Болибрух Андрей Андреевич (1950-2003)

Окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, в 1994 году избран членом-коррес-пондентом Российской академии наук, а в 1997 году стал одним из самых молодых академиков РАН. С 1996 года был заместителем директора Математического института им. В.А. Стеклова РАН. В 2002 стал членом исполкома Международного союза математиков (IMU). Лауреат Государственной премии Российской Федерации (2001 г.)

Простейшие уравнения и системы

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным

Многие задачи физики и математики сводятся, в конечном счёте, к решению квадратных уравнений, однако порой свести какое-то уравнение к квадратному бывает не так-то просто. Общих рецептов здесь нет. Однако есть несколько типов уравнений, для которых существуют конкретные способы сведения. Мы их рассмотрим ниже.

1. Иногда в уравнении, содержащем высокие степени переменной x, удаётся сделать замену переменной, сводящую его к квадратному. К этому типу уравнений относятся, в частности, *биквадратные уравнения*, т. е. уравнения вида

$$ax^4+bx^2+c=0, \qquad (1)$$

где $a\neq 0$. Сделаем в этом уравнении замену $x^2=t$, получим относительно t квадратное уравнение

$$at^2+bt+c=0. \qquad (2)$$

Пусть t_1 и t_2 – неотрицательные корни последнего уравнения. Тогда корнями исходного уравнения являются числа $x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}$ и $x_{3,4}=\pm\sqrt{t_2}$. Если же уравнение (2) имеет только отрицательные корни или вовсе не имеет корней, то уравнение (1) корней не имеет.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^4+2x^2-8=0.$$

Решение. Обозначив $x^2=t$, получим уравнение $t^2+2t-8=0$, корнями которого являются числа $t_1=-4$, $t_2=2$. Поскольку $x^2\ge 0$ для всех x, то корень t_1 следует отбросить. Имеем

$$x^2=2,\ x_{1,2}=\pm\sqrt{2}.$$

Ответ: $\{\pm\sqrt{2}\}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4+3x^2+2=0.$$

Решение. Обозначив $x^2=t$, имеем $t^2+3t+2=0$. Решая это уравнение, получаем $t_1=-1$, $t_2=-2$. Так как $x^2\ge 0$, то исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

Рассмотрим ещё несколько примеров уравнений, которые удачной заменой переменной сводятся к квадратным.

Пример 3. Решить уравнение

$$4+\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}=0.$$

Решение. Сделаем замену

$$\frac{x^2+x-5}{x}=t,$$

получим: $t+\dfrac{3}{t}+4=0$, $t^2+4t+3=0$.

Решая последнее уравнение, получим:

$$а)\quad t_1=-1,$$

$$б)\quad t_2=-3.$$

В случае $а)$ имеем:

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-1,\ x^2+x-5=-x,$$

$$x^2+2x-5=0,\ x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+5}=-1\pm\sqrt{6}.$$

В случае $б)$ получаем:

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-3,\quad x^2+x-5=-3x,$$

$$0=x^2+4x-5,$$

$$x_{3,4}=-2\pm\sqrt{4+5}=-2\pm 3=\{-5;1\}.$$

Ответ: $\{-1\pm\sqrt{6};-5;1\}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{12}. \qquad (3)$$

Решение. Один из способов решения состоит в умножении обеих частей уравнения на $x(x+2)(x+1)^2$, что позволяет избавиться от знаменателей, но приводит к уравнению четвёртой степени. Рассмотрим другой способ решения. Попытаемся свести уравнение к квадратному. Сделаем замену $x(x+2)=x^2+2x=t$. Поскольку $(x+1)^2=x^2+2x+1=t+1$, уравнение (3) сводится к уравнению

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}=-\frac{1}{12}.$$

Умножив обе части этого уравнения на $12t(t+1)$, получим:

$$12t+12-12t=t^2+t,\quad t^2+t-12=0,$$

$$t_{1,2}\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\{-4;\ 3\}.$$

Итак, имеем:

$а)$ $x^2+2x=-4$, $x^2+2x+4=0$,

решений нет.

$б)$ $x^2+2x=3$, $x^2+2x-3=0$,

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2=\{-3;1\}.$$

Ответ: $\{-3;1\}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4. \qquad (4)$$

Решение. Обозначим $x+\dfrac{1}{x}=t$.

