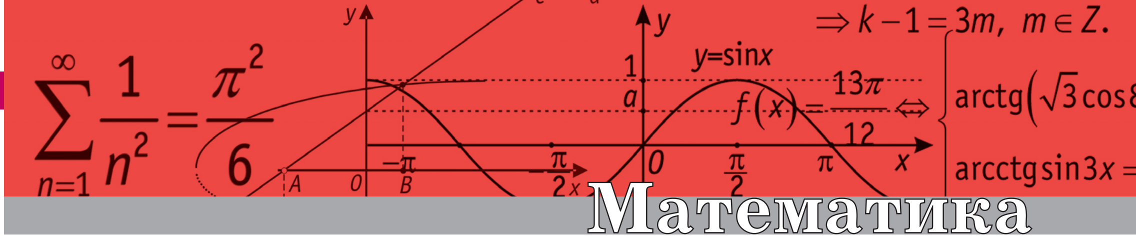

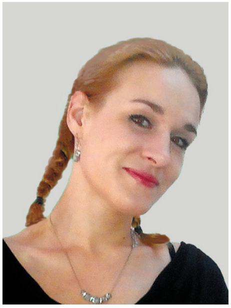

Лупашевская Василиса Юрьевна
Учитель математики
ГБОУ «Школа №2070» г. Москвы.

Повторение пройденного

В конце нового учебного года принято повторять пройденный ранее материал, тем более, если вскоре предстоят серьёзные экзамены. Знакомство с наиболее интересными планиметрическими задачами, похожими на те, что предлагались прошлым летом в вариантах ГИА и ЕГЭ, поможет в этом. Кроме того, читатели получат представление о современных требованиях, предъявляемых к выпускникам 9-х и 11-х классов по геометрии.

Начнём с разбора четырёх задач из вариантов ГИА 2014 года.

1. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 8:5, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 20.

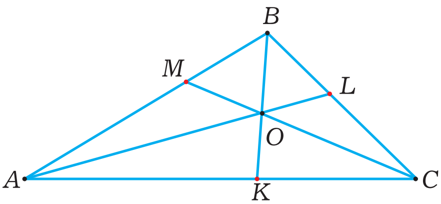

Рис. 1

Решение. Пусть $BC = 20$, а биссектрисы AL, BK и CM пересекаются в точке O (рис. 1), причём $\frac{AO}{OL} = \frac{8}{5}$. Сначала вспомним одно важнейшее свойство биссектрисы: биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Так как BO и CO являются биссектрисами в треугольниках ABL и ACL соответственно, имеют место соотношения:

$$\frac{AO}{OL} = \frac{8}{5} = \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{LC}.$$

Отсюда получаем, что

$$AB = \frac{8}{5}BL \text{ и } AC = \frac{8}{5}CL,$$

поэтому

$$AB + AC = \frac{8}{5}(BL + LC) = \frac{8}{5}BC = 32.$$

Тогда периметр треугольника ABC равен 52.

Перед тем как перейти к следующей задаче, напомним две формулы для вычисления длины биссектрисы AL. Хотя сейчас мы их и не использовали, знать их необходимо:

$$AL = \frac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle(A/2)}{AB + AC},$$

и ещё

$$AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot LC.$$

2. На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A, C и

D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 38$, $BC = 34$ и $CD = 19$.

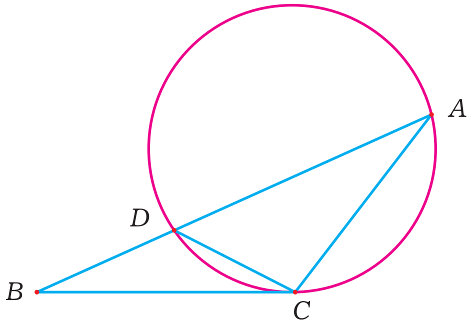

Рис. 2

Решение. Треугольники ABC и CBD подобны по двум углам: $\angle ABC$ у них общий, а вписанный $\angle CAD$ и $\angle DCB$ между касательной и хордой равны половине дуги CD (рис. 2). Из подобия следует, что

$$AB/BC = AC/DC = BC/BD.$$

Из первого равенства находим, что $AB = 68$, а из второго, что $BD = 17$, поэтому

$$AD = AB - BD = 51.$$

Заметим, что совершенно аналогичная задача предлагалась в 2007 году в МГУ на олимпиаде «Ломоносов».

3. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 7$ и $MB = 9$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Решение. В треугольнике ABC отрезок CM – биссектриса (рис. 3), поэтому из того, что $AM = 7$ и $MB = 9$, мы узнаём не только длину отрезка AB, но и то, что

$$\frac{AC}{BC} = \frac{7}{9}.$$

Далее действуем, как в предыдущей задаче:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{9}{7} = \frac{DC}{AD},$$

или:

$$\frac{AD+16}{DC} = \frac{9}{7} = \frac{DC}{AD}.$$

Отсюда находим, что $DC = 31{,}5$, а $AD = 24{,}5$.

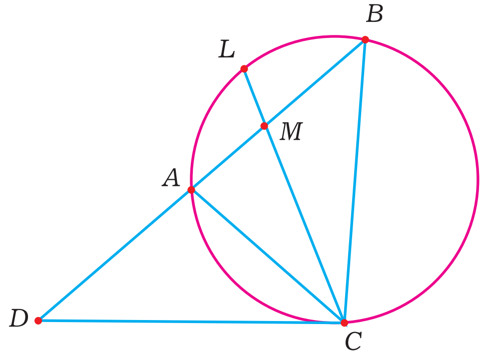

Рис. 3

Замечание. На чертеже биссектриса CM продлена до пересечения с окружностью в точке L. О том, что эта точка делит дугу AB пополам, полезно помнить, строя подобные чертежи.

4. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена окружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 85$, $MD = 68$, H – точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Решение. Пусть окружность пересекает стороны AB и AC в точках N и K соответственно (рис. 4). Тогда $\angle BNC = \angle BKC = 90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр. Следовательно, CN, BK и AD – высоты треугольника ABC, пересекающиеся в точке H.

Понятно, чтобы найти AH, надо искать HD, так как $AH = AD - HD$. Но как использовать MD? В прямоугольном треугольнике BMC MD – это высота, опущенная на гипотенузу BC. Следовательно (из подобия треугольников BDM и MDC),

$$MD^2 = BD \cdot DC = 68^2.$$

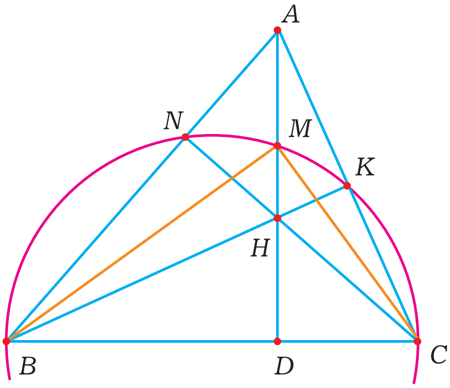

Рис. 4

Так как $\angle KBC = \angle DAC$ и $\angle NCB = \angle DAB$, на чертеже очень много подобных треугольников. Рассмотрим подобные треугольники *HDB* и *CDA*, см. рис. 5 (с таким же успехом можно работать с треугольниками *HDC* и *BDA*).

