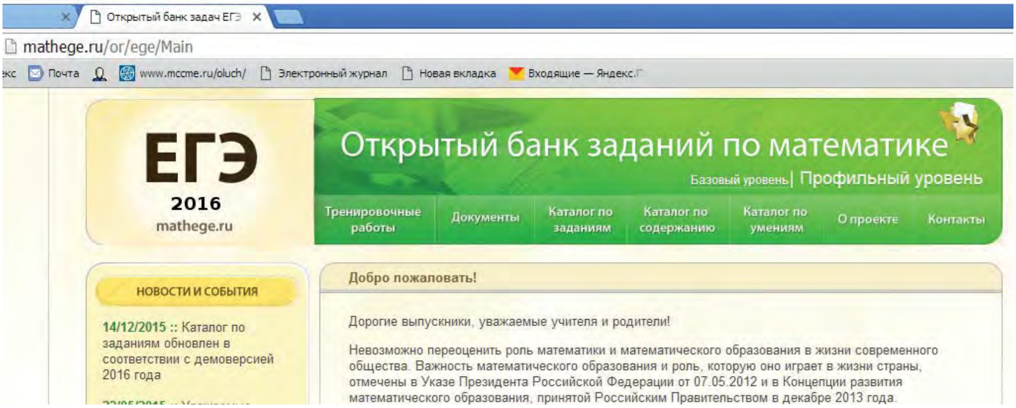
Пукас Юрий Остапович
Закончил в 1974 году физфак МГУ, работал в Королёве, принимал участие в программе «Союз – Аполлон», с 1978 по 2004 работал в ФИАЭ им. Курчатова. Участник всех Творческих конкурсов учителей, учитель математики.

Путь к успеху на ЕГЭ по математике

В 2016 году ЕГЭ по математике профильного уровня сдавали 439 тысяч человек. 296 его участников получили 100 баллов. Это примерно один из полутора тысяч! В 2015 году таких было заметно меньше – всего 66 из 521 тысячи, примерно один из восьми тысяч. Запомним эти цифры! Они нам ещё потребуются.

Как же набираются такие высокие баллы? В первых 12-ти заданиях требуются только ответы, которые записываются на специальном бланке в виде целого числа или конечной десятичной дроби, никаких пояснений не требуется. Подготовиться к этим заданиям совсем несложно, было бы желание: все они содержатся в *Открытом банке задач ЕГЭ* (http://mathege.ru/or/ege/Main).



Выбираете «*Профильный уровень*», затем – «*Каталог по заданиям*» и попадаете на следующую страницу, на которой нас интересуют строки «*Посмотреть прототипы*»:

Каталог по заданиям

Посмотреть выбранные

		Проверяемые требования (умения)	Умения по КТ	Содержание по КЭС
1	☐	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни Посмотреть прототипы	6.1	1.1.1 1.1.3 2.1.12
2	☐	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни Посмотреть прототипы	3.1 6.2	3.1 3.2 3.3 6.2.1
3	☐	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами Посмотреть прототипы	1.2 1.3 4.1	1.1 1.2 1.4 5.1.1 5.5.1

Всё, что может встретиться на ЕГЭ в заданиях **1 – 12**, вы обязательно найдёте здесь.

Прототипов немного. Например, заданий **8** и **11**, с которыми хуже всего справились выпускники прошлого года, среди них всего 43 и 90 соответственно. А вот и эти задания:

8. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;\,13)$ (рис. 1). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x-10$ или совпадает с ней.

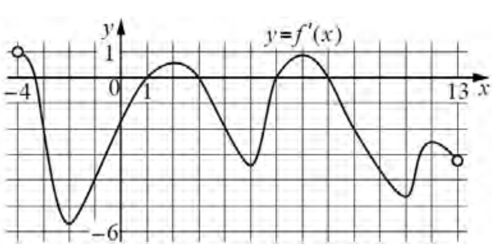


Рис. 1

(Здесь надо просто посчитать, в скольких точках приведённого графика $y=-2$.)

