F(x_0)=0,\ x_0 \in D(F)$, ложно.

Пример 1. Найдите сумму всех корней уравнения $x^3+2x^2-4x+1=0$.

Решение. Школьник будет искать корни. Заметит, что $x=1$ – решение. Тогда

$$x^3+2x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+3x-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x^2+3x-1=0 (D>0) \Rightarrow x_1+x_2=-3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+1=-2.$$

Ответ. -2.

Пример 2. Найдите сумму всех корней уравнения $x^3+2x^2+2x+1=0$.

Решение школьника непрофильного класса:

$$x^3+2x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ. -1.

Школьник профильного класса или даст мгновенный ответ «-2», или спросит: «Корни искать в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$?»

Школьники непрофильного класса имеют дело только с действительными числами, и их ответ «-1» верен. Школьники профильного класса, изучающие комплексные числа, знающие теорему Виета, подумали, что раз *все* корни, значит, и комплексные, и дали ответ «-2». Другие, более педантичные, решили всё-таки уточнить, на каком множестве задано уравнение.

Да, действительно, так поставленная задача на вступительном экзамене не является корректной. Пример 1 и в $\mathbb{R}$, и в $\mathbb{C}$ имеет один и тот же ответ, так как там все корни действительные. Поэтому важно, что любое *уравнение задаётся на конкретном множестве – в ОДЗ*. В школьном курсе в основном это подмножества $X \subseteq \mathbb{R}$.

Для предложений, определённых на одном и том же множестве X, в математической логике определены три операции: сложение, умножение и следствие. Для предложений-уравнений это выглядит так.

Пусть заданы $A(x) \equiv \{F(x)=0\}$, $x \in X$, $B(x) \equiv \{G(x)=0\}$, $x \in X$. Тогда

$$A(x)+B(x) \equiv \left\{\left[\begin{array}{l} F(x)=0, \\ G(x)=0 \end{array}\right]\right\}, x \in X,$$

т. е задана совокупность уравнений, и

$$A(x)\cdot B(x) \equiv \left\{\left\{\begin{array}{l} F(x)=0, \\ G(x)=0 \end{array}\right.\right\}, x \in X,$$

т. е. задана система уравнений.

С точки зрения математической логики, следствие – довольно сложная операция. Например, хотя $3=-3$ ложно, а $9=9$ истинно, считается, что $(3=-3) \Rightarrow (9=9)$; $2=-3$ (ложно)$\Rightarrow 4=5$ (ложно). А что значит, что

$$F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0\ ?$$

Пусть теперь заданы два предложения: $A(x) \equiv \{F(x)=0, x \in D(F)\}$ и $B(x) \equiv \{G(x)=0, x \in D(G)\}$. Из сказанного выше следует, что их можно рассматривать только на множестве, где они *одновременно* определены, т. е. на $X = D(F) \cap D(G)$ или на любом $X_1 \subseteq X$.

Примечание. Мы для определённости рассматриваем в качестве $A(x)$, $B(x)$ уравнения. На практике в роли $A(x)$, $B(x)$ чаще всего выступают смешанные системы уравнений и неравенств.

Из свойств высказываний в математической логике для предложений-уравнений, определённых *на одном и том же множестве X*, следуют утверждения.

Если для любого $x_0 \in X$ такого, что $F(x_0)=0$, имеет место и $G(x_0)=0$, то

$$F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0,$$

т. е. уравнение $G(x)=0$ является следствием уравнения $F(x)=0$.

Если найдётся хотя бы одно значение $x_0 \in X$ такое, что $F(x_0)=0$, а $G(x_0)\neq 0$, то $G(x)=0$ *не является* следствием $F(x)=0$.

Если $F(x_0)\neq 0$, а $G(x_0)=0$, то *считается*, что $G(x)=0$ *является* следствием уравнения $F(x)=0$, т. е. считается, что $F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0$.

