Гашков Сергей Борисович
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дискретной математики
мех-мата МГУ.

Пять неравенств и три доказательства

Что общего между следующими задачами на доказательство неравенств?

Задача 1. Пусть $abc = 1,\ a, b > 0$. Доказать, что

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

Равенство возможно только в случае $a=b=c=1$.

Задача 2. Пусть $a, b, c > 0$. Доказать, что

$$(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)\le abc.$$

Равенство возможно только в случае $a=b=c$.

Задача 3. Пусть $a, b, c > 0$. Доказать, что

$$(a+b)(b+c)(a+c)\ge 8abc.$$

Равенство возможно только в случае $a=b=c$.

Задача 4. Пусть $a, b, c > 0$. Доказать, что

$$a^4+b+c^4-2a^2b^2-2ac-2b^2c^2+$$
$$+a^2bc+b^2ac+c^2ab\ge 0$$

Равенство возможно только в случае $a=b=c$.

Задача 5. Пусть R – радиус описанного, а r – радиус вписанного круга для данного треугольника. Доказать, что $R \ge 2r$ и равенство возможно только для правильного (равностороннего) треугольника.

Первая из этих задач была на международной математической олимпиаде 2000 года. Вторая взята из книги Здравко Цветковского «Неравенства», выпущенной на английском языке в 2012 году издательством Шпрингер. Третья тоже есть в этой книге, но и во многих других, например в [1] (возможно эта задача также была на различных олимпиадах).

[1] *Автор статьи узнал об этой задаче от своего бывшего однокурсника Франка Рема, ныне живущего в Лейпциге.*

Четвёртая предлагалась на Московской олимпиаде 1982 года для 10 класса (её предложил В. А. Алексеев, тогда первокурсник, а ныне профессор университета Джорджии (США), выдающийся специалист по алгебраической геометрии). Пятая является очевидным следствием формулы Эйлера–Чаппла для расстояния d между центрами вписанной и описанной окружностей для данного треугольника:

$$d^2=(R-2r)R.$$

Трудность первой задачи в том, что левая часть неравенства не является полностью симметричной, и даже если раскрыть скобки и устранить одну переменную, выразив через две оставшиеся, например, по формуле $c=1/ab$, всё равно получается громоздкое и несимметричное неравенство. Поэтому при его доказательстве не удаётся сразу применить известные симметричные неравенства типа

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc.$$

Однако при помощи подходящей замены переменных эту задачу можно свести к задаче 2, в которой обе части неравенства симметричны (т.е. не меняются при любой перестановке переменных). В качестве такой замены можно взять замену $a=\frac{A}{B}$, $b=\frac{B}{C}$ (если взять произвольное $A>0$, то $B>0$ и $C>0$ всегда подбираются однозначно), тогда $c=\frac{1}{ab}=\frac{C}{A}$, и после очевидных преобразований имеем:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=$$

$$\left(\frac{A}{B}-1+\frac{C}{B}\right)\left(\frac{B}{C}-1+\frac{A}{C}\right)\left(\frac{C}{A}-1+\frac{B}{A}\right)=$$

$$=\frac{(A-B+C)(B-C+A)(C-A+B)}{ABC},$$

и неравенство задачи 1 превращается в неравенство задачи 2 (точнее, оба неравенства оказываются равносильными, так как из неравенства задачи 1 очевидно тоже следует неравенство задачи 2).

Умножив обе части неравенства задачи 2 на неотрицательное число $a+b+c$, получим равносильное неравенство

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)\le$$

$$(a+b+c)abc.$$

Раскроем скобки в его обеих частях и приведём подобные члены. Слева, согласно формуле разности квадратов и формуле квадрата суммы, получим:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)=$$

$$=(a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-a^2-b\ \ +2ab)=$$

$$=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=$$

$$=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4,$$

поэтому, перенося всё в правую часть, получаем в точности неравенство задачи 4.

Это значит, что неравенства задач 1 и 2 равносильны неравенству задачи 4. Хотя это неравенство симметричное, вывести его из известных симметричных неравенств очевидным образом не удаётся. Например, справедливы неравенства (как их доказать?)

$$a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2,$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\ge a^2bc+b^2ac+c^2ac.$$

Однако из них вывести неравенство задачи 4 не удаётся, так как второе неравенство «направлено не в ту сторону», какую нам бы хотелось. Для того чтобы всё же его доказать, вернёмся к его записи в виде

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\le$$
$$\le(a+b+c)abc$$

и воспользуемся рассуждениями из книги [2].

