



Пукас Юрий Остапович

Закончил в 1974 году физфак МГУ, работал в Королёве, принимал участие в программе «Союз – Аполлон», с 1978 по 2004 гг. работал в ФИАЭ им. Курчатова. С 1991 по 2016 гг. преподавал математику и физику в школах города Троицка.

Автор книг и множества статей по подготовке к ЕГЭ и олимпиадной математике.



Пятнадцать девятнадцатых. Задачи на целые числа в вариантах ЕГЭ – 2020

Тематика последних (девятнадцатых) задач в вариантах 2020 года достаточно разнообразна, интересна и поучительна. Это хорошо. Но, к сожалению, диапазон сложности этих задач тоже очень широк.

Начнём с двух задач из вариантов досрочного экзамена. Из-за эпидемии он не проводился, но варианты ведь были подготовлены, и в середине апреля на сайте ФИПИ они были выложены с ответами и решениями для ознакомления и тренировки.

19.1. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение. а) Число дней может быть больше не только 5, но и любого наперёд заданного числа. Например, в первый день напишем $2k$ единиц, во второй: $2(k-1)$ единиц и одну тройку. Количество чисел на одно уменьшилось, а их сумма увеличилась на единицу. В третий день напишем $2(k-2)$ единиц и две тройки... В $(k+1)$ день единиц не останется, а будут написаны k троек. И процесс может ещё какое-то время продолжаться. Например, написать вместо трёх троек – две пятёрки. Наверняка можно привести и другие алгоритмы.

б) Да, это возможно.

Приведём сначала пример (этого достаточно), а потом объясним, как он придумывался. В первый день написаны 11 чисел: десять троек и одна двойка, во второй – шесть четвёрок и четыре пятёрки, в третий –

девять пятёрок. Сумма всех тридцати чисел равна 121, их среднее арифметическое равно $\frac{121}{30} = 4\frac{1}{30}$.

Рассуждать можно так: пусть в первый день на доске записаны $(k+1)$ чисел, чья сумма равна $(3k+2)$, если во второй день записать k пятёрок, среднее арифметическое всех записанных чисел будет меньше, чем 4. Чтобы превысить это значение, среди всех написанных чисел должно быть не менее, чем $k+3$ пятёрок. Заметив, что 6 четвёрок можно «заменить» на 5 пятёрок, начинаем действовать. Во второй день записываем 6 четвёрок и $(k-6)$ пятёрок, а в третий день: $(k-1)$ пятёрок. Для общего количества пятёрок должно выполняться неравенство $(k-6) + (k-1) \geq k+3 \Rightarrow k \geq 10$.

А пример для $k=10$ нами уже приведён.

в) Пусть в первый день записано 6 единиц. Дело в том, что, если существует вариант получения наибольшей суммы всех чисел, записанных за все дни, мы получим тот же результат, скопировав из него все наборы чисел, начиная со второго дня.

Так как количества чисел, написанных ежедневно, уменьшается с каждым днём, больше шести дней процесс не продлится. Но и 6 дней он не продлится, так как в последний шестой день должно остаться единственное число, а оно, по условию, не больше, чем 5, то есть меньше, чем сумма чисел, написанных в первый день. Рассмотрим другие варианты. Если $n=5$, то в последний день записаны два числа, их максимальная сумма равна 10, а сумма всех чисел,

записанных за все дни не больше, чем $10+9+8+7+6=40$.

Если $n=4$, то в последний день записаны три числа, их максимальная сумма равна 15, а сумма всех чисел, записанных за все дни, не больше, чем $15+14+13+6=48$.

Если $n=3$, то в последний день записаны 4 числа, их максимальная сумма равна 20, а сумма всех чисел, записанных за все дни, не больше, чем $20+19+6=45$.

Если $n=2$, то в последний день записаны 5 чисел, их максимальная сумма равна 25, а сумма всех чисел, записанных за все дни, не больше, чем $25+6=31$.

Покажем, как получить сумму 48 для $n=4$:

$$(1+1+1+1+1) + (5+5+1+1+1) + (5+5+2+2) + (5+5+5) = 48.$$

Ответ: а) да; б) да; в) 48.

Из второго варианта досрочного экзамена:

19.2. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Ответ: а) да; б) да; в) 34.

На фоне большинства задач, условия которых появились к концу 10 июля, следующая выделялась сложностью третьего пункта:

19.3. Дальний Восток и Санкт-Петербург (полное совпадение условий).

На доске написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы справа приписали цифру 6, к каждому числу из второй группы справа приписали цифру 9, а числа третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 9 раз?

б) Может ли сумма всех этих чисел увеличиться в 19 раз?

в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

Решение.

а) Да, это возможно. Можно привести много примеров. Вот один из них. На доске написаны числа 12, 13 и 5. Их сумма равна 30, а сумма чисел 126, 139 и 5 равна 270. Как он получен? Предположим, что на доске всего три числа: a , b и c . После приписываний цифр справа, получаем $10a+6$, $10b+9$ и c .