Если $F(x_0)\neq 0$ и $G(x_0)\neq 0$, то *считается*, что $G(x)=0$ *является* следствием уравнения $F(x)=0$, т. е. считается, что $F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0$.

3. Уравнение-следствие

Теперь можно дать определение уравнения-следствия.

Пусть на множестве X заданы два уравнения: $F(x)=0$ и $G(x)=0$. Если *любой* корень уравнения $F(x)=0$ является также корнем уравнения $G(x)=0$, то уравнение $G(x)=0$ называется *следствием* уравнения $F(x)=0$. Это обозначается так:

$$F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0.$$

Если $F(x)=0$ *не имеет решений*, то независимо от того, есть корни у уравнения $G(x)=0$, принадлежащие X, или нет, уравнение $G(x)=0$ считается следствием уравнения $F(x)=0$, т. е. $F(x)=0 \Rightarrow G(x)=0$. Поэтому в этом случае *любое* уравнение *считается* следствием уравнения, не имеющего корней.

Два уравнения называются *равносильными*, если любое из них является следствием другого.

Примечание. В роли X самым «большим» множеством является $X=D(F)\bigcap D(G)$.

Рассмотрим два уравнения:

$$x^2-1=0 \text{ и } \left(x^2-1\right)(x+3)=0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Уравнение $x^2-1=0$ не является следствием уравнения

$$\left(x^2-1\right)(x+3)=0,$$

так как $x^2-1=0$ не содержит корня $x=-3$, но уравнение $\left(x^2-1\right)(x+3)=0$ является следствием уравнения $x^2-1=0$: $x^2-1=0 \Rightarrow \left(x^2-1\right)(x+3)=0.$

И вообще, уравнение $\left(x^2-1\right)f(x)=0$ является следствием уравнения $x^2-1=0$, где $f(x)$ – любая функция, определённая, например, на отрезке $[-1;1]$:

$$x^2-1=0 \Rightarrow \left(x^2-1\right)f(x)=0,\quad x\in[-1;1].$$

Едва ли, однако, имеет смысл рассматривать такие следствия.

Рассмотрим ещё пару уравнений: $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)$ и $\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)$. Уравнение $\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)$ не является, как некоторые авторы считают, «просто» следствием уравнения $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)$, так как у них разные ОДЗ:

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x),\ x\in X_1:\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\end{cases}$$

а

$$\sqrt{f(x)g(x)}=h(x),\ x\in X_2: f(x)g(x)\ge 0.$$

Тогда ясно, что одновременно предложения-уравнения $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)$ и $\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)$ можно рассматривать только на $X=X_1\bigcap X_2=X_1$ или любом его подмножестве. *На этом множестве* – ОДЗ заданного уравнения – уравнение $\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)$ не просто следствие уравнения $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)$, а оно ему равносильно:

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\sqrt{f(x)g(x)}=h(x). \quad (6)$$

Теперь заметим, что по определению если $F(x)=0\Leftrightarrow G(x)=0$, то $F(x)=0\Rightarrow G(x)=0$, т. е. *равносильное* уравнение $G(x)=0$ всегда *является следствием* заданного. Поэтому, конечно, можно записать, что

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)\overset{ОДЗ}{\Rightarrow}\overset{ОДЗ}{\Rightarrow}\sqrt{f(x)g(x)}=h(x). \quad (7)$$

Однако это не то, что

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=h(x)\Rightarrow \Rightarrow\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)!$$

В последнем соотношении *не хватает* условия, что рассматривается пара *в ОДЗ* заданного уравнения.

Вывод уравнений-следствий и многих равносильных соотношений часто опирается на числовые следствия. Но так как, в отличие от числового равенства $a=b$, соотношение $f(x)=g(x)$ не является «равенством», то и «предложение» $f(x)=g(x)$ обладает некоторыми особенностями.

