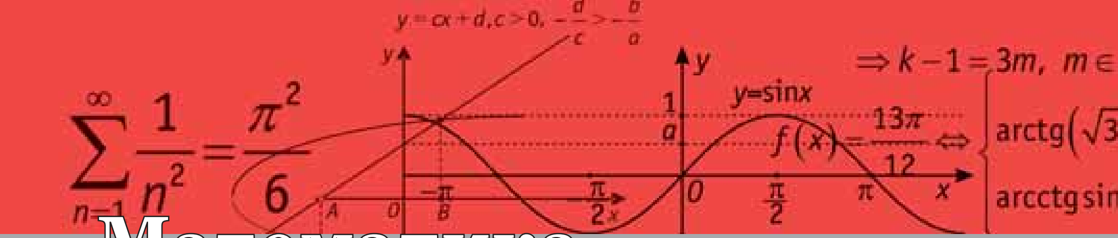


Епифанова Татьяна Николаевна
Учитель математики высшей категории старших классов ГОУ СОШ №1358 г. Москвы, отличник народного просвещения. Автор ряда методических статей в научно-теоретических и методических журналах.

Пропорциональные отрезки в треугольнике

Мы рассмотрим несколько решений одной важной задачи, которая является основой для решения многих задач и которая связана с ситуацией, когда в треугольнике заданы две чевианы.

Чевианой называется прямая, проходящая через вершину треугольника и точку, лежащую на противоположной стороне или её продолжении. Интерес представляют условия пересечения трех чевиан в одной точке. Ответ на этот вопрос даёт теорема Чевы.[1] Об этой теореме мы расскажем чуть позже, а вначале рассмотрим задачу о пересечении двух прямых, проходящих через вершины треугольника и точки противоположных сторон. Для краткости мы будем называть их чевианами.

Основная задача. В треугольнике ABC (рис. 1) проведены две чевианы AD и BE, которые пересекаются в точке O. Известно, что $BD{:}DC = r$, $CE{:}EA = s$. В каком отношении точка O делит данные чевианы?

Решение 1. (Применение теоремы Фалеса.) Для того чтобы найти, например, отношение $DO{:}OA$, проведём через точку D (которая определяет рассматриваемую чевиану AD) прямую DH, параллельную второй чевиане BE (рис. 2).

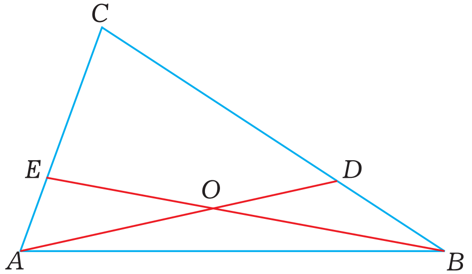


Рис. 1

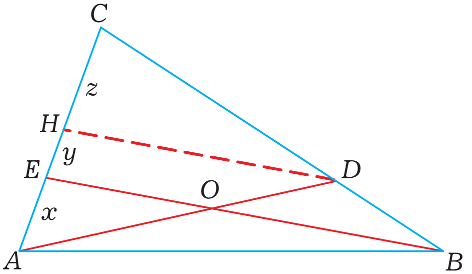


Рис. 2

[1] Джованни Чева (1648 – 1734) – итальянский математик. Занимался геометрией, механикой, экономикой.

Пусть $AE = x$, $EH = y$, $HC = z$. Из теоремы Фалеса (о пропорциональных отрезках) следует, что $\frac{DO}{OA} = \frac{y}{x}$. По условию задачи

$$\frac{y+z}{x} = s,$$

а по теореме Фалеса (рассматриваем $\angle BCA$, $BE \parallel DH$ и $\frac{BD}{DC} = r$) следует, что

$$\frac{y}{z} = r.$$

Из этой системы уравнений легко находим, что

$$\frac{OD}{OA} = \frac{y}{x} = \frac{sr}{r+1}.$$

Аналогично находим, что

$$\frac{OE}{OB} = \frac{1}{r(s+1)}.$$

Решение 2. (Рассмотрение подобных треугольников.)

Проведём через вершину A данного треугольника прямую, параллельную его стороне BC, и продолжим чевиану BE (рис. 3). Получим две пары подобных треугольников: AFE и CBE, AFO и DBO.