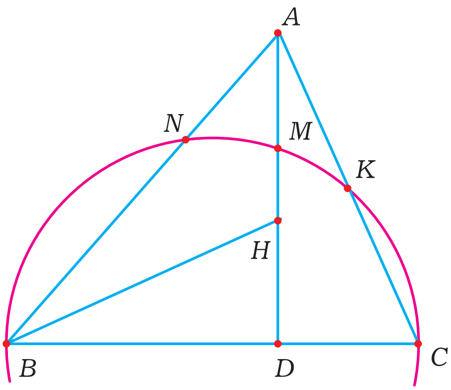

Рис. 5

Из подобия получаем

$$\frac{HD}{DC} = \frac{BD}{AD},$$

откуда следует, что

$$HD = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{4624}{85} = 54{,}4,$$

$$AH = AD - HD = 85 - 54{,}4 = 30{,}6.$$

Переходим к рассмотрению задач С4 из вариантов ЕГЭ 2014 года. Надо отметить, что по сравнению с четырьмя предыдущими годами произошли важные изменения. Если раньше характерной особенностью планиметрических задач из вариантов ЕГЭ было то, что требовалось рассмотреть несколько случаев (как правило, два), что приводило к нескольким разным ответам, то теперь от этого отказались. Кроме того, в задаче надо ответить на два вопроса, причём первый вопрос не только легче, чем второй, но и служит своего рода подсказкой для ответа на второй вопрос.

5. Высоты *BM* и *CN* остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*.

а) Докажите, что $\angle AHM = \angle ACB$.

б) Найдите *BC*, если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30°$.

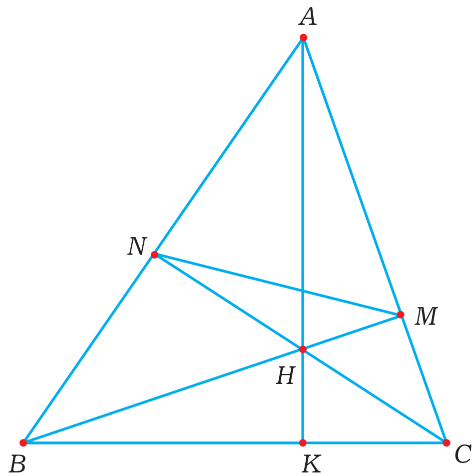

Рис. 6

Решение. У прямоугольных треугольников *CKA* и *HMA* острый угол при вершине *A* – общий (рис. 6), следовательно, равны и вторые острые углы: $\angle AHM = \angle ACB$. Осталось найти *BC*.

Так как $\angle HNA = \angle HMA = 90°$, четырёхугольник *AMHN* вписан в окружность, причём *AH* – её диаметр. Это позволяет нам сразу найти $MN = AH \cdot \sin\angle NAM = 10{,}5$. Теперь докажем, что треугольники *MAN* и *BAC* подобны по двум углам, причём коэффициент подобия равен $\cos\angle BAC$. Действительно, у этих треугольников общий угол при вершине A, $\angle ANM = \angle AHM$ как опирающиеся на одну дугу AM, а $\angle AHM = \angle ACB$ по доказанному. Следовательно,

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \cos\angle BAC.$$

Откуда

$$BC = \frac{MN}{\cos\angle BAC} = 7\sqrt{3}.$$

6. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4.

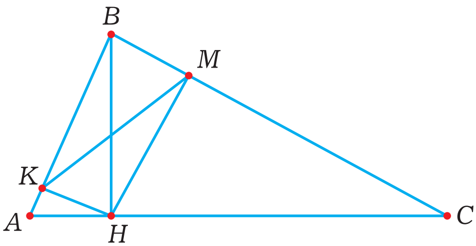

Рис. 7

Решение. Так как

$$\angle HKB = \angle HMB = 90^{\circ},$$

четырёхугольник $BKHM$ вписан в окружность, причём BH – её диаметр. Это поможет доказать подобие треугольников BMK и BAC (рис. 7). $\angle BMK = \angle BHK$, так как они опираются на общую дугу BK. Но $\angle BHK = \angle BAH$, следовательно, $\angle BMK = \angle BAC$. Ещё у треугольников BMK и BAC общий угол при вершине B, следовательно, треугольники подобны по двум углам. А коэффициент подобия равен отношению радиусов описанных окружностей – двух линейных сходственных элементов, то есть четырём. Тогда

$$S_{ABC} = 16 \cdot S_{MBK},$$

$$S_{AKMC} = S_{ABC} - S_{MBK} = 15 \cdot S_{MBK},$$

следовательно, отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$ равно 1/15.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AL, пересекает сторону AC в точке M; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок ML пополам.