11. Смешав 25-процентный и 95-процентный растворы кислоты и добавив 20 кг чистой воды, получили 40-процентный раствор той же кислоты. Если бы вместо 20 кг воды добавили 20 кг 30-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 50-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 25-процентного раствора использовали для получения смеси?

Задача непростая, но она хорошо представлена в пособиях по подготовке к ЕГЭ $[1-3]$, а также неоднократно встречалась в официальных тренировочных и диагностических работах.

За правильно решённые первые 12 заданий выпускник получает 62 балла («твёрдую тройку»). Идём дальше! Задания **13** и **15** с развёрнутым ответом стандартны и предсказуемы. В прошлом году с ними справились соответственно 40 и 11 процентов участников. Вот примеры этих заданий (условия всех задач ЕГЭ-2016, рассматриваемых здесь, и статистические данные взяты из замечательных пособий [1] – [3]).

13. а) Решите уравнение

$$2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

15. Решите неравенство

$$\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5.$$

Обозначив $3^x=t>0$, получаем неравенство

$$\frac{t^2-6\cdot t+4}{t-5}+\frac{6\cdot t-51}{t-9}\le t+5.$$

Аналогичные неравенства, даже чуть сложнее, были и на ЕГЭ-2015, и в тренировочных вариантах трёх последних сезонов. Применяя приобретённый во время этих работ опыт, преобразуем неравенство, выделяя целые части дробей:

$$\frac{t(t-5)-(t-5)-1}{t-5}+\frac{6(t-9)+3}{t-9}\le t+5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t-1-\frac{1}{t-5}+6+\frac{3}{t-9}\le t+5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{t-9}-\frac{1}{t-5}\le 0.$$

Остальное просто. Добавив к первым 12-ти заданиям эти два, достигаем отметки 74 балла.

Решив ещё и задание **17**, получаем «твёрдую четвёрку» – 80 баллов. Заметим, что в 2016 году результата 80 баллов и выше достигли примерно 17 тысяч из 439 тысяч участников профильного экзамена, это примерно один из двадцати шести.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1 числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
- со 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15 числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

В прошлом году с этим заданием справились примерно лишь 13% участников. А ведь это – ремейк задач ЕГЭ-2015! Практически на всех проверочных работах выпускникам предлагались подобные задания! Всё предельно просто. Со 2 по 14 февраля надо осуществить первый платёж: вернуть банку набежавшие проценты и уменьшить долг до суммы, указанной в таблице, то есть до 900 тысяч рублей. Таким образом, первый платёж равен

$$P_1=1000\cdot\frac{r}{100}+100.$$

Для удобства будем всё считать в тысячах рублей. Второй платёж будет меньше, так как проценты начислятся уже на сумму 900 тысяч рублей: $P_2=900\cdot\frac{r}{100}+100.$ Дальнейшие платежи:

$$P_3 = 800\cdot\frac{r}{100}+100,\ P_4 = 700\cdot\frac{r}{100}+100,$$

$$P_5 = 600\cdot\frac{r}{100}+100$$

и, наконец, $P_6 = 500\cdot\frac{r}{100}+500$. Общая сумма выплат, равная $(1000+45\cdot r)$ тысяч рублей, должна превышать 1,2 млн рублей. Решая неравенство $1000+45\cdot r \ge 1200$, находим, что $r \ge \frac{200}{45} = \frac{40}{9}$. По условию r – целое число, поэтому в ответе указываем $r = 5$.

На этом лёгкие задания ЕГЭ-2016 заканчиваются. Собственно говоря, настоящий экзамен с этого момента только и начинается. В первую очередь предстоит решить две очень непростые геометрические задачи. Справившись с ними, мы достигнем отметки в 90 баллов:

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Полностью решили эту задачу, ответив на оба вопроса, около 5% участников экзамена, ещё примерно столько же, доказав перпендикулярность, ошиблись в дальнейших вычислениях. Неожиданно трудным для участников, по сравнению с ЕГЭ предыдущих лет, оказался здесь, а также в следующей задаче, первый вопрос.

16. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямая BH параллельна прямой ED.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 150°$.

Ответ здесь $1:4$. Заметим, что появление на ЕГЭ-2016 подобных задач ожидалось. Например, им посвящена статья [4]. Но полностью решили эту задачу не более 1% участников экзамена, ещё примерно 3% получили за неё какие-то неполные баллы.

До 100 баллов нам осталось совсем немного: надо всего лишь решить хотя бы полторы задачи из оставшихся двух! Приведём для ознакомления условия основных типов задач **18** и **19**. Они все вполне решаемые, вот только времени на них у участников ЕГЭ-2016 к этому моменту оставалось мало. В основном оно было потрачено на задачи **14** и **16**!

18.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x^4-9x^2+a^2} = 2x^2-3x+a$$

имеет ровно три различных корня.

Здесь у возведения в квадрат хорошие перспективы: можно заметить, что сокращаются $4x^4$ и a^2 и у полученного уравнения обязательно будет корень $x = 0$, который удовлетворит исходному уравнению для всех $a \ge 0$. Смело начинаем действовать!

$$\begin{cases} 2x^2-3x+a \ge 0, \\ 4x^4-9x^2+a^2 = \left(2x^2-3x+a\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+a \ge 0, \\ 12x^3 - x^2(4a+18)+6ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+a\ge 0, \\ x(6x^2-x(2a+9)+3a)=0. \end{cases}$$

Все три корня уравнения-следствия находятся в явном виде:

$$x_1=0,\ \ x_2=\frac{3}{2},\ x_3=\frac{a}{3}.$$

Корни $x_1=0$ и $x_2=\dfrac{3}{2}$ удовлетворяют условию $2x^2-3x+a\ge 0$ при всех $a\ge 0$; корень $x_3=\dfrac{a}{3}$ – при любых значениях a.

Однако корни могут совпадать. Если $a=0$, то $x_1=x_3$, ещё при $a=\dfrac{9}{2}$ $x_2=x_3$. Учитывая это, находим, при каких значениях параметра a исходное уравнение имеет ровно три различных корня.

Ответ. $(0;4{,}5)$; $(4{,}5;+\infty)$.

18.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x^2+16ax+4}=x^2+4ax+2$$

имеет ровно три различных корня (ЕГЭ-2016).

И здесь у возведения в квадрат хорошие перспективы: сокращаются $2ax$ и 1, и $x=0$ обязательно будет решением при любых значениях a. Но есть и другой путь. Понимая общую схему решения подобных уравнений, можно действовать свободно и раскованно, подмечая в условии конкретные интересные детали.

Обозначив $x^2+4ax+2=t$, получаем уравнение $\sqrt{4t+x^2-4}=t$, равносильное системе

$$\begin{cases} 4t+x^2-4=t^2, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2=\pm x, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2+4ax=x, \\ x^2+4ax=-x; \end{array} \right. \\ x^2+4ax+2\ge 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=1-4a, \\ x_3=-1-4a; \end{array} \right. \\ x^2+4ax+2\ge 0. \end{array} \right.$$

Корень $x_1=0$ удовлетворяет условию $x^2+4ax+2\ge 0$ при любых значениях a; корень $x_2=1-4a$ при всех $a\le\dfrac{3}{4}$; корень $x_3=-1-4a$ при всех $a\ge-\dfrac{3}{4}$.

По условию задачи все корни должны быть различными. Понятно, что $x_2\ne x_3$, но надо ещё исключить случаи, когда или x_2, или x_3 равны x_1, то есть нулю. Корни совпадают, если $a=\pm\dfrac{1}{4}$. Исключая эти значения, получаем окончательный ответ.