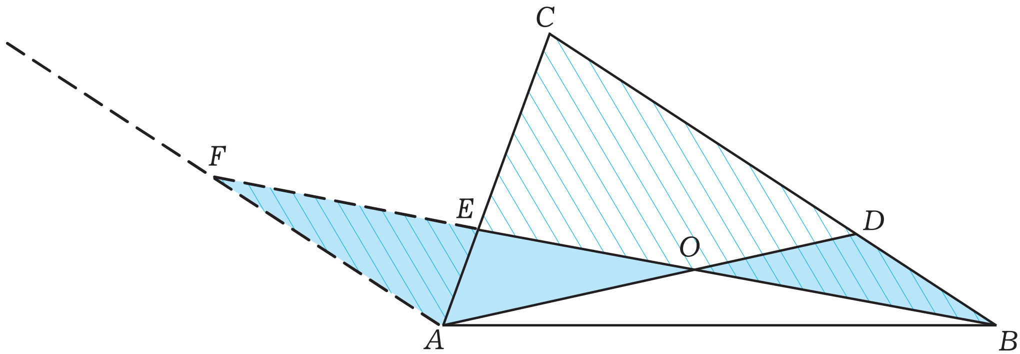
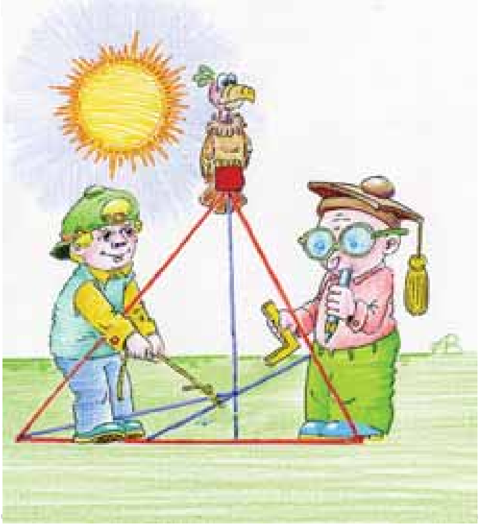


Рис. 3



Из свойств подобных треугольников заключаем, что

$$\frac{OD}{OA} = \frac{DB}{AF} \text{ и } \frac{EA}{EC} = \frac{AF}{CB}.$$

Перемножая эти два равенства и используя данные задачи, легко находим, что

$$\frac{OD}{OA} = \frac{sr}{r+1}.$$

Для того чтобы найти второе отношение $BO:OE$, нужно провести через вершину B прямую, параллельную стороне AC треугольника ABC. Найдите это отношение самостоятельно (ответ мы уже знаем).

Решение 3. (Сравнение площадей.) Проведем **третью чевиану** (содержащую точки O и C) и обозначим площади шести маленьких треугольников буквами x, y, z, u, v, w так, как показано на рис. 4.

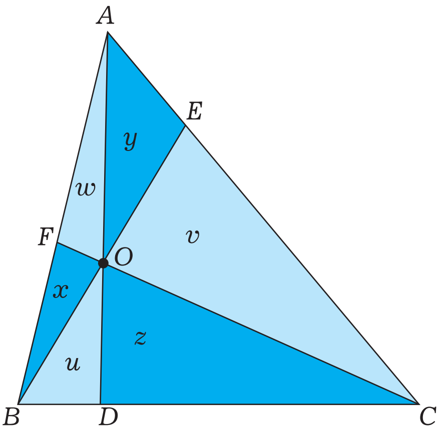


Рис. 4

Заметим, что треугольники BOD и ODC имеют общую высоту, проведённую из вершины O, тогда из основной формулы площади треугольника следует, что

$$S_{OBD} : S_{ODC} = S_{ABO} : S_{AOC},$$

то есть

$$\frac{u}{z} = \frac{x+w}{y+v}.$$

Аналогично рассуждая, заключаем, что числа x, y, z, u, v, w удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{u}{z} = \frac{x+w}{y+v}, \quad \frac{v}{y} = \frac{z+u}{x+w}, \quad \frac{w}{x} = \frac{y+v}{z+u}. \quad (*)$$

Так как

$$\frac{OD}{OA} = \frac{z}{y+v},$$

то нам нужно найти отношение

$$\frac{z}{y+v}.$$

Так как $u/z = r$, $v/y = s$ по условию задачи, то из первых двух уравнений системы (*) легко находим, что

$$\frac{z}{y+v} = \frac{u}{x+w} = \frac{uv}{y(z+u)} = \frac{s}{\left(\frac{z}{u}+1\right)} = \frac{rs}{r+1}.$$

Замечание 1. Запоминать формулы, полученные в решении основной задачи, не следует, разумно запомнить методы:

- решение по теореме Фалеса (дополнительное построение параллельного отрезка);
- использование подобия (дополнительное построение прямой, параллельной стороне треугольника);
- метод площадей (проведение третьей чевианы, разбивание треугольника на 6 маленьких треугольников).

Замечание 2. Если в решении 3 с чевианами, пересекающимися в одной точке, мы введём обозначения

$$BD : DC = r, \quad CE : EA = s, \quad AF : FB = t,$$

то перемножив все три равенства в системе (*), можно получить следующее утверждение: $rst = 1$.