Составляем уравнение $(10a+6)+(10b+9)+c=9(a+b+c) \Rightarrow a+b+15=8c$. Берём, например, $c=5$, тогда $a+b=25$. Разумеется, в ответе достаточно привести три числа, и показать, что для них выполняются условия первого пункта.

б) Пусть в первой группе m чисел, и их сумма равна A . Во второй группе — n чисел, их сумма равна B , а в третьей группе — k чисел, их

сумма равна C . Для первоначальных и окончательных сумм, написанных на доске чисел, получаем уравнение $(10A+6m)+(10B+9n)+C=19(A+B+C) \Rightarrow 6m+9n=9A+9B+18C$. Но сумма чисел не может быть меньше их количества, поэтому $6m \leq 6A < 9A$, $9n \leq 9B$, $18C \geq 18k \geq 18$. Следовательно, соотношение $6m+9n=9A+9B+18C$ не может выполняться. Ответ в пункте б) — нет.

в) Нас просят найти наибольшее значение отношения

$$Q = \frac{10A+6m+10B+9n+C}{A+B+C}.$$

Сначала стандартное преобразование: $Q = \frac{10A+6m+10B+9n+C}{A+B+C} = 10 + \frac{6m+9n-9C}{A+B+C}.$

Теперь немного рассуждений. Предположим, что на доске выписаны именно те числа, при которых достигается наибольшее значение Q , и они как-то распределены по трём группам. Но если мы оставим в первой группе одно любое число, а остальные переведём во вторую группу, числитель увеличится, а знаменатель не изменится. Далее, если мы оставим в третьей группе одно самое маленькое из находящихся в ней чисел, а остальные перенесём во вторую, то числитель опять увеличится, а знаменатель не изменится. Значит, отношение Q будет наибольшим, если $m=k=1$, а всего чисел на доске $n+2$. С учётом всего этого уточняем выражение для Q : $Q = 10 + \frac{6+9n-9C}{A+B+C}.$

Оценим эту величину с учётом того, что числитель $6+9n-9C \leq$

$\leq 6 + 9n - 9 = 9n - 3$, а знаменатель

$$A+B+C \geq 1+2+\dots+(n+2) = \frac{(n+3)(n+2)}{2}.$$

$$\text{Тогда } Q_{\max} \leq 10 + \frac{2(9n-3)}{(n+3)(n+2)}.$$

Осталось выяснить, при каком значении n максимум правой части этого неравенства достигается. Можно вычислить производную:

$$Q'(n) = \frac{-6(3n^2 - 2n - 23)}{(n+3)^2(n+2)^2}.$$

$Q'(3) > 0$, а $Q'(4) < 0$, поэтому наибольшее значение Q принимает в одной из этих точек.

Сравниваем:

$$Q(3) = 11,6 > Q(4) = 11\frac{4}{7}.$$

Получается, что $Q_{\max} = 11,6$, а достигается это значение для чисел 1, 2, 3, 4 и 5, которые преобразуются в числа 1, 29, 39, 49 и 56, причём их сумма равна $174 = 11,6 \cdot 15$.

Ответ: а) да; б) нет; в) в 11,6 раза.

Предположим, что на экзамене у сидящего перед вами «олимпиадника» в варианте встретилась задача **19.3**, а у вас – **19.4** (вполне возможно, что у вас обоих **19.3**). Зрение у вас хорошее. Адаптировать готовое решение не составит тогда никакого труда. Что же нереального в этой ситуации? Случаи с одинаковыми задачами не редкость, а вот чтобы сосед был толковый, с этим напряжёнкой.

19.4. На доске написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы справа приписали цифру 1, к каждому числу из второй

группы справа приписали цифру 6, а числа третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 6 раз?

б) Может ли сумма всех этих чисел увеличиться в 16 раз?

в) в какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

Решение.

а) Да, это возможно. Можно привести много примеров. Вот один из них. На доске написаны числа 3, 4 и 7. Их сумма равна 14, а сумма чисел 31, 46 и 7 равна 84, что как раз в 6 раз больше первоначальной суммы.

б) Пусть в первой группе m чисел, и их сумма равна A . Во второй группе – n чисел, их сумма равна B , а в третьей группе – k чисел, их сумма равна C . Для первоначальных и окончательных сумм, написанных на доске чисел, получаем уравнение $(10A + m) + (10B + 6n) + C = 16(A + B + C)$
 $\Rightarrow m + 6n = 6A + 6B + 15C$. Но сумма чисел не может быть меньше их количества, поэтому $m \leq A < 6A$, $6n \leq 6B$, $15C \geq 15k \geq 15$. Следовательно, соотношение $m + 6n = 6A + 6B + 15C$ не может выполняться. Ответ в пункте б) – нет.