б) Пусть P – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP : PL$.

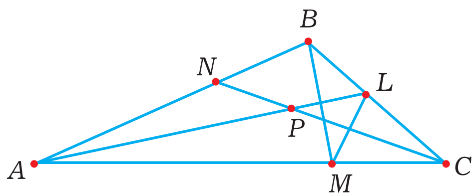

Рис. 8

Решение. Совсем простая задача! По свойству биссектрисы

$$\frac{CL}{LB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2},$$

следовательно, $LC = 3$. В треугольнике ABM биссектриса AL также является и высотой, следовательно, $AM = AB = 6$. Но тогда $MC = 3 = LC$, и в равнобедренном треугольнике MCL биссектриса CN также является и медианой к стороне ML.

Осталось найти отношение $\dfrac{AP}{PL}$. В треугольнике ACL биссектриса CP делит противолежащую сторону AL на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\dfrac{AP}{PL} = \dfrac{AC}{CL} = 3.$

В двух следующих задачах надо будет доказывать, что некоторые четыре точки (например, A, B, C и D на рис. 9) лежат на одной окружности. Как правило, для этого надо установить, что выполняется одно из двух условий: или

$$\angle BCD + \angle BAD = 180°$$

(для диагонали BD), или $\angle BCA = \angle BDA$ (для стороны AB).

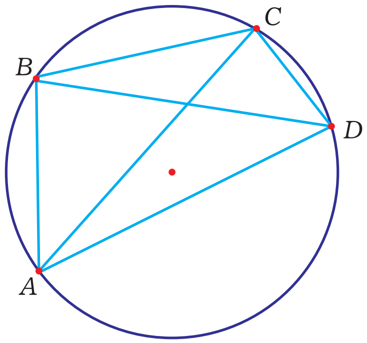

Рис. 9

8. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если

$$\cos\angle BAC = \frac{3}{5}, \text{ а } BC = 48.$$

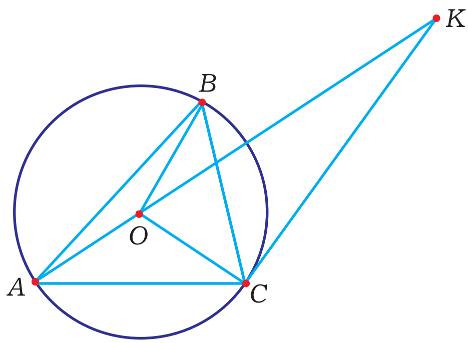

Рис. 10

Решение. Пусть вписанный $\angle BAC = \alpha$, тогда центральный $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle AKC = 90° - \alpha$ (рис. 10). Треугольник BOC – равнобедренный, поэтому

$$\angle OBC = \angle OCB = 90° - \alpha = \angle AKC.$$

Получается, что $\angle OBC = \angle OKC$, следовательно, четырёхугольник $OBKC$ – вписанный.

Окружность, описанная около четырёхугольника $OBKC$, – это окружность, описанная около треугольника OBC, поэтому

$$BC = 2R \cdot \sin\angle BOC = 2R \cdot \sin 2\alpha.$$

Вычислив синус двойного угла, находим R:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25};$$

$$R = 25.$$

Возможно, что эта задача первоначально готовилась для девятиклассников, ещё не знакомых с формулой синуса двойного угла. В авторском решении сначала находят $OC = 30$, а затем используют соотношение

$$OC = 2R \cdot \sin\angle OKC =$$
$$= 2R \cdot \sin(90° - \alpha) = 2R \cdot \cos\alpha.$$

9. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты AC и BC опустили перпендикуляры HK и HE соответственно.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$, $CH = 7$.

