Просто, как Колумбово яйцо

Мы перепечатываем статью А.П. Савина, опубликованную ранее в журнале «Квант» (№1, 1993), которая посвящена истории возникновения и решения одной интересной исследовательской задачи, поставленной школьникам академиком А.Н. Колмогоровым. Анатолий Павлович Савин был выдающимся педагогом и просветителем, одним из активных организаторов и участников многих знаковых форм работы со школьниками (олимпиады всех уровней, конференции, праздники науки, летние школы, математические кружки и пр.). Он – автор многочисленных научно-популярных книг и статей, один из организаторов журнала «Квант», основатель и постоянный редактор рубрики этого журнала «Квант для младших школьников».

Появление задачи

Началась эта история в 1948 году, когда я, долговязый восьмиклассник одной из московских школ, начал посещать занятия математического кружка при Московском университете. Занятия вели студенты (руководителем моей секции был В. Болтянский, ныне известный математик), а по воскресеньям нам читали лекции профессора университета. Одну из лекций прочёл академик А.Н. Колмогоров. Я уже не помню, чему была посвящена лекция, но один её момент врезался в мою память. Андрей Николаевич рассказал о том, как на шарикоподшипниковом заводе проверяют роликовые подшипники «на круглость». Ролик укладывают в угловой лоток (рис. 1), приставляют к нему щуп и начинают вращать ролик. Если щуп при этом остаётся неподвижным, то считается, что ролик круглый, и по положению щупа определяется его диаметр; если щуп движется, т. е. диаметр ролика не соответствует стандарту, ролик бракуется. Но насколько эффективна такая проверка? Может ли «проскочить» некруглая деталь?

Если поставить задачу математически, то она будет выглядеть следующим образом. Дан угол и точка M внутри него. Существует ли фигура, которая при вращении, касаясь сторон угла, будет содержать точку M на своей границе?

Рис. 1. Проверка ролика на «круглость».

А.Н. Колмогоров отметил, что решение этой задачи, имеющей большое практическое значение, ещё не получено, и предложил своим слушателям решить её. Мне задача понравилась, я много размышлял над ней. Позже, будучи уже студентом мехмата и одним из руководителей школьного кружка при МГУ, я усиленно пропагандировал эту задачу среди своих учеников. Но продвижений не было.

В 1970 году начал выходить журнал «Квант», и в одном из его номеров (№ 3 за 1971 г.) я поместил небольшую заметку об этой задаче.

Решение

Прошло почти десять лет. И вот в «Квант» пришло письмо от ленинградского школьника Андрея Бабичева, известного своими успехами на математических олимпиадах, в котором он сообщал о своём решении задачи Колмогорова.

Решение было удивительно простым. Возьмём правильный многоугольник, продолжим две его стороны до пересечения (можно взять просто две соседних стороны) – это будет наш угол, а за точку M примем одну из вершин, не лежащих на этих сторонах. Начнём поворачивать многоугольник так, чтобы он всё время касался сторон угла, и будем отмечать на нём положение точки M (рис. 2). Получим «звёздочку». Если её вырезать из многоугольника, то это и будет искомой фигурой.

В письме Андрей не сообщал, что за кривая образуется на многоугольнике. Я довольно быстро определил, что «звёздочка» составлена из дуг «улитки Паскаля» (конхоиды окружности). Эта кривая получается так. На заданной окружности выбирается точка, через неё проводятся всевозможные прямые, на этих прямых откладываются отрезки заданной величины a так, чтобы один из концов каждого отрезка лежал на заданной окружности. Вторые концы этих отрезков и определяют кривую, называемую улиткой Паскаля. В случае, когда a меньше диаметра, получается кривая с петлёй (рис. 3 *а*). Если a равняется диаметру, то такая кривая называется кардиоидой (рис. 3 *б*). Если же a больше диаметра, то вид кривой таков, как на рис. 3 *в*.

Убедиться в том, что кривая на многоугольнике является улиткой Паскаля, несложно. Для этого поменяем ролями угол и многоугольник – будем вращать угол (с точкой M) вокруг многоугольника.