Ответ. $\left[-\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{4}\right)$; $\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$; $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}\right]$.

19.1. В целочисленной последовательности $a_1=3,\ a_2,\ \dots,\ a_{n-1},\ a_n=109$ сумма любых двух соседних чисел равна или 1, или 3, или 13.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 32 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

а) Обратим внимание на то, что если $a_k+a_{k+1}=1$ и $a_{k+1}+a_{k+2}=3$, то $a_{k+2}-a_k=2$.

Это даёт нам возможность построить последовательность, в которой каждый член, стоящий на нечётном месте, будет на 2 больше, чем тот, который стоит на предыдущем нечётном месте. Вот пример последовательности, в которой $a_{107}=109$:

$3,\ -2,\ 5,\ -4,\ 7,\ \dots,\ 107,\ -106,\ 109.$

б) Так как сумма любых двух соседних чисел последовательности равна или 1, или 3, или 13, любые два соседних числа в ней имеют разную чётность. Так как $a_1 = 3$, то все члены, стоящие на нечётных местах – нечётные, а на чётных – чётные. Следовательно, $a_{32} \neq 109$, так как a_{32} обязательно будет чётным числом.

в) Рассмотрим три члена последовательности: a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, где $1 \leq k \leq n-2$. Так как по условию задачи $a_k + a_{k+1} \geq 1$ и $a_{k+1} + a_{k+2} \leq 13$, то $a_{k+2} \leq a_k + 12$. Получается, что члены нашей последовательности должны удовлетворять следующей системе неравенств: $\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_3 \leq a_1 + 12 = 15, \\ \ldots \\ a_{17} \leq a_{15} + 12 = 99, \\ a_{19} \leq a_{17} + 12 = 111. \end{cases}$

Так как a_{18} – чётное число, $a_{18} \neq 109$, поэтому в последовательности не меньше, чем 19 членов. Вот пример последовательности, удовлетворяющей условию задачи и состоящей из 19 членов:
3, – 2, 15, – 14, 27, – 26, 39, – 38, 51, – 50, 63, – 62, 75, – 74, 87, – 86, 99, – 96, 109.

Ответ. а) Да; б) нет; в) 19.

19.2. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a+b$ и $2a-1$, или $a+b$ и $2b-1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причём на доске ни разу не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

а) Число 19 появится так: $(2;3) \Rightarrow (5;5) \Rightarrow (9;10)$, после чего на третьем ходу $a+b=19$.

б) После первого хода на доске будет записано либо 3 и 5, либо 5 и 5. После каждого последующего хода каждое из двух чисел увеличивается хотя бы на 2. Получается, что после 100 ходов меньшее из двух написанных на доске чисел будет не меньше, чем $3 + 99 \cdot 2 = 201$.

в) Пусть в какой-то момент на доске появилась пара чисел a и b, причём $b-a>0$. На следующем ходу на доске появится либо пара $a+b$ и $2a-1$, либо $a+b$ и $2b-1$. В первом случае разность большего и меньшего из полученных чисел равна $(b-a)+1$, а во втором $-(b-a)-1$. Получается, что после каждого хода разность большего и меньшего чисел изменяется на 1, причём для двух различных чисел мы можем сделать ход так, чтобы разность увеличилась, или так, чтобы разность уменьшилась. В любом случае, после каждого хода чётность разности меняется. Перед первым ходом $b-a=3-2=1$, следовательно, после 1007 ходов разность будет чётной. Так как числа всегда различны, наименьшая возможная разность равна 2. Это реализуется, например, так: сначала делаем 504 хода, увеличивая разность, а потом 503 хода, уменьшая её.

Ответ. а) Например, $(2;\ 3) \Rightarrow$ $\Rightarrow (5;\ 5) \Rightarrow$ $(9;\ 10)$; б) нет; в) 2.