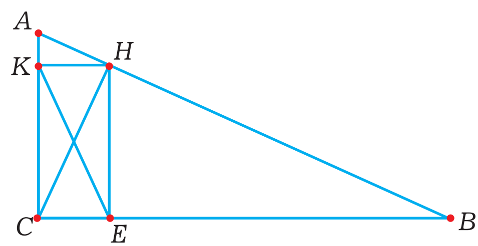

Рис. 11

Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle CAB = 90° - \alpha$ (рис. 11). Следовательно, $\angle ACH = \alpha$ как второй острый угол прямоугольного треугольника AHC. В прямоугольнике $CKHE$ $\angle EKC = \angle ACH = \alpha$, поэтому в четырёхугольнике $ABEK$

$$\angle AKE = 180° - \angle EKC = 180° - \alpha.$$

Получается, что

$$\angle AKE + \angle ABE = 180°,$$

а это – сумма двух противоположных углов четырёхугольника $ABEK$. Следовательно, четырёхугольник вписан в окружность. Найдём её радиус. Так как треугольник ABE вписан в ту же окружность, его сторона $AE = 2R \cdot \sin\angle ABE = 2R \cdot \sin\alpha$. Длину AE найдём как длину гипотенузы прямоугольного треугольника ACE. Так как $AC = AB \cdot \sin\alpha$, а $CE = CH \cdot \sin\alpha$ (из треугольника HEC), по теореме Пифагора получаем, что $AE = 25 \cdot \sin\alpha$. Тогда $2R \cdot \sin\alpha = 25 \cdot \sin\alpha$ и $R = 12{,}5$.

В большинстве задач, которые ниже предлагаются вам для самостоятельного решения, очень важно установить подобие некоторых треугольников. Условия задач 11 и 17 «осовременены», в них добавлен вопрос, подсказывающий, подобие каких именно треугольников надо установить.

10. (ЗФТШ) На катете прямоугольного треугольника, как на диаметре, построена окружность. Оказалось, что она делит его гипотенузу в отношении 1:3. Найдите углы треугольника.

11. (Биофак МГУ, 1997) В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведённая через точки M, N и C, касается стороны AB, а её радиус равен $\sqrt{2}$. Длина стороны AC равна 2. Докажите, что треугольники AMC и CNM подобны, и найдите синус угла $\angle ACB$.

12. (Физфак МГУ, 1996) В остроугольном треугольнике BCD проведена высота CE и из точки E опущены перпендикуляры EM и EN на стороны BC и CD соответственно. Известно, что $CE = b$, $MN = a$. Найти угол $\angle BCD$.

13. (Физфак МГУ, 1996) В равнобедренном треугольнике BCD ($BC = CD$) проведена биссектриса BE. Известно, что $CE = c$, $DE = d$. Найдите BE.

14. (ЕГЭ-2014) Диагональ AC разбивает трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, из которых AD большее, на два подобных треугольника. Докажите, что $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если известно, что $BC = 18$, $AD = 50$ и $\cos\angle ACD = 0{,}6$.

15. (ДВИ МГУ, 2013) В треугольнике ABC проведены медианы AE и BD. Известно, что $\angle BAE = \angle DBC$, причём их косинусы равны $\sqrt{2/3}$. Найдите BC, если $AB = 1$.

16. (Факультет психологии МГУ, 2002) На катете ML прямоугольного треугольника KLM, как на диаметре, построена окружность. Она пересекает сторону KL в точке P. На стороне KM взята точка R так, что отрезок LR пересекает окружность в точке Q, причём отрезки QP и ML параллельны, $KP = 2RM$ и $ML = 8\sqrt{3}$. Найдите MQ.

17. (Мехмат МГУ, 2003) На продолжении за точку A биссектрисы AL треугольника ABC взята такая точка D, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Докажите подобие треугольников ABD и ADC и найдите площадь треугольника ABC. Какова наименьшая площадь треугольника BCD при данных условиях?

18. (Физфак МГУ, 2000) Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P. Найдите отношение $AP : BC$, если $AB : BC = 2 : 3$.