Во-первых, функции $f(x)$, $g(x)$ имеют области определения $D(f)$, $D(g)$. Поэтому обе части соотношения $f(x)=g(x)$ имеют смысл *только* на $X_1\subseteq D(f)\cap D(g)=$ОДЗ уравнения. Например, уравнение $\sqrt{\sin x-2}=x^2+1$ не имеет решений, так как $\sqrt{\sin x-2}$ не существует, ОДЗ пусто. Если $D(f)\cap D(g)=\varnothing$, то уравнение не имеет решений. Это как-то должно отражаться на уравнении-следствии или нет? Конечно, да. Во-первых, следствием уравнения можно считать как раз *выполнение* ОДЗ (если уравнение имеет решение, то $x\in$ОДЗ):

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x\in D(f)\cap D(g). \quad (8)$$

Вне ОДЗ уравнения не рассматривают.

Во-вторых, функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют множества значений $E(f)$, $E(g)$. Поэтому если уравнение $f(x)=g(x)$ имеет решение $x=x_0$, то в этой точке значения функций $f(x)$ и $g(x)$ или одинаковых знаков, или одновременно обращаются в нуль, т.е.

$$f(x_0)\cdot g(x_0)\geq 0.$$

Это значит, что множество $X_2\subseteq X_1$, на котором $f(x)\cdot g(x)\geq 0$, не пусто. Если в ОДЗ функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают значения разных знаков, т. е. $f(x)\cdot g(x)<0$ в ОДЗ, то решений нет. Отсюда вытекает неравенство-следствие

$$f(x)=g(x)\Rightarrow f(x)g(x)\geq 0. \qquad (9)$$

Обратим внимание на то, что если $f(x)g(x)\geq 0$, то заведомо $x\in D(f)\cap D(g)$!

Если же существует X_2, то возможны, по крайней мере, три ситуации.

1) Пусть $f(x)\cdot g(x)\geq 0$ на X_2, но $E(f)\cap E(g)=\varnothing$. Например, если

$$f(x)=x^2+2,\ \ g(x)=e^{-x^2},$$

то $f(x)\cdot g(x)>0$ для любого $x\in\mathbb{R}$,

$$E(f)=[2;+\infty),\ \ E(g)=(0;1],$$

но

$$E(f)\cap E(g)=\varnothing,$$

уравнение $x^2+2=e^{-x^2}$ не имеет решений.

2) На X_2 и $f(x)\cdot g(x)\geq 0$, и $E(f)\cap E(g)\neq\varnothing$, но $f(x)\neq g(x)$ в любой точке X_2. Например, если

$$f(x)=x+3,\ g(x)=x-3,$$

то $f(x)\cdot g(x)\geq 0$ на

$$X_2=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty),$$

$$E(f)\cap E(g)=(-\infty;-6]\cup[6;+\infty),$$

но $f(x)\neq g(x)$ при любом $x\in X_2$ (прямые параллельны), уравнение $x+3=x-3$ не имеет решений.

3) Найдётся $x=x_0$ такой, что $f(x_0)=g(x_0)$ – уравнение $f(x)=g(x)$ имеет корень. Например, $f(x)=x^2+1$, $g(x)=e^{-x^2}$, $E(f)=[1;+\infty)$, $E(g)=(0;1]$, $f(x)\cdot g(x)>0$, $E(f)\cap E(g)=\{1\}\Rightarrow f(0)=1$, $g(0)=1$, а тогда

$$x^2+1=e^{-x^2}\Leftrightarrow x=0.$$

Алгоритмов нахождения корня любого уравнения не существует. Поэтому иногда исследование или ОДЗ уравнения, или множества $X_2\subseteq X_1$, на котором $f(x)\cdot g(x)\geq 0$ не пусто, или множества $E(f)\cap E(g)$ могут помочь, а иногда и полностью решить уравнение. Чаще всего такие методы называют *нестандартными*.

