Лупашевская Василиса Юрьевна
Учитель математики
МАОУ СОШ №2, г.Троицк.

Прямые углы опять в моде

В статье «Повторение пройденного» («Потенциал» №4, 2015) рассматривались планиметрические задачи **С4** из вариантов ЕГЭ-2014. В сезоне 2015 года подобные задачи (в вариантах они шли под номером 18), оценённые максимальным числом баллов (3 балла), встречались редко: одна на 500 работ. Положительным результатом, отличным от максимального (1 или 2 балла), была оценена примерно одна работа из 50. Получается, что 98 выпускников из ста не смогли ответить даже на очень простой первый вопрос, заданный в этих задачах. Что же это за задачи?

Вот, например, какая поучительная задача была предложена выпускникам 2015 года в вариантах тренировочной работы МИОО от 22.04.2015:

Задача 1. Окружность, центр которой расположен внутри прямоугольной трапеции *ABCD*, проходит через вершины *B* и *C* большей боковой стороны и касается стороны *AD* в точке *T*.

а) Докажите, что угол *BOC* вдвое больше угла *BTC*.

б) Найдите расстояние от точки *T* до прямой *BC*, если *AB* и *CD* равны 9 и 4 соответственно.

Решение. Эта задача не нова. Как отметила редактор журнала «Потенциал», её автором можно назвать Жака Адамара (1865 – 1963), встречалась подобная задача и в вариантах вступительных экзаменов прошлых лет (например, в 1997 году в МФТИ).

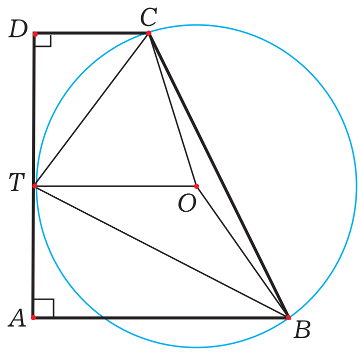

Рис. 1

а) $\angle BTC$ вписан в окружность, а $\angle BOC$ – соответствующий ему центральный угол (рис. 1). Следовательно, $\angle BOC = 2 \cdot \angle BTC$.

б) Так как угол, образованный касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой между его сторонами, он равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу. Поэтому $\angle DTC = \angle TBC = \alpha$, а $\angle ATB = \angle TCB = \beta$ (рис. 2).

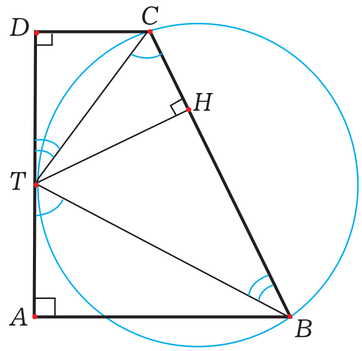

Рис. 2

При помощи этих углов выразим длину перпендикуляра TH через верхнее основание DC и нижнее основание AB:

$$TC = \frac{DC}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TH = TC \cdot \sin\beta = \frac{DC \cdot \sin\beta}{\sin\alpha};$$

$$TB = \frac{AB}{\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TH = TB \cdot \sin\alpha = \frac{AB \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Перемножив эти две дроби, мы получим ответ: $TH^2 = AB \cdot DC \Rightarrow$ $\Rightarrow TH = \sqrt{AB \cdot DC}$.

Но есть ещё один, даже более короткий путь!

Если продолжить боковые стороны трапеции до их пересечения в точке F (рис. 3), то квадрат касательной FT будет равен произведению всей секущей FB на её внешнюю часть FC. Пусть $\angle AFB = \alpha$, тогда $FT = \frac{TH}{\sin\alpha}$, $FB = \frac{AB}{\sin\alpha}$ и $FC = \frac{DC}{\sin\alpha}$.

Подставив это в формулу $FT^2 = FB \cdot FC$, после сокращения квадратов синусов мы получим $TH^2 = AB \cdot DC$.

Ответ. $TH = \sqrt{AB \cdot DC} = 6$.

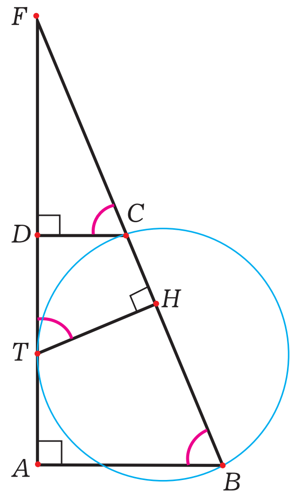

Рис. 3

Задача 2. (Досрочный ЕГЭ, 26.04.2015) Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K (рис. 4).

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK = 18$ и $BN = 17$.