Как вы помните, в 2016 году ЕГЭ по математике профильного уровня сдавали 439 тысяч человек. 296 его участников получили 100 баллов. Теперь, после ознакомления с материалами экзамена, вы лучше понимаете, как это было непросто.

Но у выпускников была и есть возможность ещё за несколько месяцев до ЕГЭ обеспечить себе результат, равноценный 100 баллам на ЕГЭ. Ежегодно Минобрнауки РФ издаёт приказ «Об утверждении Перечня олимпиад школьников и их уровней на 201*/** учебный год». Перечень – это ежегодный список интеллектуальных соревнований для школьников, которые могут давать льготы при поступлении в вузы. Для выпускников этого года в перечень включено 88 олимпиад по различным предметам. 28 из них – по математике (http://info.olimpiada.ru/article/576#matem).

В 2015/16 учебном году победителями и призёрами олимпиад по математике из перечня стали примерно 4000 выпускников, некоторые из них смогли выиграть две или больше разных олимпиад. Наверняка среди них есть и те, кто набрал потом 100 баллов на ЕГЭ-2016. Все эти победители и призёры либо были приняты в выбранные ими вузы без экзаменов, либо при поступлении им было засчитано 100 баллов за ЕГЭ по математике.

Легко ли стать призёром подобной олимпиады? Попробуем разобраться в этом на примере Объединённой межвузовской олимпиады школьников 2017 года (ОММО-2017). Всю информацию о ней вы найдёте на сайте http://olympiads.mccme.ru/ommo/17. В этом году примерно 900 выпускников стали её победителями или призёрами. Для этого необходимо было решить не менее 5 задач из 10. Заметим, что на этой олимпиаде «решённой» задача считается, если за неё выставлена оценка «+» или «±». Задачи хорошие. Их набор (типы задач) из года в год повторяется. Задачи прошлых лет с решениями можно найти на указанном выше сайте.

Начнём с пяти наиболее простых задач этого года. Решив их, даже, может, получив за них всего лишь пять оценок «±», участник получал диплом призёра третьей степени, достаточный для получения льготы «100 баллов по ЕГЭ» в большинстве вузов.

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби

$$\frac{8+10}{12}+\frac{14+16}{18}+\ldots+\frac{32+34}{36}.$$

Задача 2. Миша, Антон, Катя и Наташа устроили турнир по настольному тенису. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Миша: – Я не был ни первым, ни последним.

Антон: – Я не был последним.

Катя: – Я была первой.

Наташа: – Я была последней.

Известно, что кто-то один из ребят соврал, а трое сказали правду. Кто занял третье место, если известно, что это был мальчик?

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что $x! + y! = 48z + 2017$. Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z). (Напомним, что $1! = 1,\ 2! = 1\cdot 2,\ n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.)

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+2+4xy=0, \\ y+z+2+4yz=0, \\ z+x+2+4zx=0. \end{cases}$$

Задача 6. Сравните числа

$$\frac{\cos 2014^\circ}{\cos 2015^\circ} \text{ и } \frac{\cos 2016^\circ}{\cos 2017^\circ}.$$

Не знаю точно, намного ли больше льгот у обладателей дипломов второй и первой степеней, возможно, это определяет для себя каждый вуз. Но вы сначала получите дипломы, а потом изучите и этот вопрос. А на конкретно этой олимпиаде, чтобы получить диплом второй степени, нам надо получить ещё один «+», или «±». Например, вот за эту задачу:

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен 45°. Пусть O – центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