Имеем $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=t^2$, откуда

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Итак, получаем:

$$t^2+t-2=4,\quad t^2+t-6=0,$$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\{-3;\,2\}.$$

Имеем: *а*) $x+\frac{1}{x}=-3,\ x^2+3x+1=0,$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};$$

б) $x+\frac{1}{x}=2,\ x^2-2x+1=0,\ x_3=1.$

Ответ: $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};\,1\right\}.$

2. Иррациональные уравнения

Рассмотрим простейшие иррациональные уравнения. Покажем на конкретных примерах, как решать такие уравнения.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{3-x}=x-1. \qquad (1)$$

Решение. Выражение под знаком квадратного корня должно быть неотрицательным (корень квадратный определяется лишь для неотрицательных чисел). Следовательно, должно быть $3-x\ge0$, или $x\le3$. Возведём теперь обе части уравнения (1) в квадрат (при этом могут появиться лишние корни, нужна проверка):

$$3-x=x^2-2x+1,\ x^2-x-2=0.$$

Отсюда $x_1=2,\ x_2=-1.$ Оба значения x удовлетворяют условию $x\le3$. Однако, как показывает проверка, $x_2=-1$ не удовлетворяет уравнению (1). Число $x_1=2$ удовлетворяет уравнению (1).

Ответ: $\{2\}$.

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{1+x\sqrt{2x^2-56}}=x-1. \qquad (2)$$

Решение. Возведём обе части уравнения (2) в квадрат:

$$\left.\begin{aligned}&1+x\sqrt{2x^2-56}=x^2-2x+1,\\&x\sqrt{2x^2-56}=x(x-2).\end{aligned}\right. \qquad (3)$$

При возведении в квадрат потери корней не происходит, поэтому любой корень исходного уравнения (2) обязательно будет также и корнем уравнения (3). Найдём все корни уравнения (3). Заметим, что $x=0$ не является корнем уравнения (3): при $x=0$ выражение под корнем в левой части уравнения (3) будет отрицательным. Сократив теперь на $x\ne0$, получим:

$$\sqrt{2x^2-56}=x-2.$$

Снова возводим в квадрат:

$$2x^2-56=x^2-4x+4,\ x^2+4x-60=0.$$

Отсюда $x_1=6,\ x_2=-10.$ Проверкой убеждаемся, что $x_1=6$ является корнем как уравнения (3), так и уравнения (2), в то время как $x=-10$ не является корнем этих уравнений.

Ответ: $\{6\}$.

Наконец, решим ещё одно иррациональное уравнение.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x^3\sqrt{x^2-4x+4}}=x(x-1). \qquad (4)$$

Решение. Возведём обе части уравнения (4) в квадрат:

$$x^2+x^3\sqrt{x^2-4x+4}=x^4-2x^3+x^2. \quad (5)$$

Заметим, что значение $x=0$ является корнем уравнения (5) и исходного уравнения (4). Рассмотрим теперь значения $x\ne0$. Сократив обе части уравнения (5) на x^3, получим уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+4}=x-2. \qquad (6)$$

В области $x<2$ правая часть уравнения (6) отрицательна и решений нет. В области $x\geq 2$ уравнение (6) превращается в тождество (достаточно обе части возвести в квадрат). Заметим теперь, что в области $x\geq 2$ уравнение (4) равносильно уравнению (6) (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, все значения $x\geq 2$ являются решениями уравнения (4).

Ответ: $\{0;\ [2;+\infty)\}$.

В разнообразных примерах нашли отражение все характерные особенности иррациональных уравнений. Отметим их: квадратный корень определяется лишь для неотрицательных чисел; значение квадратного корня всегда неотрицательно; обе части уравнения можно возводить в квадрат (к потере корней это не приводит, но могут появиться лишние корни, поэтому нужна проверка). Наконец, отметим, что не обязательно при решении иррациональных уравнений вначале находить область допустимых значений переменной (это не всегда возможно). Достаточно осуществить проверку найденных корней.

3. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется упорядоченная пара чисел $(x_0;y_0)$, являющаяся решением каждого из уравнений системы. Две системы называются равносильными, если множество решений одной системы и множество решений другой системы совпадают.

Перечислим без доказательства те преобразования, которые не нарушают равносильности линейных систем:

1) обе части некоторого уравнения исходной системы можно умножить (разделить) на отличное от нуля число;

2) к обеим частям некоторого уравнения исходной системы можно прибавить (вычесть) соответственные части другого уравнения данной системы;

3) значение переменной, найденное из некоторого уравнения системы, можно подставить в любое уравнение той же системы.

Рассмотрим подробнее системы вида (1). Пусть хотя бы одно из чисел a_1, b_1, a_2, b_2 отлично от нуля. Пусть, например, $a_1\neq 0$. Тогда система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} x+\dfrac{b_1}{a_1}y=\dfrac{c_1}{a_1}, \\ a_2x+b_2y=c_2\,. \end{cases} \qquad (2)$$

Умножим первое уравнение на $-a_2$ и прибавим ко второму, получим

$$\left(b_2-\frac{b_1}{a_1}a_2\right)y=c_2-\frac{c_1}{a_1}a_2,$$

или $\left(a_1b_2-a_2b_1\right)y=a_1c_2-a_2c_1$. (3)

Возможны 3 случая:

1) $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

В этом случае находим из (3)

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

и из (2)

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

то есть решение системы (2) существует и единственно;

2) $a_1b_2-a_2b_1=0$ и $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$.

В этом случае уравнение (3), а стало быть и система (2) решений не имеют;

3) $a_1b_2-a_2b_1=0$ и $a_1c_2-a_2c_1=0$.

В этом случае любое число $y=\alpha$ является решением уравнения (3), из (2) находим $x=\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1}{a_1}\alpha$.

Итак, в этом случае *решений бесконечно много,* и все они имеют вид: $\left(\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1}{a_1}\alpha;\ \alpha\right)$, где $\alpha\in R$ – произвольное число.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x+4y=7,\\3x-y=1.\end{cases}$$

Решение. Умножим второе уравнение на 4 и сложим с первым, получим $14x=11$, $x=\frac{11}{14}$, откуда из второго уравнения системы

$$y=\frac{33}{14}-1=\frac{19}{14}.$$

Ответ: $\left(\frac{11}{14};\frac{19}{14}\right)$.

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=2,\\3x+3y=7.\end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение на -3 и прибавим ко второму, получим уравнение $0=1$, которое, очевидно, не имеет решения, значит, и исходная система решений не имеет.

Ответ: нет решений.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}5x-y=1,\\15x-3y=3.\end{cases}$$

Решение. Данная система уравнений равносильна одному уравнению $5x-y=1$, так как второе уравнение системы получается из первого почленным умножением на 3. Следовательно, решениями исходной системы являются все пары чисел вида $x=\alpha$, $y=5\alpha-1$.

Ответ: $(\alpha;\ 5\alpha-1)$, где $\alpha\in R$.

Пример 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x-(a-1)y=1,\\ax-2y=4-a\end{cases}$$

при всех значениях параметра a.

Решение. Умножим первое уравнение на $-a$ и сложим со вторым, получим

$$\left(a^2-a-2\right)y=4-2a,$$

или

$$(a-2)(a+1)y=-2(a-2). \qquad (4)$$

Возможны три случая:

1) $a=2$, в этом случае уравнение (4) даёт $0=0$, т. е. решением системы является произвольное число $y=\alpha$, $\alpha\in R$. Из первого уравнения системы имеем $x=1+\alpha$. Итак, при $a=2$ получаем бесконечное множество решений $(1+\alpha;\alpha)$, $\alpha\in R$;

2) $a=-1$, в этом случае уравнение (4) принимает вид $0=6$, т. е. исходная система решений не имеет;

3) $a\neq 2$, $a\neq -1$, из уравнения (4) получаем

$$y=-\frac{2}{a+1},$$

из первого уравнения исходной системы $x=\frac{3-a}{a+1}$.