Заметим, что часто уравнение $F(x)=0$ равносильно не одному уравнению, а системе, содержащей уравнение $G(x)=0$ и некоторые неравенства.

4. Самое известное уравнение-следствие: $f(x)=g(x)\Rightarrow f^2(x)=g^2(x)$

Известно, что для любого уравнения вида $f(x)=g(x)$ уравнение $f^2(x)=g^2(x)$ является его следствием, т. е.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow f^2(x)=g^2(x). \qquad (10)$$

А как быть с ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$? Оно не указано. Да, не указано, ибо в этом нет необходимости, так как, если существуют $f(x)$, $g(x)$, то существуют и их квадраты

$f^2(x)$, $g^2(x)$. Это означает: *молчаливо подразумевается*, что пара

$$f(x)=g(x) \text{ и } f^2(x)=g^2(x)$$

рассматривается там, где

$$x\in D(f)\cap D(g),$$

т. е. в ОДЗ заданного уравнения.

То, что уравнение $f^2(x)=g^2(x)$ может быть *только следствием*, можно понять, так как оно содержит решения постороннего уравнения $f(x)=-g(x)$. Например,

$$x-1=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{3},$$

но

$$x-1=-\sqrt{3}\Rightarrow (x-1)^2=\left(-\sqrt{3}\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\left(x-1+\left(-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-1-\left(-\sqrt{3}\right)\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} x-1=-\sqrt{3}, \\ x-1=\sqrt{3} \end{array}\right.\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}.$$

На практике линейное уравнение едва ли кто-нибудь будет решать возведением в квадрат, но сравнивать решения линейного уравнения и возведённого в квадрат иногда приходится. Обычно обе части уравнения возводят в квадрат, чтобы упростить нахождение решения – избавиться, например, от корней или от модулей.

Если уравнение не рациональное, то реально *уравнения*-следствия встречаются при решении лишь двух типов уравнений:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Rightarrow f(x)=g^2(x)$$

и

$$|f(x)|=g(x)\Rightarrow f^2(x)=g^2(x).$$

В остальных случаях, как правило, следствием уравнения является смешанная система.

Интересно, что ОДЗ: $f(x)\geq 0$ уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$ автоматически выполняется в уравнении-следствии! Запишем подробно:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Rightarrow f(x)=g^2(x)\Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)\left(\sqrt{f(x)}+g(x)\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{f(x)}=g(x), \\ \sqrt{f(x)}=-g(x). \end{array}\right.$$

А также

$$|f(x)|=g(x)\Rightarrow f^2(x)=g^2(x)\Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x), \end{array}\right.$$

или

$$|f(x)|=g(x)\Rightarrow |f(x)|^2=g^2(x)\Leftrightarrow$$
$$\left(|f(x)|-g(x)\right)\left(|f(x)|+g(x)\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} |f(x)|=g(x), \\ |f(x)|=-g(x). \end{array}\right.$$

Любопытно, что, если расписать $|f(x)|^2=g^2(x)$ как $f^2(x)=g^2(x)$, то не видно, есть ли здесь постороннее уравнение. А, если расписать $|f(x)|^2=g^2(x)$ как

$$\left(|f(x)|-g(x)\right)\left(|f(x)|+g(x)\right)=0,$$

то очевидно, что есть постороннее уравнение

$$|f(x)|=-g(x)!$$

После решения уравнения-следствия найденные корни подставляются в заданное уравнение, чтобы «отсечь» посторонние корни, если таковые имеются.

5. Система неравенств $\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ h(x) \ge s(x) \end{cases}$ и её неравенство-следствие $f(x)+h(x) \ge g(x)+s(x)$

Опираясь на числовое следствие (4), легко показать, что

$$\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ h(x) \ge s(x) \end{cases} \Rightarrow \quad (11)$$
$$f(x)+h(x) \ge g(x)+s(x),$$

т. е. неравенства одного знака можно складывать. Так как все функции остались, ОДЗ сохранилось. Но

$$\begin{cases} f(x) \ge s(x), \\ s(x) \ge g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ x \in D(s). \end{cases}$$

В этом случае $s(x)$ сократилось, а ОДЗ функции может быть уже, чем ОДЗ полученного неравенства $f(x) \ge g(x)$. Это свойство особенно удобно использовать тогда, когда неравенство-следствие имеет конечное число решений (а не промежуток).

