Проверь себя

(Ответы и решения к задачам, опубликованным в журнале №2 стр.40)

1. Ответ: на 95°.

Решение: Пусть цена товара x. После повышения на $p\%$ цена равна $x\left(1+\frac{p}{100}\right)$, поэтому имеем

$$x_1=x\left(1+\frac{1}{5}\right),\quad x_2=\frac{6}{5}x\left(1+\frac{1}{4}\right),$$

$x_3=\frac{3}{2}x\left(1+\frac{3}{10}\right)=\frac{39}{20}x$. Цена повысилась на $\frac{x_3-x}{x}100(\%)=95\%$.

2. Ответ: $0,\ +\sqrt{2},\ -\sqrt{2}$.

Решение: $\left|\frac{x-1}{x-2}\right|=\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{x-2}=\frac{x+1}{x+2}\\ -\frac{x-1}{x-2}=\frac{x+1}{x+2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x\\ 2x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

3. Ответ: -4.

Решение: $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}=x$. Очевидно, что $x<0$,

$$|x|=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}},$$

$|x|^2=x^2=18-2\sqrt{81-80}=16$. Из $x<0$ следует $x=-4$.

4. Ответ: 4.

Решение: $\frac{1}{\cos 9^\circ\cdot\cos 81^\circ}-\frac{1}{\cos 27^\circ\cdot\cos 63^\circ}=$

$$=\frac{1}{\cos 9^\circ\cdot\sin 9^\circ}-\frac{1}{\cos 27^\circ\cdot\sin 27^\circ}=$$

$$=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}=2\frac{\sin 54^\circ-\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ}=$$

$$=4\frac{\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ}=4.$$

5. Ответ: не существует.

Решение: Предположим, что такой треугольник существует, его стороны a, b и c. Из формулы площади $S=\frac{1}{2}h_a\cdot a$ следует $ah_a=$

$$=bh_b=ch_c\Leftrightarrow 5a=9b=13c\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{5}{9}a,\\ c=\frac{5}{13}a,\end{cases}$$

и $(b+c)=\frac{110}{117}a<a$.

Нарушено неравенство треугольника. Предположение неверно, такой треугольник не существует.

6. Ответ: 3.

Решение:

$$2^{-x}\left(2^x+5\right)\left(1+2^x\right)+3\cdot 2^{-x}=2019\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\text{при } 2^x=t\right)\ t^2+6t-2019t+8=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t^2-2013t+8=0.$ Имеем $D>0$, существует два различных положительных решения

$$\left(t_{1,2}=\frac{2013\pm\sqrt{2013^2-32}}{2}\right),\ t_1=2^{x_1},$$

$$t_2=2^{x_2}.$$

Далее, $t_1\cdot t_2=2^{x_1+x_2}$. По теореме Виета $t_1\cdot t_2=8$, тогда $x_1+x_2=3$.

7. Ответ: $\operatorname{arctg}1<\operatorname{tg}1$.

Решение: Из определения

$$\begin{cases}\operatorname{arctg}1=\varphi,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},\\ \operatorname{tg}\varphi=1,\end{cases}$$

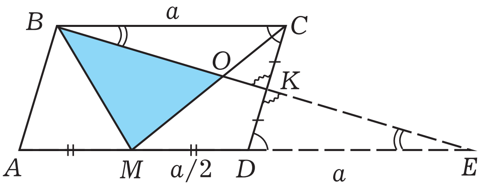
следует $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, (число $\frac{\pi}{4}<1$).

Функция $\operatorname{tg}x$ на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ монотонно возрастает, из $0<\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$ следует $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}<\operatorname{tg}1$, т.е. $1<\operatorname{tg}1$. Получаем неравенства: $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}<1<\operatorname{tg}1\Rightarrow\operatorname{arctg}1<\operatorname{tg}1$.

8. Ответ: 0,3.

Решение: Обозначим площадь параллелограмма S, высоту к стороне BC через h и $BC = a$. Так как $S=ah$, $S_{BMC}=\frac{1}{2}a\cdot h$, то $S_{BMC}=\frac{1}{2}S$.

Продлим прямую BK до пересечения в точке E с прямой AD. $\triangle BKC=\triangle EKD$ (по двум углам и стороне между ними), поэтому $BC=ED=a$, и $ME=\frac{3}{2}a$. Далее, $\triangle BOC\sim\triangle EOM\Leftrightarrow\frac{OC}{OM}=\frac{BC}{ED}$, $\frac{OC}{OM}=\frac{a}{\frac{3}{2}a}=\frac{2}{3}$, тогда из $MO+OC=MC$ следует $MO=\frac{3}{5}MC$.



Площади треугольника BOM и BCM имеют общую высоту из вершины B, их площади относятся как длины оснований:

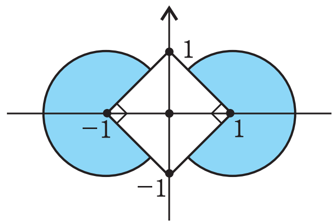
$$S_{BOM}=\frac{MO}{MC}S_{BCM}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}S=\frac{3}{10}S.$$

9. Ответ: $\frac{3}{2}\pi$.

Решение: Граница множества $M_1=\{(x,y):|x|+|y|\geq 1\}$ есть квадрат $|x|+|y|=1$. (в первом квадранте это отрезок прямой $x+y=1$, остальные стороны квадрата получаются симметрией относительно осей координат). Множество M_1 – это внешность такого квадрата.

Множество M_2, определяемое неравенством $x^2+y^2\leq 2|x|$, перепишем в виде $\left(x^2=|x|^2\right)$:

$$|x|^2-2|x|+1+y^2\leq 1\Leftrightarrow(|x|-1)^2+y^2\leq 1.$$



При $x>0$ получаем $(x-1)^2+y^2\leq 1$, а при $x<0$ соответственно $(x+1)^2+y^2\leq 1$. Это два круга радиуса 1 с центрами в точках $x=1$ и $x=-1$.

Пересечение множеств M_1 и M_2 изображено на рисунке: вне квадрата, но внутри кругов. Площади кругов равны $\pi R^2=\pi$, из каждого удалён сектор с углом $90°$, площадь которого $\frac{1}{4}\pi R^2=\frac{\pi}{4}$. Искомая площадь равна $2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}\pi$.

Статью подготовила Т.С. Пиголкина