в) Требуется найти наибольшее значение отношения

$$Q = \frac{10A + m + 10B + 6n + C}{A + B + C}.$$

Преобразуем к более удобному виду:

$$Q = \frac{10A + m + 10B + 6n + C}{A + B + C} = 10 + \frac{m + 6n - 9C}{A + B + C}.$$

Теперь повторяем рассуждения из предыдущего решения. Предположим, что на доске выписаны

именно те числа, при которых достигается наибольшее значение Q , и они как-то распределены по трём группам. Но если мы оставим в первой группе одно любое число, а остальные переведём во вторую группу, числитель увеличится, а знаменатель не изменится. Далее, если мы оставим в третьей группе одно самое маленькое из находящихся в ней чисел, а остальные перенесём во вторую, то числитель опять увеличится, а знаменатель не изменится. Значит, отношение Q будет наибольшим, если $m=k=1$, а всего чисел на доске $n+2$. С учётом всего этого уточняем выражение для Q :

$$Q = 10 + \frac{1+6n-9C}{A+B+C}.$$

Оценим эту величину с учётом того, что числитель $1+6n-9C \leq 1+6n-9 \leq 1+6n-9 = 6n-8$, а знаменатель $A+B+C \geq 1+2+\dots+(n+2) = \frac{(n+3)(n+2)}{2}$.

$$\text{Тогда } Q_{\max} \leq 10 + \frac{2(6n-8)}{(n+3)(n+2)}.$$

Осталось выяснить, при каком значении n достигается максимум правой части этого неравенства. Можно вычислить производную:

$$Q'(n) = \frac{-4(3n^2 - 4n - 28)}{(n+3)^2(n+2)^2}.$$

$Q'(4) > 0$, а $Q'(5) < 0$, поэтому наибольшее значение Q принимает в одной из этих точек.

Сравниваем:

$$Q(5) = 10\frac{11}{14} > Q(4) = 10\frac{16}{21}.$$

Получается, что $Q_{\max} = 10\frac{11}{14}$, а достигается это значение для чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6

и 7, которые преобразуются в числа 1, 26, 36, 46, 56, 66 и 71, причём их сумма равна $302 = 10\frac{11}{14} \cdot 28$.

Можно действовать иначе, не вычисляя производную.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} Q(n+1) - Q(n) &= \\ &= \frac{2(6n-2)}{(n+4)(n+3)} - \frac{2(6n-8)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{4(14-3n)}{(n+4)(n+3)(n+2)}. \end{aligned}$$

Значит, $Q(n+1) - Q(n) > 0$, при $n \leq 4$ и $Q(n+1) - Q(n) < 0$, при $n \geq 5$.

Таким образом, $Q_{\max} = Q(5) = 10\frac{11}{14}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) в $10\frac{11}{14}$

раза.

А вот следующая задача, случайно встретившаяся мне на одном из форумов, малоизвестна. Её условие больше нигде не воспроизводилось, решение не приводилось, и, естественно, не обсуждалось. Она отличается от двух предыдущих третьим вопросом.

19.5. На доске написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы справа приписали цифру 5, к каждому числу из второй группы справа приписали цифру 9, а числа третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 2 раза?

б) Может ли сумма всех этих чисел увеличиться в 19 раз?

в) Какое наибольшее количество чисел может быть написано на дос-

ке, чтобы сумма получившихся чисел была в 11 раз больше суммы изначальных чисел?

Решение.

Привычно получив ответы «да» и «нет», переходим к третьему вопросу.

в) Если бы мы, как в предыдущих задачах, искали ответ на вопрос, в какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел, то сначала получили бы выражение

$$Q = \frac{10A + 5m + 10B + 9n + C}{A + B + C} = 10 + \frac{5m + 9n - 9C}{A + B + C}, \text{ затем оценку}$$

$$Q_{\max} \leq 10 + \frac{2(9n - 4)}{(n + 3)(n + 2)}.$$

В результате пришли бы к тому, что $Q_{\max} = Q(3) = 11\frac{8}{15}$. Достигается же это значение для чисел 1, 2, 3, 4 и 5, которые преобразуются в числа 1, 25, 39, 49 и 59, причём их сумма равна $173 = 11\frac{8}{15} \cdot 15$.

Все эти действия стали такими привычными! А нам теперь надо искать ответ на другой вопрос, поможет ли нам опыт решения предыдущих задач? Видимо, начать надо вот с этого соотношения:

$$(10A + 5m) + (10B + 9n) + C = 11(A + B + C) \Rightarrow 5m + 9n = A + B + 10C.$$

Рассказывать (письменно) о том, как проходили дальнейшие поиски решения, не так-то просто. Но этого и не требуется при оформлении работы. Я просто сначала приведу пример, какие 13 чисел надо написать на доске, и как из них получить числа с суммой в 11 раз больше суммы изначальных чисел. А потом докажу, что для большего, чем 13, количества чисел, это невозможно.

Числа 1, 2, 3, ..., 12, 13 (их сумма равна 91) преобразуются в числа 1, 25, 35, 49, ..., 139 (их сумма равна 1001). Это как раз то, к чему мы стремились: $\frac{1001}{91} = 11$.

