Лупашевская Василиса Юрьевна
Учитель математики ГБОУ «Школа №218» г. Москвы.

Полезные наблюдения за радикалами

В условиях задач, рассмотренных в этой статье, обязательно присутствуют суммы радикалов (квадратных корней). В вариантах ЕГЭ и современных олимпиад для выпускников задачи с радикалами таят в себе, как правило, нестандартные особенности, избавление от радикалов в них или затруднено, или не решает всех проблем.

> «Иррациональные уравнения довольно часто становятся "камнем преткновения" на вступительных экзаменах».
>
> *А.Егоров, Ж.Раббот* [1]

Этими словами начинается обзорная статья 2001 года, не потерявшая актуальности и в эпоху ЕГЭ. Вот пять свежих примеров на заявленную нами тему:

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}+1.$$

(«Ломоносов», 2017).

2. Вычислите $\sqrt{n+436}+\sqrt{n}$, если известно, что это число рациональное и что n – натуральное. («Ломоносов», 2017).

3. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-9)^2+y^2}$$

при условии, что $|x|+3|y|=6$. («ПВГ», 2016).

4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{157+\log_a^2\cos\frac{x}{a}-\log_a\cos^{12}\frac{x}{a}}+$$

$$+\sqrt{29+\log_a^2\sin\frac{x}{a}+\log_a\sin^4\frac{x}{a}}+$$

$$+\sqrt{45+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}-\log_a\operatorname{tg}^6\frac{x}{a}}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается. (ДВИ МГУ, 2016).

В задачах с радикалами нередко используется тождество

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b.$$

В задачах **1** и **2** без него не обойтись!

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}+1.$$

(«Ломоносов», 2017).

Здесь удобнее всего действовать, так: умножив обе части уравнения на $\sqrt{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=z$, мы получим квадратное уравнение $z^2=6+z$. Но есть ещё два способа решения (возможно, что они предпочтительнее для аналогичных задач из трёх других вариантов данной олимпиады). Так, если умножить обе части уравнения на $\sqrt{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}=t$, то мы получим квадратное уравнение $2\sqrt{3}=\sqrt{3}t^2+t$.

А можно, используя то, что $\sqrt{3}=\dfrac{zt}{2}$, записать исходное уравнение в виде $z=\dfrac{zt^2}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}zt$. Решая любое из этих трёх уравнений, мы найдём, что $z=2\sqrt{3}$, или то, что $t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, а затем вычислим $x=\dfrac{745}{36}$.

Ответ. $\dfrac{745}{36}$.

2. Вычислите $\sqrt{n+436}+\sqrt{n}$, если известно, что это число рациональное и что n – натуральное. («Ломоносов», 2017).

Пусть $k=\sqrt{n+436}+\sqrt{n}$. По условию k – рациональное число. Покажем, что это число – натуральное. Так как

$$k\left(\sqrt{n+436}-\sqrt{n}\right)=$$
$$=\left(\sqrt{n+436}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+436}-\sqrt{n}\right)=436,$$

число $\sqrt{n+436}-\sqrt{n}$ тоже рациональное. Но тогда рациональными числами являются и $\sqrt{n+436}$, и $\sqrt{n}$. А так как известно, что корень из натурального числа – это либо иррациональное число, либо натуральное (он не может быть несократимой дробью), то оба эти числа – натуральные.

Так как $436=2^2\cdot 109$, а 109 – простое число, то вариантов немного. Учитывая, что

$$k=\sqrt{n+436}+\sqrt{n}>\sqrt{437}+1,$$

вариантов всего три: $k=109$, $k=218$ и $k=436$. Убеждаемся, что ответ единственный: $k=218$; $n=108^2$.

Ответ. 218.

Задачи **3** и **4** – это задачи на тему «**Ломаная линия и отрезок**». Что это такое, вы поймёте, разобрав решения двух следующих задач **A** и **B**.

A. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-6)^2+36}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-6)^2+9}.$$

(Олимпиада «ПВГ», 2005).

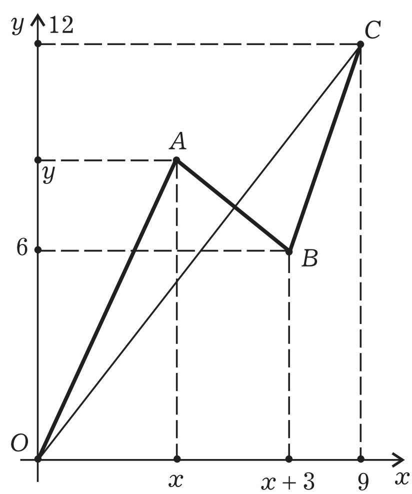

Рис. 1

Переставим слагаемые в данном выражении:
$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{9+(y-6)^2}+\sqrt{(x-6)^2+36}.$

Данное выражение – это сумма расстояний $OA+AB+BC$ между четырьмя точками: $O(0;0)$, $A(x;y)$, $B(x+3;6)$ и $C(9;12)$, причём

$$OA=\sqrt{x^2+y^2},\ AB=\sqrt{9+(y-6)^2},$$
$$BC=\sqrt{(x-6)^2+36}.$$

Эта сумма не превосходит длины отрезка $OC=15$ (рис. 1). Минимум достигается, если $x=1{,}5$ и $y=2$. В этом случае точки A и B принадлежат отрезку OC.

Ответ. 15.

В. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2}=|a|\sqrt{10},\\ y=ax+a^2-9\end{cases}$$

имеет более одного решения (ЕГЭ – 2011).

В первую очередь убеждаемся, что если $a=0$, то система вообще не имеет решений.

Пусть $a\neq 0$. Рассмотрим на плоскости три точки: $O(0;0)$, $A(x;y)$, $B(a;-3a)$. Расстояния между ними соответственно равны:

$$OA=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$AB=\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2},$$

причём $OB=|a|\sqrt{10}$. Согласно первому уравнению системы получается, что $OA+AB=OB$, а это возможно лишь в том случае, когда точка $A(x;y)$ принадлежит отрезку OB, иначе нарушается неравенство треугольника. Следовательно, решением первого уравнения является любая точка отрезка OB. Чтобы система имела более одного решения, отрезок OB должен лежать на прямой $y=ax+a^2-9$. Так как отрезок OB принадлежит прямой $y=-3x$, прямая $y=ax+a^2-9$ должна с ней совпадать. Это реализуется, если $a=-3$.

Ответ. –3.

Теперь нам будет легче покорять «*Воробьёвы горы*».

3. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-9)^2+y^2}$$

при условии, что $|x|+3|y|=6$. (Олимпиада «ПВГ», 2016).

Уравнение $|x|+3|y|=6$ задаёт ромб $ABCD$, сторонам которого принадлежит точка $R(x;y)$.

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-9)^2+y^2}=$$
$$=MR+RN,\text{ где } M(0;\ 3) \text{ и } N(9;0).$$