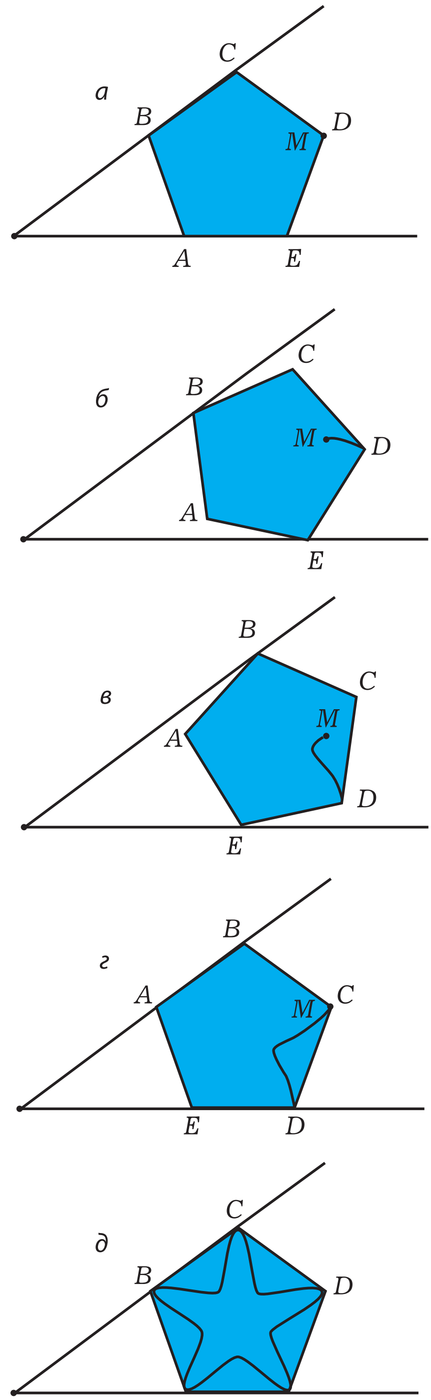


Рис. 2. Вращение многоугольника порождает решение

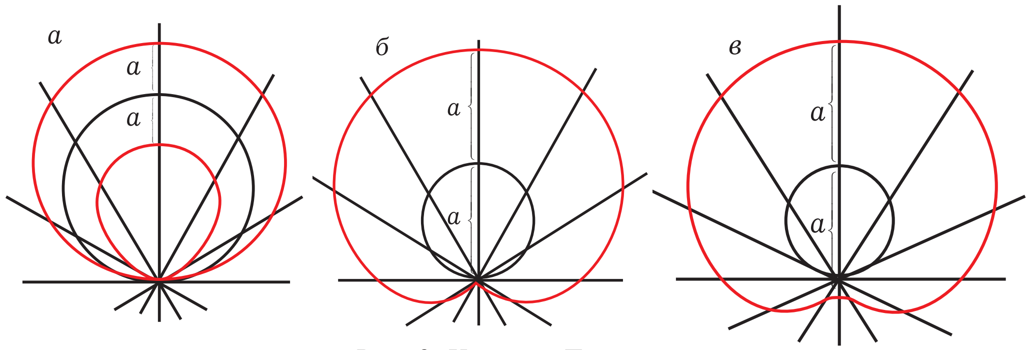


Рис. 3. Улитки Паскаля

Ясно, что на протяжении всего поворота на угол $\alpha = 360°/n$ (n – число сторон многоугольника) многоугольник будет касаться сторон угла двумя вершинами. На рис. 4 это вершины A и C, если вращение угла происходит против часовой стрелки, что соответствует вращению многоугольника по часовой стрелке. При таком вращении точка S будет двигаться по дуге окружности, поскольку множество вершин углов заданного размера, опирающихся на заданный отрезок, есть дуга окружности. Нарисуем всю эту окружность и отметим точку N, в которой она пересекается с отрезком SM. Отношение длин дуг AN и NC, очевидно, равно отношению величин углов ASM и MSC. Поэтому, если мы будем поворачивать плоскость с нарисованными на ней углом и точкой M, оставляя многоугольник неподвижным, то точка S будет скользить по дуге окружности, а отрезок SM будет проходить через точку N этой окружности. Поскольку величина отрезка SM равна a – постоянной величине, точка M будет скользить по дуге улитки Паскаля.

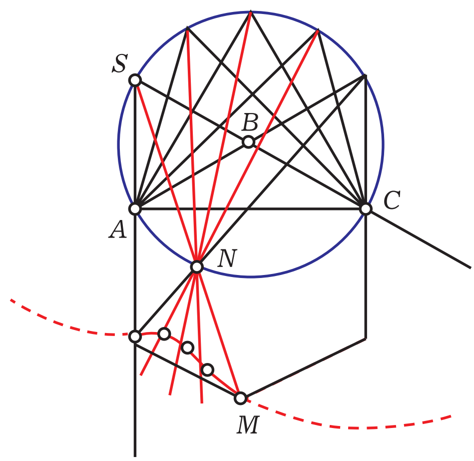


Рис. 4. Кривая Бабичева – улитка Паскаля

Новая постановка

На этом можно было бы поставить точку, хотя оставалось несколько вопросов. Например, любую ли вершину многоугольника можно брать в качестве точки M? (Ясно, что не любую, но интересно определить, какие нельзя.) Андрей Николаевич Колмогоров, ознакомившись с результатами А. Бабичева, задал следующий вопрос: существует ли выпуклая кривая, удовлетворяющая условиям задачи?