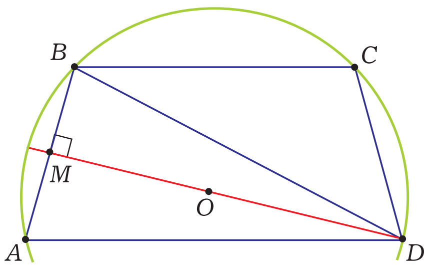


Рис. 2

Пусть прямая OD пересекает хорду AB в точке M. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, $AM = MB$. Получается, что в треугольнике ADB высота DM является и медианой. Следовательно, треугольник ADB – равнобедренный, поэтому $\angle BAD = \angle ABD = \alpha$. Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, $\angle BAD = \angle ADC = \alpha$, а угол BAC, равный 45°, равен углу CDB. Получается, что $\angle ADB = \alpha - 45°$. Сумма углов треугольника ADB равна $3\alpha - 45°$, откуда находим, что $\alpha = 75°$, а $\angle ADB = 30°$. Сторону AD теперь можно найти по теореме синусов для треугольника ADB, а можно найти как гипотенузу в треугольнике AMD:

$$AD = \frac{AM}{\cos\alpha} = \frac{10}{\cos 75°} = 10\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right).$$

Ответ. $10\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

Из четырёх оставшихся номеров мне больше всего нравится задача **8** с параметром. Разберём и её. Ведь за семь решённых задач на ОММО-2017 давали диплом первой степени!

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$8^{|x-a|}\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+2x+5\right)+ +2^{x^2+2x}\log_{\sqrt{5}}\left(3|x-a|+4\right)=0$$

имеет ровно три решения?

Похожие задачи неоднократно встречались на олимпиадах для выпускников. Чаще всего – на олимпиаде «Покори Воробьёвы горы». Например, вот задача 2009 года:

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при которых все решения уравнения

$$\log_7\left(|x-a|+20|a+1|\right)= =7^{1+2a+2ax-x^2}+\log_7\left(3|a+1|\right)$$

принадлежат отрезку $[-5;\ 0]$.

Решение примера 1. Выделяя полный квадрат, преобразуем показатель степени:

$$1+2a+2ax-x^2 = =1+2a+a^2-(x^2-2ax+a^2)=$$

$=(a+1)^2-(x-a)^2$, в результате получается уравнение

$$\log_7\left(|x-a|+20|a+1|\right)= =7^{(a+1)^2-(x-a)^2}+\log_7\left(3|a+1|\right).$$

Тут напрашиваются две замены: $|x-a|=t\geq 0$ и $|a+1|=b\geq 0$, после чего приходим к уравнению

$$7^{b^2-t^2}=\log_7\frac{t+20b}{3b}.$$

В какой-то момент можно обратить внимание на то, что левая часть этого уравнения убывает с увеличением t, а правая – возрастает. Поэтому, если корень существует, то он – единственный! И здесь его удаётся подобрать: $b=t$! Следовательно,

$|x-a|=|a+1| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=2a+1. \end{array}\right.$ Остаётся найти условия, при которых оба эти корня принадлежат отрезку $[-5;\ 0]$. Первый – при любых значениях a, второй – при $-3 \le a \le -0{,}5$.

Ответ. $-3 \le a \le -0{,}5$.

А вот задача 2015 года, в этом году её по сути повторили под номером **8** на ОММО-2017.

Пример 2.Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$9^{-|x-a|}\log_{\sqrt[3]{5}}\left(x^2+2x+3\right)+$$
$$+3^{-x^2-2x}\log_{\frac{1}{5}}\left(2|x-a|+2\right)=0$$

имеет ровно три различных решения.

Решение примера 2. Начнём так:

$$3\cdot 3^{-2|x-a|}\log_5\left((x+1)^2+2\right)-$$
$$-3^{-x^2-2x}\log_5\left(2|x-a|+2\right)=0.$$

Сокращая на 3, получим

$$3^{-2|x-a|}\log_5\left((x+1)^2+2\right)-$$
$$-3^{-x^2-2x-1}\log_5\left(2|x-a|+2\right)=0.$$