В действительности мы получили следующее утверждение: если три чевианы, соединяющие вершины треугольника с точками противоположных сторон, пересекаются в одной точке, то имеет место равенство:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Это есть часть известной теоремы Чевы.

Теорема Чевы. Три чевианы, соединяющие вершины треугольника с точками противоположных сторон, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда имеет место равенство (рис. 5):

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1. \qquad (**)$$

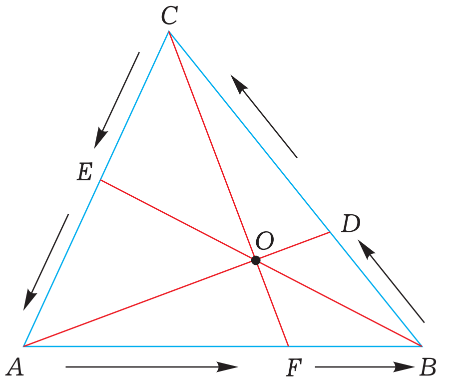
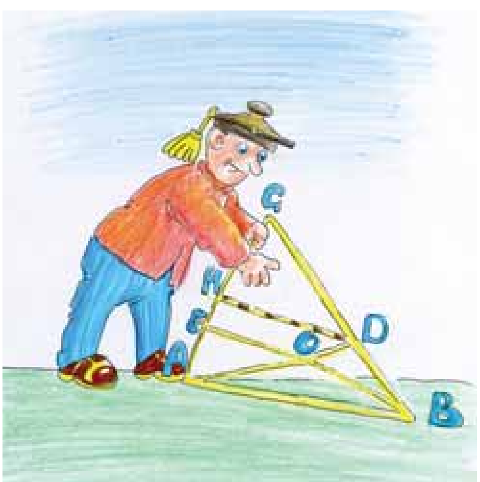


Рис. 5

Стрелки на рисунке помогут запомнить последовательность отрезков.

Обратное утверждение: если выполнено (**) для трёх точек D, E и F, лежащих соответственно на сторонах BC, CA и BA треугольника ABC, то три чевианы AD, BE и CF пересекаются в одной точке.



Доказательство обратного утверждения простое. Очевидно, что AD и BE пересекаются в одной точке O. Проведём прямую CO, пусть она пересекает сторону AB в точке F_1. Мы получили три чевианы, пересекающиеся в одной точке. И по доказанному имеет место равенство

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF_1}{F_1B}=1. \qquad (***)$$

Сравнивая (**) и (***), мы видим, что $\frac{AF}{FB}=\frac{AF_1}{F_1B}$, следовательно, F и F_1 совпадают, так как делят отрезок AB в одном и том же отношении.

Обратите внимание, что именно обратное утверждение чаще всего и используется в решении задач. Например, вы легко установите, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке, три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, три отрезка, соединяющие вершины треугольника и точки касания вписанной окружности противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

Подобные задачи решаются также с помощью теоремы Менелая. Напомним ее.

Теорема Менелая. Если точки A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах BC и AC треугольника ABC, а точка C_1 лежит на продолжении стороны AB (см. рис. 6), то эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

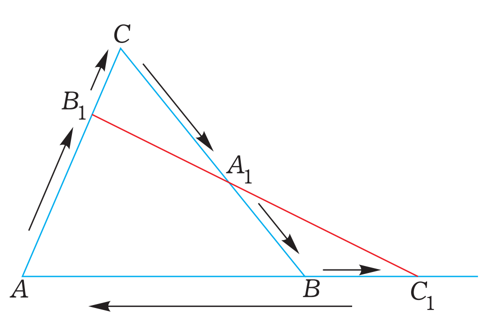


Рис. 6

Заметим, что её доказательство сводится к переформулировке той основной задачи, которую мы рассматриваем (более того, она ей эквивалентна), так как в треугольнике AC_1C на рис. 6 проведены две чевианы CB и C_1B_1, и мы умеем уже несколькими способами устанавливать нужное равенство.

Решение 4. (Применение теоремы Менелая.) Рассмотрим ΔCAD и секущую BE, которая содержит точку O (рис. 7). Применяем теорему Менелая, стартуя от точки C:

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DB}{BC}=1.$$

Отсюда

$$\frac{OD}{AO}=\frac{CE\cdot DB}{EA\cdot BC}=\frac{sy\cdot rx}{y(r+1)x}=\frac{sr}{r+1}.$$

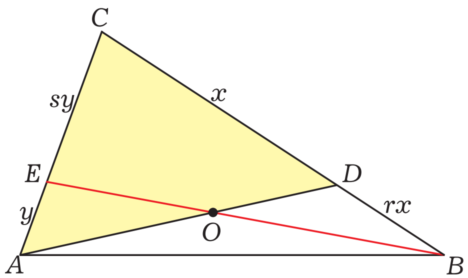


Рис. 7

Рассмотрим теперь ΔCBE и секущую DA, которая также содержит точку O (рис. 8.). Применяем теорему Менелая, стартуя от точки C:

$$\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{EA}{AC}=1.$$

Отсюда

$$\frac{OE}{BO}=\frac{CD\cdot EA}{DB\cdot AC}=\frac{x\cdot y}{rx(1+s)y}=\frac{1}{r(s+1)}.$$

Рассмотрим решение исходной задачи с конкретными числовыми отношениями.