Эта проблема, опубликованная вместе со статьёй А. Бабичева («Квант» №5 за 1981 г.), стала популярной среди студентов-математиков МГУ, ЛГУ и ряда других университетов. Но результата долго не было. И вот в середине 1992 года недавний выпускник МГУ Валерий Цыгикало принёс в редакцию «Кванта» толстую пачку аккуратно исписанных страниц, содержащую удивительное решение этой проблемы.

Решение!

Идея В. Цыгикало явилась продолжением идеи А. Бабичева. Заменим правильный многоугольник произвольной кривой, касающейся сторон угла. Точку M возьмём в одном из концов этой дуги. Начнём вращать дугу так, чтобы она продолжала касаться сторон угла; тогда точка M будет вычерчивать продолжение взятой кривой. Такую процедуру нетрудно осуществить с помощью кальки. Действительно, нарисуем на листе бумаги угол и точку M внутри него, положим на бумагу лист кальки и нарисуем на ней произвольную кривую, касающуюся сторон угла. Один из концов дуги этой кривой должен находиться в точке M (рис. 5 *а*). Повернем лист кальки на небольшой угол так, чтобы кривая вновь коснулась обеих сторон угла.

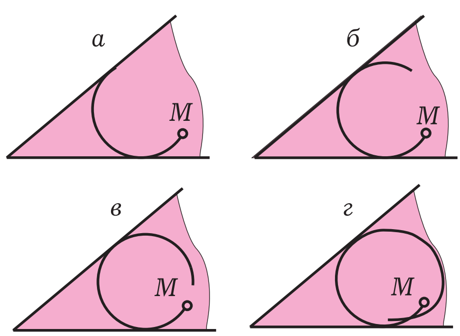


Рис. 5. Вращение кривой порождает её продолжение

При этом конец кривой переедет из точки M в другую точку. Траекторию конца постараемся изобразить на кальке, тем самым продолжив имеющуюся кривую (рис. 5 *б*). Ещё повернём (рис. 5 *в*) и вновь продолжим кривую и т. д. Получим некоторую спиралеобразную кривую (рис. 5 *г*), вид которой зависит, конечно, от величины угла, выбранной точки и выбранной кривой.

Валерий Цыгикало запрограммировал этот процесс, что дало ему возможность наблюдать такие кривые на дисплее компьютера. Его наблюдения показали, что при достаточно долгом вращении получаемая кривая стабилизируется – стремится к некоторой спиралеобразной периодической кривой, т. е. к кривой, которая повторяется через определённый угол поворота T. Однако, как правило, $T \neq 2\pi$, т. е. кривая получается незамкнутой, не ограничивающей какой-либо фигуры. Непрерывно меняя положение точки M, величину угла, начальную кривую, В. Цыгикало получал, что и результирующая кривая (получаемая при стабилизации) также непрерывно меняется, в частности, непрерывно меняется и её период. Путём таких изменений ему удалось найти большой набор замкнутых кривых, среди которых были как невыпуклые кривые, так и выпуклые (рис. 6). Кстати, если в качестве начальной кривой взять правильный многоугольник, две его стороны – в качестве сторон угла, одну из вершин – в качестве точки M, то компьютер рисует великолепную улитку Паскаля. Ура! Задача Колмогорова решена!

Решение?

Однажды, как гласит легенда, Христофору Колумбу, открывшему Америку, была предложена задача – поставить яйцо на его острый конец. Решение Колумба было простым и неожиданным: он ударил яйцом о стол – скорлупа на остром конце смялась и яйцо устойчиво встало на столе. «Колумбово яйцо» вошло в наш лексикон как символ неожиданно простого решения задачи, хотя решение Колумба оставляет чувство неудовлетворённости: яйцо-то испорчено.

Увы, это же чувство возникает и при внимательном изучении решения В. Цыгикало. Он может продемонстрировать на дисплее выпуклые кривые, удовлетворяющие условиям задачи Колмогорова. Но что это за кривые? Действительно ли они выпуклы? На глаз – вроде бы да. А на самом деле? Компьютер выдаёт нам ответ, который мы не можем пока проверить. Подобная ситуация уже встречалась в математике – я имею в виду нашумевшее решение «задачи о четырёх красках», когда машина выполнила огромный объём проверок, недоступный человеку. Правда, в случае задачи Колмогорова решение В. Цыгикало указывает чёткий путь для строгого доказательства существования выпуклых фигур, удовлетворяющих условию этой задачи.