Тут можно, как и в предыдущей задаче, ввести две замены: $|x-a|=t \ge 0$ и $x+1=b$, после чего записать уравнение так:

$$3^{-2t}\log_5\left(b^2+2\right)-3^{-b^2}\log_5\left(2t+2\right)=0,$$

а ещё лучше так:

$$3^{b^2}\cdot\log_5\left(b^2+2\right)=3^{2t}\cdot\log_5\left(2t+2\right)=0.$$

Так как функция

$$f(z)=3^z\cdot\log_5(z+2)$$

строго монотонна на своей области определения, из равенства $f\left(b^2\right)=f(2t)$ следует, что $b^2=2t$. Получается, что нам надо найти все значения a, при каждом из которых уравнение $(x+1)^2=2|x-a|$ имеет ровно три различных решения. Нарисовав или представив себе графики функций $u(x)=(x+1)^2$ и $g(x)=2|x-a|$, легко понять, что чтобы было три решения, необходимо, чтобы либо у графиков совпадали вершины, либо происходило касание. Первое происходит при $a=-1$, второе при $a=-\frac{3}{2}$ и $a=-\frac{1}{2}$.

Ответ. $-\frac{3}{2};\ -1;\ -\frac{1}{2}$.

Готовясь к олимпиадам 2017 года, добросовестный ученик не мог не обратить внимания на только что разобранную задачу 2015 года. Изучайте классику! Очень пригодится! Раз вы читаете «Потенциал», могу посоветовать [5], там много полезного для выпускников.

Возвращаемся к задаче **8**. Но напоминаю, что для результата, равноценного 100 баллам на ЕГЭ, было достаточно пяти очень несложных задач. Участвуйте и побеждайте!

Решение задачи 8. Она аналогична только что рассмотренной задаче. Преобразуем уравнение к виду

$$-2^{3|x-a|}\log_5\left((x+1)^2+4\right)+$$
$$+2\cdot 2^{x^2+2x}\log_5\left(3|x-a|+4\right)=0,$$

а затем – к такому:

$$\frac{\log_5\left((x+1)^2+4\right)}{2^{(x+1)^2}}=\frac{\log_5\left(3|x-a|+4\right)}{2^{3|x-a|}}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(t)=\frac{\log_5(t+4)}{2^t},\ \ t>0.$$

Можно убедиться, что $f'(t)<0$. Следовательно, функция $f(t)$ строго монотонна, поэтому уравнение $f\left((x+1)^2\right)=f\left(3|x-a|\right)$ равносильно уравнению $(x+1)^2=3|x-a|$. Чтобы оно имело ровно три решения, необходимо, чтобы у графиков $u(x)=(x+1)^2$ и $g(x)=3|x-a|$ либо совпадали вершины, либо происходило касание. Первое происходит при $a=-1$, второе при $a=-1\pm\frac{3}{4}$.

Ответ. $-\frac{7}{4}$; -1; $-\frac{1}{4}$.

Литература

1. *Ященко И.В., Семёнов А.В., Высоцкий И.Р.* ФИПИ. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2016 года. – М.: 2016. – 44с.

2. *Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С.* Подготовка к ЕГЭ по математике в 2017 году. Профильный уровень. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2017. – 246с.

3. ЕГЭ-2017. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/авт.-сост. И.Р. Высоцкий, И.В.Ященко; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2017. – 256 с. (ЕГЭ-2017. ФИПИ – школе).

4. *Лупашевская В.Ю.* Прямые углы опять в моде // Потенциал МФИ. – 2016. – №3. – 35 – 40 с.

5. *Лупашевская В.Ю., Пукас Ю.О.* Задачи с параметрами для ЕГЭ по математике. Книжка с картинками.– М.: «Азбука-2000», 2016. – 92с.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Оправдание – хорошие манеры

Стихотворение о «вежливом» школьнике принадлежит
английскому поэту Спайку Миллигану:

– Твой табель плох, - сказал отец, -
Он очень плох сынок!
– О, не брани меня, отец,
Я сделал всё, что мог.

– Но ты – последний ученик
Ты кончил хуже всех!
– Я пропускал других вперёд,
А вежливость – не грех.