Пример 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2-4x+e^x \le 0, \\ 4-x^2-e^x \le 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2x^2-4x+e^x \le 0, \\ 4-x^2-e^x \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$2x^2-4x+e^x+4-x^2-e^x \le 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=2.$$

Подставим $x=2$ в систему:

$$\begin{cases} 2\cdot 4-4\cdot 2+e^2 \le 0 - \text{неверно}, \\ 4-x^2-e^x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Ответ. $\varnothing$.

Пример 4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78} \le 6x^2-9, \\ \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78} \ge x^4. \end{cases}$$

Решение. Перепишем первое неравенство по-другому, а затем сложим его со вторым:

$$\begin{cases} \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78} \le 6x^2-9, \\ \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78} \ge x^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\sqrt{\left(x^2-3\right)x^{67}-\sqrt{3}x+78} \ge -6x^2+9, \\ \sqrt{\left(x^2-3\right)x^{67}-\sqrt{3}x+78} \ge x^4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\left(x^2-3\right)x^{67}-\sqrt{3}x+78}-$$
$$-\sqrt{\left(x^2-3\right)x^{67}-\sqrt{3}x+78} \ge x^4-6x^2+9 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(x^2-3\right)x^{67}-\sqrt{3}x+78 \ge 0, \\ \left(x^2-3\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.$$

Так как неравенство $x^4-6x^2+9 \le 0$ является только следствием системы, то подставим корни в систему. Получим

$$\begin{cases} \sqrt{(3-3)x^{67}-\sqrt{3}\cdot\pm\sqrt{3}+78} \le 6\cdot 3-9 - \text{верно}, \\ \sqrt{(3-3)x^{67}-\sqrt{3}\pm\sqrt{3}+78} \ge 9 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=-\sqrt{3}.$$

Ответ. $\left\{-\sqrt{3}\right\}$.

6. Равносильные числовые соотношения и равносильные уравнения (системы) и системы

Теоретическое «отступление»

Так как значок «$\vee$» появился у разработчиков ЕГЭ, то и мы позволим себе его использовать. В предыдущих пособиях мы не решались этого делать, а пользовались, например, при формулировке «Правил» такой фразой: «Знак функции $f(x)$ совпадает со знаком функции $g(x)$, функции $f(x)$ и $g(x)$ обращаются в нуль одновременно в ОДЗ». Теперь же «Правило» можно записать короче:

$$f(x)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} g(x)\vee 0 .$$

Поясним подробнее. Рассмотрим две функции $F(x)$, $G(x)$ на множестве $X\subseteq D(F)\cap D(G)$, где они обе определены (на самом деле это могут быть системы, функция и система и т.д.). Пусть на этом множестве имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&F(x)=0\Leftrightarrow G(x)=0,\\&F(x)>0\Leftrightarrow G(x)>0,\\&F(x)<0\Leftrightarrow G(x)<0,\\&F(x)\ge 0\Leftrightarrow G(x)\ge 0,\\&F(x)\le 0\Leftrightarrow G(x)\le 0,\end{aligned}\qquad (12)$$

тогда про $F(x)$ и $G(x)$ мы говорим, что «знак $F(x)$ совпадает со знаком $G(x)$, функции $F(x)$ и $G(x)$ обращаются в нуль одновременно на $X\subseteq D(F)\cap D(G)$».