Сначала предположим, что выполнены неравенства

$$(a+b-c)>0, (a+c-b)>0, (b+c-a)>0,$$

т.е. из отрезков длины a, b, c можно составить треугольник. Его полупериметр равен $p=\dfrac{(a+b+c)}{2}$, а площадь S согласно формуле Герона равна

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Кроме того известна также формула, выражающая S через радиус описанного вокруг него круга:

$$S=\frac{abc}{4R}.$$

Пользуясь ими, наше неравенство можно записать в виде $16S^2\le$ $\le 8pRS$, или, что равносильно, в виде $2r=\dfrac{2S}{p}\le R$, так как радиус r вписанного круга вычисляется с помощью известной формулы $r=S/p$. Тем самым задачи 2 и 4 в случае существования треугольника со сторонами a, b, c сведены к задаче 5.

Если же треугольника с указанными сторонами нет, то одно из этих чисел, например a, не меньше суммы двух других, т.е. $b+c$ (в случае равенства $a=b+c$ треугольник вырождается в отрезок), но тогда

$$a+b-c>0,\ a+c-b>0,\ b+c-a\le 0,$$

значит

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\le$$
$$\le 0<(a+b+c)abc,$$

и в этом случае тоже всё доказано.

Остаётся доказать неравенство $2r\le R$. Для этого воспользуемся наглядными рассуждениями из книги Л. Фейеша Тота «Расположения на плоскости, сфере и в пространстве», (М. Физматгиз, 1958). Впрочем, автор книги указывает, что приведённое им доказательство известно в венгерском математическом фольклоре с 30-х годов.

Рассмотрим вместо данного треугольника с описанной окружностью радиуса R и вписанной окружностью радиуса r его срединный треугольник (т.е. треугольник, образованный его средними линиями). Так как он подобен данному треугольнику с коэффициентом $1/2$ (это следует из свойств средних линий), то радиус окружности, описанной вокруг срединного треугольника равен $R/2$.

Но эта окружность пересекает все стороны данного треугольника или их касается (рис. 1), поэтому её радиус не меньше r − радиуса вписанной в данный треугольник окружности (и равен ему только в случае, когда описанная вокруг срединного треугольника окружность касается всех сторон данного треугольника, т.е. вписан в него, а это возможно только в случае, когда данный треугольник правильный, т.е. $a=b=c$).

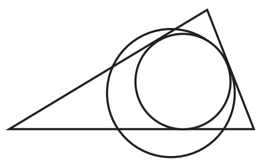

Рис. 1

Если это рассуждение не убеждает, его можно дополнить следующим. Уменьшив радиус построенной окружности радиусом $R/2$, получим окружность с тем же центром, касающуюся хотя бы одной из сторон данного треугольника и пересекающую остальные. Если она будет касаться только одной стороны, то перекатывая её по этой стороне поместим её в положение, когда она будет касаться хотя бы двух сторон.

Рассмотрим случай, когда она касается только двух сторон (если касается всех трёх, то она совпадает с окружностью радиуса r). Тогда её центр, также как и центр окружности радиуса r, лежит на биссектрисе угла между двумя этими сторонами, но третью сторону она пересекает. Тогда очевидно, что $R/2 > r$ (так как при движении по указанной биссектрисе расстояние от точки до сторон угла увеличивается).

Приведённое доказательство, использующее геометрические соображения, поучительно, но можно ли чисто алгебраические доказательства? Конечно, и далее будут рассмотрены два разных, но похожих друг на друга доказательства. Начнём с доказательства неравенства задачи 2, имеющегося в упоминавшейся книге Здравко Цветковского.