Пример с 13 числами приведён. Покажем, что это количество чисел максимально, что при $m + n + k \geq 14$,

$$Q = \frac{10A + 5m + 10B + 9n + C}{A + B + C} = 10 + \frac{5m + 9n - 9C}{A + B + C} < 11.$$

Уже объяснялось, что отношение Q будет наибольшим, если $m = k = 1$, а всего чисел на доске $n + 2$. С учётом всего этого получаем

$$Q \leq 10 + \frac{5 + 9n - 9C}{A + B + C}, n \geq 12.$$

Оценим эту величину с учётом того, что числитель $5 + 9n - 9C \leq 5 + 9n - 9 = 9n - 4$, а знаменатель

$$A + B + C \geq 1 + 2 + \dots + (n + 2) = \frac{(n + 3)(n + 2)}{2}.$$

$$\text{Тогда } Q \leq 10 + \frac{5 + 9n - 9C}{A + B + C} \leq 10 + \frac{18n - 8}{(n + 3)(n + 2)}.$$

Покажем, что $10 + \frac{2(9n - 4)}{(n + 3)(n + 2)} < 11$ при всех $n \geq 12$.

$$10 + \frac{2(9n - 4)}{(n + 3)(n + 2)} < 11 \Leftrightarrow \frac{2(9n - 4)}{(n + 3)(n + 2)} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 13n + 14 > 0 \Rightarrow n > \frac{13 + \sqrt{113}}{2}.$$

$$\text{Так как } \frac{13 + \sqrt{113}}{2} < \frac{13 + \sqrt{121}}{2} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq 12.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 13.

19.6. Сибирь.

На доске записаны несколько различных натуральных чисел, в записи которых есть только цифры 2 и 7 (число может состоять из одинаковых цифр).

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 81?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 197?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть записано на доске, если их сумма равна 2099?

Решение.

а) Да, может: $2+7+72=81$.

б) Рассмотрим все числа, меньшие, чем 197, в десятичной записи которых есть только цифры 2 и 7: 2, 7, 22, 27, 72, 77. Их сумма равна 207, что на 10 превышает нужное нам число. Среди перечисленных чисел нет числа 10, нет также чисел, чья сумма равна 10. Поэтому сумма чисел, написанных на доске, не может равняться 197.

в) Хороший вопрос. Тут надо обратить внимание на то, что все числа, написанные на доске, дают остаток 2 при делении на 5, а их сумма, равная 2099, – остаток 4. Следовательно, чтобы получить в сумме такой остаток, чисел должно быть два, семь, двенадцать, семнадцать и так далее.

Рассмотрим все числа, меньшие, чем 2099, в десятичной записи которых есть только цифры 2 и 7: 2, 7, 22, 27, 72, 77, 222, 227, 272, 277, 722, 727, 777. Два самых больших из этих чисел дают в сумме лишь 1504. А для семи слагаемых нужную сумму получить удаётся:

$$2+22+72+227+277+727+772=2099.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

Комментарий. А как подбирать нужные числа в последнем пункте?

Здесь кто как сумеет. Начинаем прикидывать. Наверняка после второй, или третьей итерации, получится сумма, отличающаяся от нужной на не очень большое число, кратное 5. Тогда, заменяя какую-нибудь последнюю цифру 7 на 2, мы уменьшаем сумму на 5, а заменяя 2 на 7 – увеличиваем на 5. И так поступаем нужное количество раз.

19.7. Пермь.

На доске записаны несколько различных натуральных чисел, в записи которых есть только цифры 3 и 8 (число может состоять из одинаковых цифр).

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 94?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 248?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть записано на доске, если их сумма равна 2659?

Решение.

а) Да, может: $3+8+83=94$.

б) Рассмотрим все числа, меньшие, чем 248, в десятичной записи которых есть только цифры 3 и 8: 3, 8, 33, 38, 83, 88. Их сумма равна 253, что на 5 превышает нужное нам число. Среди перечисленных чисел нет числа 5, нет также чисел, чья сумма равна 5. Поэтому сумма чисел, написанных на доске, не может равняться 248.

в) Зная решение предыдущей задачи, обратим внимание на то, что все числа, написанные на доске, дают остаток 3 при делении на 5, а их сумма, равная 2659, – остаток 4. Следовательно, чтобы получить в сумме такой остаток, чисел должно быть три, восемь, тринадцать, восемнадцать и так далее.

Рассмотрим все числа, меньшие, чем 2659, в десятичной записи кото-

рых есть только цифры 3 и 8: 3, 8, 33, 38, 83, 88, 333, 338, 383, 388, 833, 838, 883, 888. Три самых больших из этих чисел дают в сумме лишь 2609. А для восьми слагаемых нужную сумму получить удастся:

$$3+33+38+88+383+388+838+888=2659.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

19.8. Адыгя.

На доске записаны несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 8.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 264?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 360?

в) Какое наибольшее количество чисел может быть записано на доске, если их сумма равна 1278?

Решение.

а) Да, может: $18+48+198=264$.

б) Нет, не может. Чтобы, складывая числа, оканчивающиеся на 8, получить сумму, оканчивающуюся на 0, надо взять кратное пяти число слагаемых. Но уже сумма пяти самых маленьких чисел рассматриваемого вида превосходит требуемый результат:

$$18+48+78+108+138=390.$$

в) Чтобы получить сумму, оканчивающуюся на 8, надо взять или одно слагаемое, равное 1278 (оно делится на 3 и оканчивается на 8), или 6, или 11... Но уже сумма десяти самых маленьких чисел рассматриваемого вида равна 1530. Следовательно, слагаемых не больше шести. Приведём пример того, что это осуществимо. Воспользуемся тем, что $18+48+78+108+138=390$, тогда $18+48+78+108+138+888=1278$. Все шесть слагаемых делятся на 3 и оканчиваются на 8. Можно привести много и других примеров.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

19.9. Краснодар. Вариант 313.