Если ОДЗ у $F(x)$ и $G(x)$ совпадают, то мы запишем

$$G(x)\vee 0\Leftrightarrow F(x)\vee 0. \qquad (13)$$

Если у $F(x)$ и $G(x)$ разные ОДЗ или по каким-то причинам мы сравниваем поведение $F(x)$ и $G(x)$ на некотором множестве X, где обе они определены, то мы запишем по-другому:

$$G(x)\vee 0 \overset{x\in X}{\Leftrightarrow} F(x)\vee 0. \qquad (14)$$

Часто в роли $F(x)$ и $G(x)$ мы рассматриваем разности:

$$\begin{aligned}&F(x)\equiv f(x)-g(x),\\&G(x)\equiv u(x)-v(x).\end{aligned}$$

Тогда (13) примет вид

$$f(x)-g(x)\vee 0\Leftrightarrow u(x)-v(x)\vee 0. \qquad (15)$$

Рассмотрим пример. Известно, что при любых $n\in\mathbb{N}$, $x,a\in\mathbb{R}$ имеет место формула

$$x^{2n}-a^{2n}=\left(x^2-a^2\right)\times\left(\begin{matrix}x^{2(n-1)}+x^{2(n-2)}a^2+x^{2(n-3)}\left(a^2\right)^2\\+\ldots+\left(a^2\right)^{n-1}\end{matrix}\right). \qquad (16)$$

Так как очевидно, что большая скобка при $a\ne 0$ положительна, то (проверьте!)

$$x^{2n}-a^{2n}\vee 0\Leftrightarrow x^2-a^2\vee 0. \qquad (17)$$

Иная ситуация для $\left(\sqrt{x}\right)^{2n}-a^{2n}$, когда выражение имеет ОДЗ: $x\ge 0$. Поэтому

$$\left(\sqrt{x}\right)^{2n}-a^{2n}\vee 0\overset{x\ge 0}{\Leftrightarrow} x-a^2\vee 0 ,$$

или

$$\left(\sqrt{x}\right)^{2n}-a^{2n}\vee 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x-a^2\vee 0. \qquad (18)$$

Теперь переходим к заявленной теме. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

1) $a \ge b \Leftrightarrow a+c \ge b+c$

или

$$a \le b \Leftrightarrow a+c \le b+c,$$

$$a \vee b \Leftrightarrow a+c \vee b+c. \qquad (19)$$

В частности,

$$a = b \Leftrightarrow a+c = b+c. \qquad (20)$$

Если применить эти равносильные соотношения к уравнениям, то получится сложнее – ведь ОДЗ дополнительного слагаемого может отличаться от ОДЗ заданного уравнения. Поэтому

$$f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+h(x) \vee g(x)+h(x), \\ D(h) \supseteq X. \end{cases} \qquad (21)$$

Эта операция чаще всего применяется для преобразования выражений. Например,

$$x+\sqrt{x} \vee 2\sqrt[4]{x} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1+\sqrt{x} \vee$$

$$\vee\, 2\sqrt[4]{x}+1+\sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)^2 \vee \left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1-\sqrt[4]{x}-1\right) \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\sqrt[4]{x} \vee 0.$$

2) $$a = b \Leftrightarrow \begin{cases} ac = bc, \\ c \ne 0, \end{cases} \qquad (22)$$

т. е. равенство равносильно смешанной системе. Для уравнений это будет так:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)h(x) = g(x)h(x), \\ h(x) \ne 0, D(h) \supseteq D(f) \cap D(g). \end{cases} \qquad (23)$$

Можно записать и так:

$$f(x)h(x) = g(x)h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) \ne 0, \\ x \in D(h). \end{cases} \qquad (24)$$

В уравнениях такую операцию часто применяют, например, при «сокращении» уравнения на ненулевые множители.

Иногда можно увидеть, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Rightarrow P(x) = 0.$$

Но среди числовых следствий такого нет. Ведь $P(x)=0$ получилось при «умножении» на $Q(x)$, а в (23) умножать можно на $Q(x) \ne 0$, при этом получается равносильное уравнение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \ne 0. \end{cases}$$

Конечно, можно записать и так:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \ne 0, \end{cases}$$

но это не то, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Rightarrow P(x).$$

Но какой в этом смысл?