Решение. а) Высота AH равнобедренного треугольника BAC делит основание BC пополам. $\angle BKM = \angle BNM = 90^\circ$, так они опираются на диаметр BM. Точка M – середина отрезка AC, MK и AH параллельны, следовательно, $KC = HK = \frac{1}{4} \cdot BC \Rightarrow BK = 3 \cdot KC$.

б) Обозначим $AB = AC = 2x$, $\angle BAC = 2\alpha$ (рис. 4). Тогда

$$AM = MC = x, \; AN = 2x - 17.$$

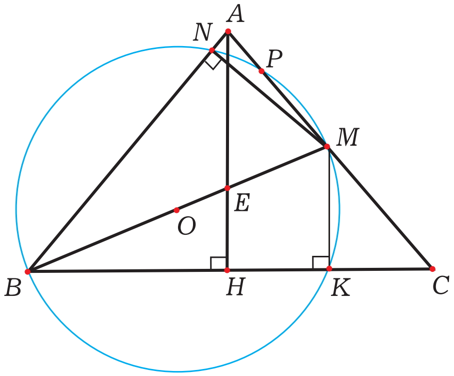

Рис. 4

В прямоугольном треугольнике ANM

$$\cos\angle NAM = \cos 2\alpha = \frac{AN}{AM} = \frac{2x-17}{x},$$

а в прямоугольном треугольнике AHB

$$\sin\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{12}{2x} = \frac{6}{x}.$$

Так как $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, мы получаем уравнение, из которого находим x:

$$\frac{2x-17}{x} = 1 - 2\cdot\frac{36}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 17x + 72 = 0 \Rightarrow x_1 = 8,\ x_2 = 9.$$

Первый корень не подходит, так как сторона $AB = 2x$ должна быть больше, чем 17. Итак, $AB = 2x_2 = 18$.

К этому результату можно прийти, последовательно применив четыре раза теорему Пифагора:

$$MK^2 = MC^2 - KC^2 = x^2 - 36;$$

$$BM^2 = MK^2 + BK^2 = \ldots = x^2 + 288;$$

$$MN^2 = BM^2 - BN^2 = \ldots = x^2 - 1;$$

$$AM^2 = AN^2 + MN^2 =$$

$$(2x-17)^2 + x^2 - 1 = 5x^2 - 76x + 288.$$

Круг замкнулся, так как $AM^2 = x^2$, мы приходим к такому же квадратному уравнению, как в предыдущем решении:

$$5x^2 - 76x + 288 = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 17x + 72 = 0.$$

Ответ. $AB = 18$.

Задача 3. (Основная волна ЕГЭ, 04.06.2015) Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а BC=16.

Решение. а) Обозначим буквами O и S центры соответственно большей и меньшей окружностей (рис. 5). Заметим, что $\angle OMA = \angle OKA = 90°$, так как они опираются на диаметр OA меньшей окружности. Но тогда $CM = MA$ и $BK = KA$, так как перпендикуляры OM и OK делят пополам хорды CA и BA соответственно. Получается, что KM параллельна BC как средняя линия треугольника BAC.

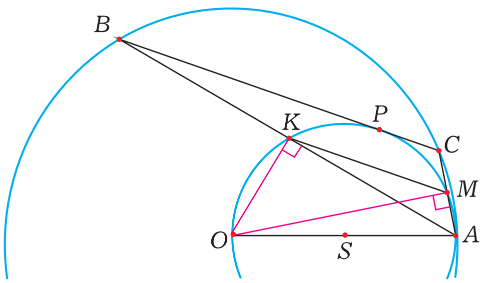

Рис. 5

Переходим к пункту б). Заметим, что $AL = \frac{1}{2}AP$, так как в треугольнике BAC средняя линия KM делит отрезок AP пополам (рис. 6). Длину же отрезка AP найдём, последовательно применяя четыре раза теорему Пифагора: сначала вычисляем расстояние OR от центра большей окружности до хорды BC, затем находим высоту RP прямоугольной трапеции $PROS$, зная катеты RP и OR треугольника PRO, находим его гипотенузу PO, а это даёт возможность найти катет AP треугольника APO.

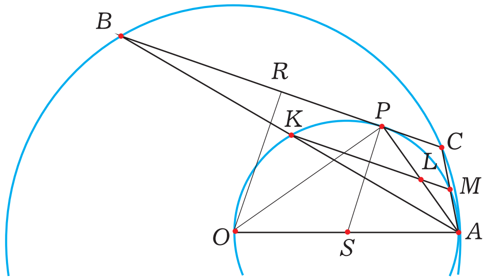

Рис. 6

Приведём результаты вычислений: $OR = 6$, $RP = \sqrt{24}$, $PO = \sqrt{60}$, $AP = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $AL = \sqrt{10}$. Это – **ответ** на второй вопрос задачи.