На доске записаны несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 198?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 270?

в) Какое наибольшее количество чисел может быть записано на доске, если их сумма равна 1518?

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

Задачи 19.6 – 19.9 очень похожи на те, что были широко представлены (наряду с другими типами задач) на ЕГЭ в 2017 году. Возможно, что из-за этих задач об экзамене того года по горячим следам говорили, как о «неприлично простом». Подробный разбор последних заданий есть в статьях «Путь успеху на ЕГЭ по математике» («Потенциал», МФИ, №04, 2017) и «Вспоминая ЕГЭ – 2017. Задача 19» («Потенциал», МФИ, №01-02, 2018). То, что в них обсуждалось, актуально и сейчас. Вот одна из тех задач (для сравнения с рассмотренными выше):

19.10. (ЕГЭ – 2017).

На доске написано 38 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 5. Сумма написанных чисел равна 1255.

а) Может ли на доске быть ровно 31 чётное число?

б) Могут ли ровно три числа на доске оканчиваться на 5?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 5, может быть записано на доске?

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

19.11. Москва.

На доске написаны n единиц, между некоторыми из них поставили знаки «+» и посчитали сумму. Например, если изначально было написано 12 единиц ($n=12$), то могла получиться, например, такая сумма: $1+11+11+111+11+1+1=147$.

а) Могла ли сумма равняться 150, если $n=60$?

б) Могла ли сумма равняться 150, если $n=80$?

в) Чему могло равняться n , если полученная сумма чисел равна 150?

Решение.

а) Да, например, 10 раз по 11 и 40 раз по 1. Объяснений, как к этому пришли, не требуется. Достаточно просто привести пример. Кстати, пример – единственный. А прийти к нему можно так. Убедившись, что число 111 использовать не удаётся, берём x раз число 11 (на это уйдёт $2x$ единиц) и $(60-2x)$ раз по 1. Уравнение $11x+(60-2x)=150$ имеет единственное решение $x=10$.

б) Нет. Если использовать число 111, то остаётся 77 единиц, а из них надо смастерить сумму 39. Невыполнимая задача. Попробуем использовать x раз число 11 (на это уйдёт $2x$ единиц) и $(80-2x)$ раз по 1. Уравнение $11x+(80-2x)=150$ приводит нас к неразрешимому в натуральных числах уравнению $9x=70$.

Можно действовать иначе, заметив, что натуральное число даёт тот же остаток от деления на 3, что и сумма его цифр. Так как сумма восьмидесяти единиц даёт остаток 2 от деления на 3, а 150 делится на 3 без остатка, ответ на второй вопрос «нет».

в) Ясно, что использовать слабые большие, чем 111, нельзя.

Число 111 можно использовать только один раз, после чего до необходимой суммы нужно набрать ещё 39. Это можно сделать четырьмя способами, используя число 11 от 0 до 3 раз. Это потребует соответственно 42, 33, 24 и 15 единиц.

Если не использовать 111, то, чтобы не превысить сумму 150, число 11 можно использовать от 0 до 13 раз (здесь 14 способов, в наших обозначениях, это $0 \leq x \leq 13$), добирая до 150 единицами. В первом случае, без использования 11 (это $x=0$), $n=150$.

Далее, заменяя 11 единиц на число 11, мы каждый раз уменьшаем количество используемых единиц, то есть число n , на 9. В результате, не используя число 111, мы получаем 14 возможных значений n : 150, 141, 132, 123, 11, 105, 96, 87, 78, 69, 60, 51, 42 и 33. Два последних значения (42 и 33) мы получали, используя 111. Следовательно, n может принимать не 18, а 16 различных значений.

Ответ: а) да; б) нет; в) 150, 141, 132, 123, 11, 105, 96, 87, 78, 69, 60, 51, 42, 33, 24, 15.

Во всех работах, сканы которых я видел, была именно эта задача.

Сравните теперь московскую задачу с той, что давалась выпускникам, имеющим проблемы со здоровьем.

19.12. Вариант 991.

Десять мальчиков и семь девочек пошли в лес за грибами. Известно, что любые две девочки набрали больше грибов, чем любые три мальчика, но любые пять мальчиков набрали больше грибов, чем любые три девочки.

а) Может ли так случиться, что какая-то девочка набрала грибов меньше, чем какой-нибудь мальчик?

б) Может ли так случиться, что количества найденных грибов у всех детей будет различным?

в) Найдите минимальное возможное количество грибов, собранное всеми детьми суммарно.

Решение.

а) Упорядочим количества грибов, собранных мальчиками и девочками:

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{10} \text{ и } d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_7.$$

Предположим, что какая-то девочка набрала грибов меньше, чем какой-нибудь мальчик. Тогда, тем более, должно выполняться $d_1 < m_{10}$.