3) $$\begin{cases} a = b, \\ c = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c = b+d, \\ c = d. \end{cases} \qquad (25)$$

Применительно к уравнениям получаем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) = s(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+h(x) = g(x)+s(x), \\ h(x) = s(x). \end{cases} \qquad (26)$$

В отличие от системы неравенств, замена одного из уравнений суммой других приводит к *равносильной* системе.

4) $$a \ge b \Leftrightarrow \begin{cases} ac \ge bc, \\ c > 0 \end{cases}$$

или

$$a \le b \Leftrightarrow \begin{cases} ac \le bc, \\ c > 0 \end{cases} \qquad (27)$$

– неравенство равносильно системе неравенств, т. е.

$$a \vee b \Leftrightarrow \begin{cases} ac \vee bc, \\ c > 0. \end{cases}$$

Для уравнений и неравенств имеем

$$f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)h(x) \vee g(x)h(x), \\ h(x) > 0, \\ x \in D(h) \supseteq D(f) \cap D(g). \end{cases} \quad (28)$$

7. Приведение подобных слагаемых

5) $a + c \vee b + c \Leftrightarrow a \vee b.$ (29)

Если применить это равносильное соотношение к уравнениям, то получится сложнее – ОДЗ *исчезающего* слагаемого может отличаться от ОДЗ полученного уравнения. Поэтому для уравнений записывается так:

$$f(x) + h(x) \vee g(x) + h(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \vee g(x), \\ x \in D(h). \end{cases} \quad (30)$$

Эта операция чаще всего применяется при приведении подобных членов после раскрытия скобок.

Нередко говорят и пишут, что преобразования приводят к расширению или сужению ОДЗ. Спрашивается, а ОДЗ какого уравнения? Дело в том, что ОДЗ заданного уравнения или неравенства не может измениться. А вот уравнение или неравенство, равносильно ли оно заданному или является просто следствием, может иметь ОДЗ, отличное от ОДЗ исходного уравнения или неравенства.

Мы должны помнить, что сравнение двух уравнений (или двух неравенств) можно производить только на множестве, на котором они *оба определены*, независимо от того, одинаковые у них ОДЗ или разные. Например, что такое *приведение подобных* членов? Это значит, что уравнение

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

сравнивается с уравнением

$$f(x) = g(x).$$

У них, вообще говоря, разные ОДЗ:

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x),$$
$$x \in D(f) \bigcap D(g) \bigcap D(h)$$

($x \in ОДЗ$ уравнения),

$$f(x) = g(x),\ x \in D(f) \bigcap D(g),$$

ОДЗ *второго уравнения шире,* чем ОДЗ заданного уравнения. А сравниваться они могут только на ОДЗ заданного уравнения! Никакого расширения ОДЗ *заданного* уравнения нет! Так как $D(f) \bigcap D(g)$ у них общее, то

$$f(x) + h(x) \vee g(x) + h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \vee g(x), \\ x \in D(h). \end{cases}$$

Например,

$$\left(x + \sqrt{x}\right)^2 - 3x^2 + 4x + x\left(1 - \sqrt{x}\right)^2 + 16 \vee 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 3x^2 + 4x +$$
$$+ x - 2x\sqrt{x} + x^2 + 16 \vee 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ -x^2 + 6x + 16 \vee 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x \geq 0, \\ -(x - 8)(x + 2) \vee 0 \end{cases} \Leftrightarrow -(x - 8) \vee 0.$$

Уравнение или неравенство едва ли задаётся в виде

$$f(x) + h(x) \vee g(x) + h(x),$$

хотя и так бывает, см. примеры 5, 6.