Интересно отметить, что в аналогичной задаче другого варианта, в которой $BC = 32$, а радиус $OA = 34$, получается $AL = \sqrt{34}$. Вполне возможно, что и в других аналогичных задачах получался ответ $AL = \sqrt{OA}$, но это не общая закономерность для подобных конструкций, а только для тех, в которых $OA - OR = 4$.

Похожая задача предлагалась летом 2015 года Н.Х. Агахановым в качестве домашнего задания на курсах повышения квалификации центра онлайн-обучения «Фоксфорд» учителям математики.

Задача 4. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB – хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Известно, что $AT = 7$, $BT = 4$. Найдите отношение AM/BM.

Решение. Обозначим буквами O и P центры соответственно большей и меньшей окружностей, и пусть хорды AM и BM пересекают меньшую окружность в точках C и D соответственно (рис. 7). Нас не просят, как в задаче 3, доказать то, что AB и CD параллельны, но мы сделаем это.

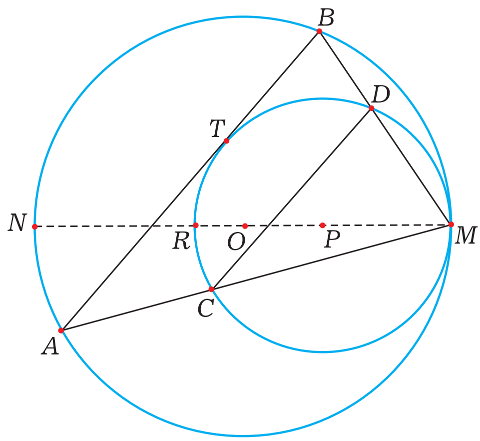

Рис. 7

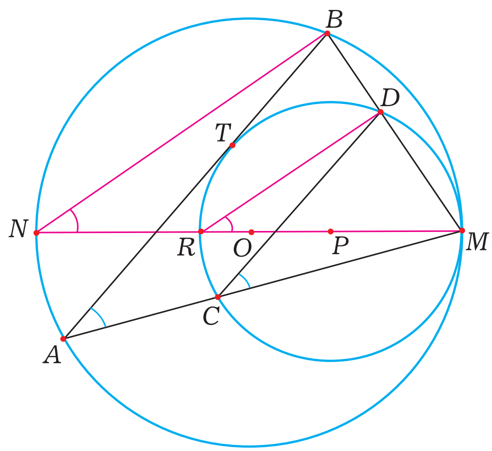

Рис. 8

$$\angle BAM = \angle BNM = 90° - \angle BMN$$

(рис. 8), но ведь и $\angle DCM = \angle DRM = 90° - \angle BMN$. Следовательно, $\angle BAM = \angle DCM$, значит, AB и CD параллельны.

Теперь докажем, что отрезок MT является биссектрисой угла AMB, а тогда по свойству биссектрисы найдём, что $AM / BM = AT / TB = 1{,}75$.

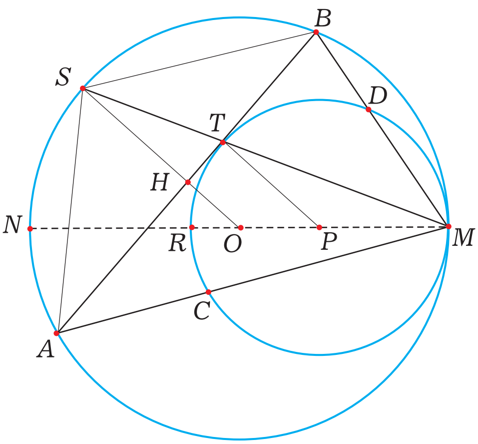

Рис. 9

Продолжим отрезок MT до пересечения с большей окружностью в точке S (рис. 9). Треугольники MPT и MOS подобны (они равнобедренные, и у них одинаковые углы при основаниях, следовательно, все углы у них одинаковые), поэтому радиусы PT и OS параллельны. Но $PT \perp AB$, поэтому и радиус $OS \perp AB$. Но если радиус перпендикулярен хорде, то в точке H он делит её пополам. Из этого следует, что треугольник ASB – равнобедренный, так как его высота SH является и медианой. Из равенства хорд $CT = TD$ следует равенство соответствующих дуг, поэтому $\angle DMT = \angle CMT$, и мы можем применить свойство биссектрисы!

Ответ. $AM / BM = 1{,}75$.