Но тогда, сложив три следующих неравенства, получим противоречие

$$\begin{cases} d_1 + d_2 > m_8 + m_9 + m_{10}, \\ d_3 + d_4 > m_5 + m_6 + m_7, \\ m_{10} > d_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 + d_3 + d_4 > m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9.$$

б) Да, например, $m_1 = 214$,
 $m_2 = 215, \dots, m_{10} = 223, d_1 = 354$,
 $d_2 = 355, \dots, d_7 = 360$.

Встречались и другие примеры:
 $m_1 = 500, m_2 = 501, \dots, m_{10} = 509$,

$$d_1 = 200, d_2 = 201, \dots, d_7 = 206;$$

$$\text{или: } m_1 = 91, m_2 = 99, \dots, m_{10} = 100,$$

$$d_1 = 149, d_2 = 150, \dots, d_7 = 155.$$

При поиске таких наборов в виде последовательных чисел помогут соотношения

$$\begin{cases} d_1 + d_2 \geq m_8 + m_9 + m_{10} + 1, \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \geq d_5 + d_6 + d_7 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2d_1 + 1 \geq 3m_1 + 25, \\ 5m_1 + 10 \geq 3d_1 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2d_1 \geq 3m_1 + 24, \\ 5m_1 \geq 3d_1 + 6. \end{cases}$$

в) Мы выяснили, что количество найденных грибов у всех детей мо-

жет быть различным. А что, если все m_i равны между собой, и все d_i ? То есть $m_i = m_0$ и $d_i = d_0$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} 5m_0 > 3d_0, \\ 2d_0 > 3m_0 \end{cases} \Rightarrow 9m_0 < 6d_0 < 10m_0.$$

Здесь минимальные возможные натуральные значения, это $m_0 = 5$ и $d_0 = 8$.

В этом случае дети суммарно собрали 106 грибов. Покажем, что это количество минимально возможное. Для этого докажем, что $m_1 \geq 5$ и $d_1 \geq 8$.

Умножив на 2 обе части неравенства $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \geq$

$$\geq d_5 + d_6 + d_7 + 1, \text{ получим}$$

$$m_1 + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_5) \geq$$

$$\geq 2(d_5 + d_6 + d_7) + 2.$$

Правую часть оценим так:

$$2(d_5 + d_6 + d_7) + 2 \geq 3(d_1 + d_2) + 2,$$

а левую – так:

$$\begin{aligned} m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_5 &= \\ &= (m_1 + m_2 + m_5) + (m_2 + m_3 + m_4) + \\ &+ (m_3 + m_4 + m_5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } &(m_1 + m_2 + m_5) + \\ &+ (m_2 + m_3 + m_4) + (m_3 + m_4 + m_5) \leq \\ &\leq 3(d_1 + d_2) - 3, \end{aligned}$$

приходим к нужному результату:

$$3(d_1 + d_2) + 2 \leq 2(d_5 + d_6 + d_7) + 2 \leq$$

$$\leq m_1 + 3(d_1 + d_2) - 3 \Rightarrow m_1 \geq 5.$$

Теперь докажем, что $d_1 \geq 8$.

Умножив на 5 обе части неравенства $d_1 + d_2 \geq m_8 + m_9 + m_{10} + 1$, получим

$$d_1 + (4d_1 + 5d_2) \geq 5(m_8 + m_9 + m_{10}) + 5.$$

Правую часть оценим так:

$$5(m_8 + m_9 + m_{10}) + 5 \geq$$

$$\geq 3(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) + 5,$$

$$\text{а левую} - \text{так: } d_1 + (4d_1 + 5d_2) \leq d_1 + 3(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) - 3.$$

Тогда

$$d_1 + 3(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) - 3 \geq$$

$$\geq d_1 + (4d_1 + 5d_2) \geq$$

$$\geq 3(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) + 5,$$

Отсюда следует, что $d_1 \geq 8$. Что и требовалось доказать для обоснования того, что минимально возможное количество собранных грибов равно 106.

Ответ: а) нет; б) да; в) 106.

19.13. В наборе 40 гирек весом 1, 2, ..., 40 грамм. Их разложили на две кучки так, что в каждой кучке есть хотя бы одна гиря. Потом из второй кучки переложили одну гирьку в первую кучку. В результате средняя масса гирьки в первой кучке увеличилась ровно на один грамм.

а) Могла ли первая кучка (до перекладывания) состоять из гирек с весами 6 г, 10 г, 14 г?

б) Мог ли средний вес гирек в первой кучке до перекладывания равняться 8,5 граммов?

в) Какое максимальное количество гирек могло быть первоначально в первой кучке?

Решение.

а) Средняя масса этих трёх гирек равна 10 г, а после добавления четвёртой гирьки должна стать 11 г. Получается, что надо добавить гирьку массой $4 \cdot 11 - 3 \cdot 10 = 14$. Но это невозможно, так как гирька в 14 г только одна, и она уже есть в наборе.