Ответ:

1) $a=2, (x;\, y)=(1+\alpha;\, \alpha),\ \alpha\in R,$

2) $a=-1,$ решений нет;

3) $a\neq 2,\ a\neq -1,\ (x;\, y)=\left(\frac{3-a}{a+1};-\frac{2}{a+1}\right).$

Рассмотрим теперь m линейных уравнений с n переменными. При решении таких систем удобно пользоваться методом Гаусса. Этот метод является частным случаем метода исключения переменных и состоит в том, что равносильными преобразованиями данную систему приводят к так называемой *треугольной форме*.

Пример 13. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+y+2z=10, \\ x+y+4z=15, \\ 3x-y+5z=16. \end{cases}$$

Решение. Исключим сначала x из второго и третьего уравнения. Для этого прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на $-\frac{1}{2}$, а к третьему – первое, умноженное на $-\frac{3}{2}$, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 2x+y+2z=10, \\ \frac{1}{2}y+3z=10, \\ -\frac{5}{2}y+2z=1. \end{cases}$$

Исключим теперь y из третьего уравнения, для этого прибавим к нему второе, умноженное на 5, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2x+y+2z=10, \\ \frac{1}{2}y+3z=10, \\ 17z=51. \end{cases}$$

Системы такого вида называются *треугольными*. Они легко решаются. Действительно, из третьего, второго и первого уравнения последовательно находим:

$$z=3,\ y=20-6z=2,\ x=\frac{10-2z-y}{2}=1.$$

Ответ: $(1;\, 2;\, 3)$.

Пример 14. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} -2x+y+z=1, \\ 3x-6y+3z=-2, \\ x+y-2z=4. \end{cases}$$

Решение. Решая эту систему методом Гаусса, получаем (проделайте это самостоятельно) равносильную систему:

$$\begin{cases} -2x+y+z=1, \\ -9y+9z=-1, \\ 0=26. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений, так как ни при каких x, y, z не может выполняться третье уравнение системы $0=26$. Значит, и исходная система решений не имеет.

Ответ: нет решений.

Пример 15. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение на -1, прибавим ко второму, получим:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ -2x_3-x_4=1, \\ x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Поменяем местами второе и третье уравнения системы и перенесём x_4 в правую часть всех уравнений, получим систему треугольной формы, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1-x_4, \\ x_2+x_3=0, \\ -2x_3=1+x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_4=t$ – произвольное число $t\in R$, тогда последовательно находим: $x_3=-\frac{1}{2}-\frac{t}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}+\frac{t}{2}$, $x_1=1-t$, и других решений система не имеет.

Ответ: $\left(1-t;\frac{1}{2}+\frac{t}{2};-\frac{1}{2}-\frac{t}{2};\ t\right)$, $t\in R$.

4. Некоторые системы специального вида

Если одно из уравнений системы линейное, а другое квадратное, то такая система решается простой подстановкой.

Пример 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы находим $y=x-2$ и подставляем в первое, получаем

$$x^2+(x-2)^2=34,\quad x^2+x^2-4x+4=34,$$

$$2x^2-4x-30=0,\quad x^2-2x-15=0.$$

Решая последнее уравнение, находим $x_1=-3$, $x_2=5$, откуда

$$y_1=-5,\ y_2=3,$$

Ответ: $(-3;-5)$; $(5;\ 3)$.

Сложнее обстоит дело в том случае, когда каждое из уравнений системы не является линейным. В этом случае общих рецептов нет. При решении таких систем надо проявить некоторую изобретательность.

Следующая задача предлагалась на вступительных экзаменах в МФТИ в 1976 году.

Пример 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=3x^2, \\ x+2y=3y^2. \end{cases}$$

Решение. Если выразить y из первого уравнения и подставить во второе, то получится уравнений 4-й степени относительно x. Поэтому изберём другой путь решения. Вычтем из первого уравнения второе, получим $x-y=3x^2-3y^2$, или

$$x-y=3(x-y)(x+y),$$

$$(x-y)(1-3x-3y)=0.$$

Возможны два случая:

а) $x-y=0$, $y=x$, из первого уравнения системы имеем:

$$2x+x=3x^2,\ 3x^2=3x,\ x_1=0,\ x_2=1,$$

$$y_1=0,\ y_2=1.$$

б) $1-3x-3y=0$, $y=\frac{1}{3}-x$, вновь подставляем в первое уравнение, получаем $2x+\frac{1}{3}-x=3x^2$, $3x^2-x-\frac{1}{3}=0$,

$$9x^2-3x-1=0,\ x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{9+36}}{18}=$$

$$=\frac{3\pm3\sqrt{5}}{18}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{6}.$$

Отсюда находим y_3 и y_4,:

$$y_3=\frac{1}{3}-\frac{1-\sqrt{5}}{6}=\frac{1+\sqrt{5}}{6};\ y_4=\frac{1-\sqrt{5}}{6}.$$

Проверка показывает, что все полученные значения $(x;y)$ являются решениями исходной системы.