Пусть $BD{:}DC = 2{:}7$, $CE{:}EA = 7{:}3$. Используя теорему Менелая, определим, в каком отношении точка O делит чевианы AD и BE (рис. 1).

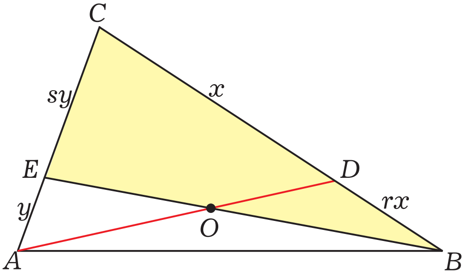


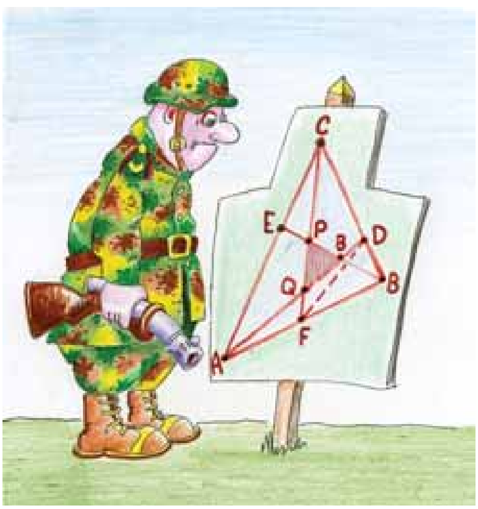
Рис. 8

Как мы уже видели,

$$\frac{OD}{AO}=\frac{CE\cdot DB}{EA\cdot BC}=\frac{7\cdot 2}{3(7+2)}=\frac{14}{27} \text{ и}$$

$$\frac{OE}{BO}=\frac{CD\cdot EA}{DB\cdot AC}=\frac{7\cdot 3}{2(3+7)}=\frac{21}{20}.$$

Рассмотрим ещё одно решение задачи, характеризующееся лаконичностью и изящностью.



Решение 5. (Применение метода масс.) Разместим точечные массы в вершинах треугольника ABC: $m_B=1$, $m_C=r$, $m_A=rs$. Тогда по архимедовскому закону рычага точка D является центром тяжести двух масс $m_B=1$ и $m_C=r$, а точка E – центром тяжести масс $m_C=r$ и $m_A=rs$.

Сосредоточим в точке D массу $m_D=1+r$. Тогда центр тяжести системы точечных масс $m_B = 1$, $m_C = r$, $m_A = rs$ будет находиться в такой точке, что $rs \cdot AO = (1 + r)OD$.

Обдумайте самостоятельно тот факт, что центр тяжести рассматриваемой системы материальных точек находится в точке пересечения чевиан AD и BE.

Предложим несколько задач, для решения которых можно использовать любой из пяти изложенных методов решений основной задачи.

Задача 1. Докажите теорему Менелая.

Задача 2. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D такая, что $BD:DC = 2:7$, а на стороне AC выбраны точки E и K так, что отрезки AD и BE пересекаются в точке M, а отрезки AD и BK – в точке N, $BM:ME = 7:4$, $BN:NK = 1:3$. Найти $AE:KC$.

Ответ. 8:7.

Задача 3. В ΔKMP на стороне KP взята точка A таким образом, что $KA:AP = 1:3$, а на стороне PM – точка B, причём отрезки KB и MA пересекаются в точке C и $PB:BM = 4:1$. Найти отношение площадей треугольников KCM и KPM.

Ответ. $S_{KCM} : S_{KPM} = 1 : 8$.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Посочувствовал

Человек читает газету и узнаёт, что в Лос-Анджелесе каждый час под автомашину попадает один человек.

– Боже, – вздыхает он, – вот не везёт бедняге.

«Юморист»

Придя из школы домой, мальчик поздравил родителей с Новым годом.

– Ты что, сынок? Сегодня же только 30 мая!

– А меня на второй год оставили.

«Чудеса» славы

Великий Менделеев любил в свободное время делать… чемоданы. Однажды, когда он приобретал в магазине необходимые ему материалы, один из покупателей, увидев его необычную внешность (у него были длинные волосы), поинтересовался:

– Кто это такой?

– О! Это человек очень известный, – сказал хозяин магазина. – Его все знают – прекрасный чемоданных дел мастер господин Менделеев.