Примечание. Доказав в задаче 4 то, что отрезок MT является биссектрисой угла AMB, мы доказали тем самым так называемую лемму Архимеда. Сформулируем её в терминах рассмотренной выше задачи: если окружность вписана в сегмент окружности, стягиваемый хордой AB, и касается дуги в точке M, а хорды – в точке T, то прямая MT является биссектрисой угла AMB.

Задача 5. (Основная волна ЕГЭ, 04.06.2015) На отрезке AC взята точка B. Построены две окружности: w_1 с диаметром AB и w_2 с диаметром BC. Касательная из точки A к окружности w_2 проходит через M и пересекает w_1 в точке K. Прямая MB пересекает окружность w_1 в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь DBC, если $AK = 7$; $KM = 14$.

Решение. а) $\angle ADM = \angle DMC = 90^\circ$ (рис. 10), так как они опираются на диаметры окружностей w_1 и w_2 соответственно, $\angle ABD = \angle MBC$ как вертикальные, следовательно, равны и накрест лежащие $\angle CAD = \angle ACM$. Значит, прямая AD параллельна прямой MC.

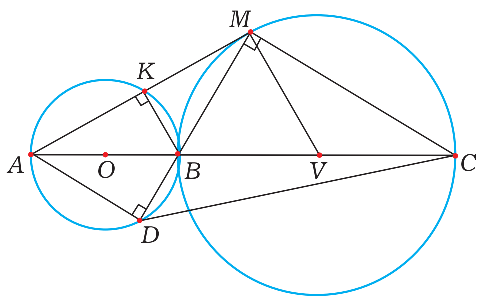

Рис. 10

б) Так как $AMCD$ – трапеция, треугольники DBC и ABM равновелики. Но площадь второго треугольника искать проще!

Пусть V – центр второй окружности. $\angle AMV = 90^\circ$, так как касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. $\angle AKB = 90^\circ$, так как он опирается на диаметр AB.

Следовательно, прямые KB и MV параллельны, и мы можем применить теорему о пропорциональных отрезках:

$$\frac{AK}{KM} = \frac{AB}{BV} = \frac{7}{14} \Rightarrow BV = 2 \cdot AB = 2d.$$

Так как $MV = BV = 2d$, а $AV = 3d$, то, применяя теорему Пифагора к треугольнику AMV, мы найдём $AB = d$: $AV^2 - MV^2 = AM^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9d^2 - 4d^2 = 441 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{441}{5} \Rightarrow AB = \frac{21}{\sqrt{5}}.$$

Для нахождения AB можно использовать то, что квадрат касательной равен произведению всей секущей на её внешнюю часть:

$$AM^2 = AC \cdot AB \Rightarrow 21^2 = 5d \cdot d.$$

Теперь вычислим

$$\sin\angle MAV = \frac{MV}{AV} = \frac{2d}{3d} = \frac{2}{3}$$ и найдём

$$S_{\Delta DBC} = S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot AB \cdot \sin\angle MAV$$

$$= \ldots = \frac{147}{\sqrt{5}}.$$

Конечно, не так уж трудно было вычислить и саму $S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot DH$.

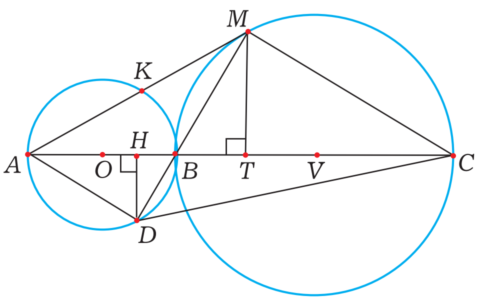

Рис.11

Высота $MT = AM \cdot \sin\angle MAV = 14$, а высота $DH = \frac{1}{4} \cdot MT = \frac{7}{2}$, так как треугольники BMC и BDA подобны с коэффициентом подобия 4 (рис. 11). Основание $BC = 4d = \frac{84}{\sqrt{5}}$,

$$S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot DH = \frac{147}{\sqrt{5}}.$$

Ответ. $S_{\Delta DBC} = \frac{147}{\sqrt{5}}$.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Фразы из лекций

Забудьте это ещё раз и навсегда!

Сотрите на минутку!

Сейчас мы продифференцируем эту бесконечно дифференцируемую функцию один раз, а дома вы закончите.

Гимн теоретиков

В прошлом веке физики-теоретики Петербургского (тогда Ленинградского) физико-технического института сочинили такой гимн:

Мы теории физической жрецы –
В воду ловко прячем все концы...
Мы на волнах вероятности плывём,
На классическую физику плюём,
Изучаем недра атомов и звёзд
И к эксперименту строим мост.
Кто своею жизнью дорожит –
К нам по этому мосту не побежит!