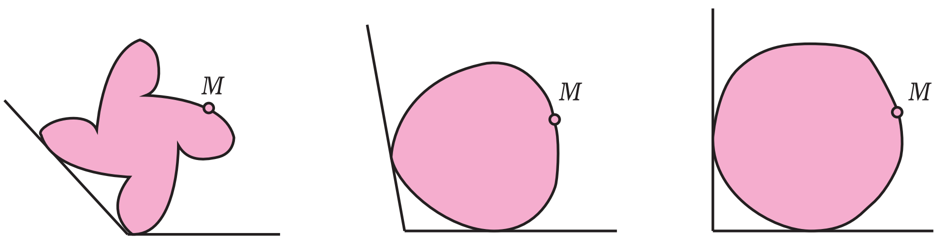


Рис. 6. Примеры кривых Цыгикало

Задача Люстерника

Одно время я занимался исследованием задачи Аполлония: построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей. Обсуждая с разными людьми методы её решения, я узнал, что в 1946 году московский математик Лазарь Аронович Люстерник в журнале «Успехи математических наук» поставил следующую проблему: *существует ли выпуклая фигура, отличная от круга, которая может, вращаясь, всё время касаться трёх заданных окружностей?*

Заметим, что математики причисляют прямые и точки к окружностям (прямая – окружность бесконечного радиуса, точка – окружность нулевого радиуса). Поэтому задача Колмогорова является частным случаем задачи Люстерника: две из окружностей – прямые, а третья – точка. Видимо, исходя из постановки задачи Люстерника, А.Н. Колмогоров переформулировал свою задачу.

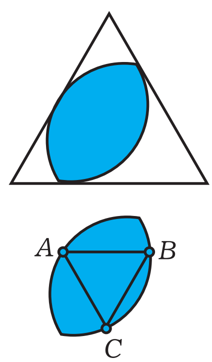


Рис. 7. Луночка – решение двух задач Люстерника

В течение долгого времени были известны решения задачи Люстерника лишь в двух случаях:

1) окружности – прямые, образующие правильный треугольник;

2) окружности – точки, являющиеся вершинами правильного треугольника. В обоих случаях решение давала одна и та же фигура – пересечение двух кругов, центр каждого из которых лежит на границе другого круга (рис. 7).

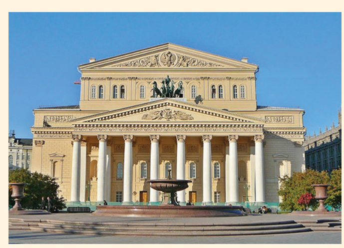
Заметим, что во втором случае существует бесконечно много невыпуклых фигур, удовлетворяющих остальным условиям задачи. В дальнейшем было показано существование решения задачи в том случае, если окружности – это прямые, образующие треугольник, углы которого рационально выражаются через π. В начале 1990-х гг. молодой выпускник МФТИ М. Ковалёв доказал, что не существует выпуклой фигуры, отличной от круга, которая, вращаясь, касается одновременно и заданной прямой в определённой точке, и заданного круга (при условии, что выбранная на прямой точка касания не совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного на эту прямую из центра круга). Таким образом, он решил задачу Люстерника для случая, когда одна из окружностей – прямая, а другая – точка, лежащая на этой прямой.

Чуть было не забыл ещё об одном частном случае задачи Люстерника, который можно рассматривать и как частный случай задачи Колмогорова. Пусть две из окружностей – параллельные прямые, а третья – точка, лежащая между ними. Тогда решением задачи будет любая фигура постоянной ширины. Простейшей из таких фигур является треугольник Рело – общая часть трёх кругов, центры которых лежат в вершинах равностороннего треугольника, а радиусы равны стороне треугольника. В данном случае сторону треугольника следует взять равной ширине полосы между параллельными прямыми. Ясно, что совсем нетрудно модифицировать программу В. Цыгикало для задачи Люстерника в случае, когда одна из заданных окружностей – точка. Чуть сложнее это будет сделать для общего случая (все три окружности невырождены). Настойчивые экспериментаторы получат и здесь компьютерные решения, а наличие таких решений явится мощным стимулом для полного выяснения условий существования решения задачи Люстерника.

По материалам статьи А.П. Савина в журнале «Квант», 1993, №1.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Неплохой критерий



Став популярным, певец заявил директору театра, что в следующем сезоне будет петь в нём только за вдвое большую плату, чем в этом сезоне.

– О боже! – воскликнул директор. – Но столько получает наш премьер-министр…

– Не думаю, чтобы он радовал публику больше, чем я, – парировал певец.

Ему бы иметь компьютер

Когда Людвиг ван Бетховен, уже всемирно известный композитор, подсчитывая гонорар, должен был умножить, например, 340 на 19, то он 19 раз писал в столбик число 340 и складывал. Операция умножения казалась ему непостижимой тайной. И к тем, кто умел умножать и делить числа, он всю жизнь относился с большим уважением.