Ответ: $(0;0)$; $(1;1)$; $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{6};\frac{1\mp\sqrt{5}}{6}\right)$.

Пример 18. (МФТИ, 1981). Решить

систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{5y-x}+x=3,\\ \sqrt{2y-x}=x+y=3.\end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases}\sqrt{5y-x}=3-x,\\ \sqrt{2y-x}=(3-x)-y.\end{cases}$$

Возведём обе части обоих уравнений системы в квадрат. Полученная система не будет равносильна данной, однако потери решений при этом не произойдёт, а могут лишь появиться посторонние значения, так что впоследствии придётся сделать проверку, подставив полученные значения во все уравнения исходной системы. Итак, имеем:

$$\begin{cases}5y-x=(3-x)^2,\\ 2y-x=(3-x)^2-2(3-x)y+y^2.\end{cases} \quad (5)$$

Вычтем из первого уравнения системы (5) второе, получим:

$$3y=2(3-x)y-y^2,$$

откуда:

а) $y=0$;

б) $3=6-2x-y,\ y=3-2x$.

В случае *а*) решений нет, т.к. подстановка в первое уравнение системы даёт: $-x=(3-x)^2$, или

$$-x=9-6x+x^2,$$

$$x^2+5x+9=0,\ D=25-36<0.$$

В случае *б*), делая ту же подстановку, получаем:

$$15-10x-x=9-6x+x^2,\ x^2+5x-6=0,$$

$$x_1=-6,\ x_2=1,\ y_1=15,\ y_2=1.$$

Проверка. Подставим значения $x_1=-6$ и $y_1=15$ в первое уравнение исходной системы, получим:

$$\sqrt{5\cdot15-(-6)}+(-6)=9-6=3 \text{ – верно.}$$

Подставим те же значения во второе уравнение исходной системы:

$$\sqrt{2\cdot15-(-6)}+(-6)+15=15\neq3.$$

Решение (–6; 15) – постороннее! Отметим ещё раз, что, производя проверку, необходимо подставить полученные значения во *все* уравнения системы.

Проверьте самостоятельно, что значение (1;1) является решением исходной системы.

Ответ: (1; 1).

Пример 19. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x^2y-xy^5=1,\\ x+3y^4=10x^2y^5.\end{cases}$$

Решение. Умножим обе части первого уравнения на $5y^4$ и сложим со вторым, получим:

$$10x^2y^5-5xy^9+x+3y^4=5y^4+10x^2y^5,$$

$$-5xy^9+x=2y^4,\ x\left(1-5y^9\right)=2y^4,$$

$$x=\frac{2y^4}{1-5y^9}.$$

Подставим найденное значение x в первое уравнение системы, получим:

$$\frac{8y^9}{\left(1-5y^9\right)^2}-\frac{2y^9}{1-5y^9}=1.$$

Обозначим $y^9=t$ и умножим обе части на $(1-5t)^2$:

$$8t-2t+10t^2=1-10t+25t^2,\ 15t^2-16t+1=0,$$

$$t_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-15}}{15}=\frac{8\pm7}{15},\ t_1=\frac{1}{15},\ t_2=1,$$

откуда

$$y_1=15^{-\frac{1}{9}},\ y_2=1,\ x_1=\frac{2\cdot15^{-\frac{4}{9}}}{1-\frac{1}{3}}=3\cdot15^{-\frac{4}{9}},$$

$$x_2=\frac{2}{1-5}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(3\cdot15^{-\frac{4}{9}};15^{-\frac{1}{9}}\right);\ \left(-\frac{1}{2};1\right).$