Достаточно рассмотреть случай, когда

$$a+b-c>0,\ a+c-b>0,\ b+c-a>0$$

(противоположный случай прост и уже был рассмотрен выше). Сделаем замену переменных $x=a+b-c>0$, $y=a+c-b>0$, $z=b+c-a>0$. Она обратима, так как

$$a=\frac{(x+y)}{2}>0,\ b=\frac{(x+z)}{2}>0,$$

$$c=\frac{(y+z)}{2}>0,$$

поэтому в новых переменных неравенство задачи 2 превращается в равносильное ему неравенство, фактически совпадающее с неравенством задачи 3:

$$(x+y)(y+z)(x+z)\geq 8xyz.$$

Но это неравенство (оно довольно известно и есть во многих задачниках, например в [1]) легко получается почленным перемножением неравенств между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{(x+y)}{2}\geq\sqrt{xy},\ \frac{(x+z)}{2}\geq\sqrt{xz},$$

$$\frac{(y+z)}{2}\geq\sqrt{yz}$$

(это доказательство справедливо также и при условии $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, так как

$$(x+y)-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0).$$

Для неравенства задачи 1 её автор румынский математик Титу Андрееску (работающий в США и тренирующий американскую команду, участвующую в международных олимпиадах) предложил следующее доказательство. [1]

Раскроем скобки в произведении $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)$ и воспользуемся условиями: $abc=1,\ a>0,\ b>0,\ c>0.$ Получим, что

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})=$$

$$=ab-b+1-a+1-\frac{1}{b}+\frac{a}{c}-\frac{1}{c}+\frac{1}{bc}=$$

$$=2-\frac{1}{b}-b+\frac{a}{c}\leq\frac{a}{c},$$

так как $b+\frac{1}{b}\leq 2$, согласно частному

[1] *Оно приведено, например, в книге Джукича, Янковича, Матича, Петровича «Коллекция задач, предла-гаемых на международных математи-ческих олимпиадах с 1959 по 2004 г.», изданной издательством Шпрингер в 2006 году на английском языке.*

случаю приведённого выше неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим при $x=b,\ \ y=\frac{1}{b}$, причём равенство возможно лишь при $b=1$. Аналогично получаем неравенства:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=$$

$$=2-\frac{1}{a}-a+\frac{c}{b}\leq\frac{c}{b},$$

которые обращаются в равенства при $a=1,\ c=1$ соответственно.

В случае, когда

$$a-1+\frac{1}{b}>0,\ \ c-1+\frac{1}{a}>0,\ \ b-1+\frac{1}{c}>0,$$

эти три неравенства можно почленно перемножить, а потом извлечь из обеих частей квадратный корень (в указанном случае при всех этих операциях неравенства сохраняются), в результате чего получается неравенство задачи 1.

Рассмотрим оставшийся случай. В нём без ограничения общности можно считать, что $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\leq 0$, тогда $\left(a+\frac{1}{b}\right)\leq 1$, откуда имеем, что

$$b+\frac{1}{c}=b(1+a)\leq b\left(2a+\frac{1}{b}\right)=1+2ab>1,$$

$$c+\frac{1}{a}>\frac{1}{a}>1,$$

значит

$$a-1+\frac{1}{b}\leq 0,\ \ b-1+\frac{1}{c}>0,\ \ c-1+\frac{1}{a}>0,$$

поэтому

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 0<1.$$

Значит, и в этом случае неравенство доказано.

Литература

1. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач.– МЦНМО, 2009.
2. Бегунц А.В., Гашков С.Б., Горяшин Д.В., Косухин О.Н., Флёров А.А. Московские математические олимпиады 1981-1992.– МЦНМО, 2017.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Ученые заставили капли воды "бегать" по поверхности графена почти со скоростью гоночного автомобиля

Не так давно группа исследователей из Швейцарского федерального технологического института (Swiss Federal Institute of Technology, ETH), Иллинойского университета и Технического университета в Дании заставила крошечные капельки воды двигаться по поверхности графена со скоростью до 250 километров в час, в два раза выше скорости бегущего гепарда и немного не дотягивая до скорости гоночного автомобиля. Интересно то, что для движения воды с такой скоростью не требуется никаких насосов, все это достигается за счет формирования "образов" на поверхности графена, которые обеспечивают различные углы контакта воды с поверхностью в передней и задней части движущейся капли.

https://www.dailytechinfo.org/nanotech/10563-uchenye-zastavili-kapli-vody-begat-po-poverhnosti-grafena-pochti-so-skorostyu-gonochnogo-avtomobilya.html#comment