Если считать уравнение $f(x)=g(x)$ следствием (как это считается в некоторых источниках), то *все* его решения надо подставлять в исходное уравнение

$$f(x)+h(x)=g(x)+h(x),$$

а это просто лишняя работа, и не всегда простая. А так как на самом деле уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно исходному в ОДЗ, то корни надо подставить *только* в $D(h)$.

Пример 5. Решите уравнение

$$2x^2+7x-12+\sqrt{x^2-25}=$$
$$=x^2-11x+\sqrt{x^2-25}.$$

Решение. Воспользуемся равносильной системой:

$$2x^2+7x-12+\sqrt{x^2-25}=x^2+11x+\sqrt{x^2-25}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}2x^2+7x-12=x^2+11x\Leftrightarrow x=2\pm4,\\ x^2-25\geq0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=6.$$

Ответ. $\{6\}$.

Пример 6. Решите уравнение

$$x^2-8x+1+\sqrt{(x-0{,}12)(x-4{,}9)}=$$
$$=\sqrt{(x-0{,}12)(x-4{,}9)}.$$

Решение.

$$x^2-8x+1+\sqrt{(x-0{,}12)(x-4{,}9)}=$$
$$=\sqrt{(x-0{,}12)(x-4{,}9)}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}x^2-8x+1=0\Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{15},\\ (x-0{,}12)(x-4{,}9)\geq0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=4+\sqrt{15}.$$

Мы сравнили числа $4-\sqrt{15}$ и $0{,}12$:

$$4-\sqrt{15}\vee0{,}12\Leftrightarrow3{,}88\vee\sqrt{15}\Leftrightarrow$$
$$15{,}0544>15\Leftrightarrow4-\sqrt{15}>0{,}12.$$

Если считать уравнение

$$x^2-8x+1=0\Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{15}$$

лишь следствием, как некоторые авторы считают, то корни надо подставлять в само уравнение, что сделать в данном случае не очень просто. А так как на самом деле уравнение $x^2-8x+1=0$ *равносильно* заданному в ОДЗ, то достаточно проверить, какие из них принадлежат ОДЗ.

Ответ. $\{4+\sqrt{15}\}$.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Квантовый компьютер

Квантовый компьютер – это устройство, которое использует явления квантовой суперпозиции и квантовой запутанности для передачи и обработки данных. Данное устройство применяет для вычисления не обычные классические алгоритмы, а процессы квантовой природы, так называемые квантовые алгоритмы, использующие квантовомеханические эффекты, это квантовый параллелизм и квантовая запутанность.

Возможность построения квантового компьютера появилась, в частности, благодаря развитию квантовой теории и проведению сложных экспериментов; почти все разработки в данной области связаны с новейшими открытиями и достижениями современной физики. Идея квантовых вычислений была высказана Юрием Маниным в 1980 году. Одна из первых теоретических моделей квантового компьютера была предложена Ричардом Фейнманом уже год спустя.

Хотя полноценный универсальный квантовый компьютер пока рассматривается лишь как гипотеза, работы над его созданием идут, в частности, в МФТИ. В 2016 году учёные Лаборатории искусственных квантовых систем и Центра коллективного пользования МФТИ первые в России изготовили и протестировали устройство, представляющее собой сверхпроводящую двухкубитную схему с управляемой связью, которая является дальнейшим развитием созданного ранее на Физтехе кубита – основного элемента будущих квантовых компьютеров. Также на Физтехе существует кафедра наноэлектроники и квантовых компьютеров, которая образовалась в результате слияния двух кафедр: кафедры физических и технологических проблем микроэлектроники (образована в 1989 году) и кафедры квантовой информатики и вычислительных систем (образована в 1991 году).

Построение квантового компьютера – одна из фундаментальных задач физики XXI века. Пока построены только ограниченные его варианты. Вопрос о том, до какой степени возможно масштабирование такого устройства, – суть новой интенсивно развивающейся области науки, которая называется многочастичной квантовой механикой.