б) Пусть в первой кучке m гирек, тогда их суммарная масса равна $8,5m$ граммов. После добавления ещё одной гирьки с массой k граммов, средний вес гирек должен увели-

читься на 1 г. Составим уравнение:

$$8,5m + k = 9,5(m + 1) \Rightarrow k = 9,5 - m.$$

Это невозможно, так как k — натуральное число.

в) Пусть в первой кучке m гирек, их средняя масса равна x граммов (x может и не быть натуральным числом), к ним добавили ещё одну гирьку с массой k граммов. Составляем уравнение, аналогичное тому, что было в предыдущем пункте.

$$xm + k = (x + 1)(m + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = x + m + 1 \leq 40.$$

$$\text{Так как } xm \geq 1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2} \Rightarrow x \geq \frac{(m+1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \frac{(m+1)}{2} + (m+1) &\leq k \leq 40 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3(m+1)}{2} &\leq 40 \Rightarrow m \leq \frac{77}{3} = 25\frac{2}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow m &\leq 25. \end{aligned}$$

Покажем, что m может равняться 25. Действительно, если в первой группе первоначально находилось 25 гирек массой 1, 2, ..., 25 грамм (их средняя масса равна 13 г), то после добавления гирьки массой 39 г, средняя масса 26 гирек стала равной 14 граммов.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 25.

Завершаем обзор девятнадцатых заданий 2020 года рассмотрением двух задач из вариантов резервного дня (25.07.2020). В этот день, по установленным правилам, ЕГЭ смогут сдать только те участники, которые не смогли, по уважительным причинам, принять участие в экзаменах в дни основного периода.

19.14. По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы 2 мальчика и, хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное

количество конфет. У любых двух мальчиков одинаковое количество конфет, а у любых двух девочек – разное. По команде каждый отдал соседу справа четверть своих конфет. После этого у любых двух мальчиков стало разное количество конфет, а у любых двух девочек – одинаковое. Известно, что каждый отдал натуральное число конфет.

а) Возможно ли, что мальчиков было столько же, сколько и девочек?

б) Может ли мальчиков быть больше, чем девочек?

в) Пусть девочек вдвое больше, чем мальчиков. Может ли у всех детей суммарно быть 328 конфет?

Решение.

а) Здесь достаточно привести пример для двух мальчиков и двух девочек.

В опубликованном решении приводится такой: «Пусть у детей было 16, 16, 4, 8 конфет соответственно (у двух мальчиков было по 16 конфет), а стало 14, 16, 7, 7. Тогда условие задачи выполнено». В приведённом примере можно обратить внимание на две детали. Во-первых, мальчики стоят рядом друг с другом, как, в прочем, и девочки. Во-вторых, у каждого мальчика первоначально больше конфет, чем у любой девочки. Второе может и не выполняться, вот мой пример: «Пусть у детей было 4, 4, 16, 12 конфет соответственно (у двух мальчиков было по 4 конфеты), а стало 6, 4, 13, 13. Тогда условие задачи выполнено». А вот то, что мальчики должны стоять рядом, самое важное в этой задаче. В противном случае каждый из них передаст стоящей справа от него девочке одно и тоже количество конфет, а эти девочки передадут стоящим справа – разные количества, так как перво-

начально у них было разное количество конфет. В результате у этих двух девочек не станет конфет поровну.

б) Мы только что установили, что среди детей, стоящих по кругу, не должно быть даже двух мальчиков, передающих четверть своих конфет девочкам. Следовательно, все мальчики должны стоять рядом, компактно. Но если их больше, чем двое, то у тех, слева от которых стоит мальчик, количества конфет не изменятся, а они должны стать различными у всех. Значит, мальчиков только двое. А по условию девочек не меньше двух. Следовательно, мальчиков не может быть больше, чем девочек.

в) Если девочек вдвое больше, чем мальчиков, то их четверо, а всего по кругу стоят шестеро детей. Может ли у всех детей суммарно быть 328 конфет? Очень неприятный вопрос. Надо или искать-подбирать пример, или искать противоречие. Чем лучше заняться? В условиях экзамена это очень трудный выбор. Даже зная, что ответ в этом пункте «да», как найти единственный пример, когда у детей было 112, 112, 4, 40, 28, 32 конфеты соответственно (у двух мальчиков было по 112 конфет), а стало 92, 112, 31, 31, 31, 31? Понятно, что объяснять, как это получилось, в решении не надо, но ведь нам это интересно!

Я сделал это так. Пусть у мальчиков, стоящих рядом, по $4x$ конфет, а у первой девочки – $4a$. У первого мальчика станет $(3x + y)$ конфет, у второго – $4x$ (x конфет отдаст, x получит), у первой девочки: $(3a + x)$. Таким же станет количество конфет и у трёх других девочек.

Вторая девочка получит от первой девочки a конфет, следовательно, остальные $(2a+x)$ – это три четверти того, что у неё было первоначально. Следовательно, она передаст третьей девочке $\frac{(2a+x)}{3}$ конфет.

Рассуждая также, понимаем, что третья девочка получила от второй $\frac{(2a+x)}{3}$ конфет, а передала четвертой $\frac{1}{3}\left((3a+x) - \frac{2a+x}{3}\right)$.

Четвёртая девочка получила от третьей $\frac{1}{3}\left((3a+x) - \frac{2a+x}{3}\right)$ конфет, а передала первому мальчику $y = \frac{1}{3}\left((3a+x) - \frac{1}{3}\left((3a+x) - \frac{2a+x}{3}\right)\right) = \frac{2}{9}(3a+x) + \frac{1}{27}(2a+x)$ конфет.

Получаем уравнение

$$(3x+y) + 4x + 4(3a+x) = 328.$$

Подставляем в него

$$y = \frac{2}{9}(3a+x) + \frac{1}{27}(2a+x), \text{ и после}$$

упрощений решаем в натуральных числах уравнение $76x = 2214 - 86a$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2214 - 86a}{76} \Leftrightarrow x = 29 - a + \frac{10(1-a)}{76}.$$

Здесь единственное решение в натуральных числах, это $(x;a) = (28;1)$, оно даёт нам набор 112, 112, 4, 40, 28, 32. Есть ли другой путь? Я не знаю.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

В последней задаче интересен третий вопрос, а первые два мне не очень нравятся. Но в резервный день можно предложить и такую задачу. Пусть выпускники – 2021 изучают её!

19.15. По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы 2 мальчика и, хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное количество конфет. У любых двух мальчиков одинаковое количество конфет, а у любых двух девочек – разное. По команде каждый отдал соседу справа одну треть, или одну четвёртую часть своих конфет. После этого у любых двух мальчиков стало разное количество конфет, а у любых двух девочек – одинаковое. Известно, что каждый отдал натуральное число конфет.

а) Возможно ли, что мальчиков было столько же, сколько и девочек?

б) Могло ли быть ровно 4 мальчика?

в) Могло ли быть ровно 10 мальчиков?

Решение.

а) Не очень понятно, достаточно ли здесь привести пример для двух мальчиков и двух девочек, что был приведён в задаче 19.14? Или всё же надо, чтобы обязательно была и передача одной трети конфет? Во всяком случае, в опубликованном решении приводится пример, в котором мальчики и девочки стоят чередуясь, у мальчиков по 36 конфет, а у девочек 12 и 16. Заметим, что все эти числа делятся и на 3, и на 4. Из названных количеств 36, 12, 36, 16 можно получить 28, 21, 30, 21. Конечно, надо показать, как:

$$\begin{aligned} 36 - 12 + 4 &= 28; & 12 - 3 + 12 &= 21; \\ 36 - 9 + 3 &= 30; & 16 - 4 + 9 &= 21. \end{aligned}$$

б) Вот решение: «Да. Например, было 4 мальчика, у каждого по 12 конфет, и две девочки, а стояли они так: 12, 12, 33, 12, 12, 28. После передачи конфет у них стало 15, 13, 25, 20, 11, 25 конфет, и все условия выполнены».

в) Вопрос на принцип Дирихле. Допустим, что это возможно. Тогда по принципу Дирихле не менее пяти мальчиков из десяти отдали одинаковое количество конфет (либо одну третью, или одну четвёртую часть своих конфет).

Теперь рассмотрим тех, кто эти конфеты получил, то есть их ближайших соседей справа. Их пятеро. Как минимум трое из них одного пола, и не менее двух из этих троих отдают одинаковую часть своих конфет соседу (или соседке) справа.

Эти двое из трёх передающих не могут быть мальчиками, так как они

получили одинаковое количество конфет, и отдали одинаковое (не обязательно равное тому количеству, которое получили). Значит, у этих двух мальчиков опять стало одинаковое количество конфет (не обязательно равное первоначальному).

Но эти двое из трёх не могут быть и девочками, так как они получили одинаковое количество конфет, а отдали одинаковые части от своих первоначальных (не равных между собой) количеств. Следовательно, у них не может получиться равного количества конфет. Ответ здесь «нет».

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Команда из МФТИ стала победителем Международного турнира физиков



26 и 27 сентября состоялись состязания Международного турнира физиков (ИРТ), который в этом году проходил виртуально: изначально мероприятие планировалось провести в Варшаве. В соревновании участвовали студенты университетов из 10 стран.

В ходе отборочных боев команда из России играла против сборных Пакистана, Колумбии и Франции, а в финальном бое — с Украиной и США. По итогам турнира российская команда, состоявшая из студентов МФТИ, заняла первое место. В последний раз Россия одержала победу на ИРТ в 2012 году.

«Готовиться к соревнованиям мы начали еще летом 2019 года, но весной многие мероприятия были перенесены в дистанционный формат, что повлияло на подготовку, так как корпуса были закрыты, а участники находились в разных местах. Само соревнование перенесли на осень и организовали дистанционный формат, который сначала казался непривычным, было сложнее чувствовать соперника, оценивать ситуацию. Несмотря на трудности, ребята проявили себя очень хорошо и в подготовке, и на самих боях. В финале мы выбрали задачу «Кумулятивная пушка», для решения которой провели моделирование и серию экспериментов, теоретически обосновали решение и сделали саму установку», — комментирует капитан команды, студент 2 курса ЛФИ Иван Полоник.

Источник информации: <https://mipt.ru/news>