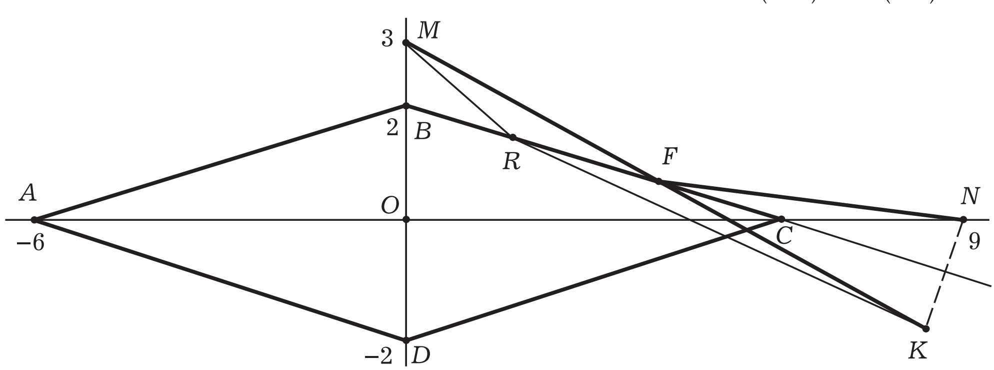

Рис. 2

Пусть точка F принадлежит отрезку BC и равноудалена от точек $M(0;3)$ и $N(9;0)$, а точка K симметрична точке $N(9;0)$ относительно прямой BC.

На рисунке 2 показано, что $MR+RN=MR+RK\geq MF+FK=MF+FN$. Следовательно, наименьшее значение выражения, приведённого в условии задачи, достигается для координат точки F. Проделав не очень сложную техническую работу, вы найдёте и сами координаты точки $F=F\left(\frac{21}{5};\frac{3}{5}\right)$, и наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-9)^2+y^2}$$

$$=MF+FN=\sqrt{\frac{117}{5}}.$$

Но не всегда реализация знакомой идеи проходит так гладко. При размышлении над двумя следующими задачами могут даже возникнуть сомнения, а не на другую ли они тему?

C. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2+(x-y)^2}+\sqrt{2+(y-z)^2}+$$
$$+\sqrt{2+(2-z)^2}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $A(0;\ 0)$, $B\left(\sqrt{2};\ x\right)$, $C\left(2\sqrt{2};\, y\right)$, $D\left(3\sqrt{2};\, z\right)$, $E\left(4\sqrt{2};\, 2\right)$. Тогда $AB+BC+CD+DE\geq AE=6$. Минимум достигается, если $x=\frac{1}{2}$, $y=1$ и $z=\frac{3}{2}$. В этом случае точки B, C и D принадлежат отрезку AE.

Ответ. 6.

D. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+(3-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-z)^2}+$$
$$+\sqrt{z^2+(3-t)^2}+\sqrt{t^2+(2-x)^2}\ \text{(СУНЦ).}$$

Для удобства переставим слагаемые в двух подкоренных выражениях:

$$\sqrt{x^2+(3-y)^2}+\sqrt{(1-z)^2+y^2}+$$
$$+\sqrt{z^2+(3-t)^2}+\sqrt{(2-x)^2+t^2}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $A(0;3)$, $B(x;y)$, $C(1+x-z;0)$, $D(1+x;t-3)$ и $E(3;-3)$. Тогда $AB+BC+CD+DE\geq AE=3\sqrt{5}$. Минимум достигается в случае, если точки B, C и D принадлежат отрезку AE. Решений много. Например: $\left(\frac{5}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{2}\right)$, или $\left(\frac{3}{4};\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$, или $\left(1;\ 1;\ \frac{1}{2};\ 2\right)$.

Ответ. $3\sqrt{5}$.

Возвращаемся к решению примера **4**.

4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{157+\log_a^2\cos\frac{x}{a}-\log_a\cos^{12}\frac{x}{a}}+$$
$$+\sqrt{29+\log_a^2\sin\frac{x}{a}+\log_a\sin^4\frac{x}{a}}+$$
$$+\sqrt{45+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}-\log_a\operatorname{tg}^6\frac{x}{a}}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается. (ДВИ МГУ, 2016).

Здесь должны выполняться ограничения $\begin{cases}\sin\frac{x}{a}>0\\ \cos\frac{x}{a}>0\end{cases}$. В этом случае $\operatorname{tg}\frac{x}{a}>0$ также будет определён. Обозначим $\log_a\sin\frac{x}{a}=z$, $\log_a\cos\frac{x}{a}=t$, тогда $\log_a\operatorname{tg}\frac{x}{a}=z-t$.

В этих переменных исследуемое выражение приобретает менее пугающий вид:

$$f(z,t)=\sqrt{157+t^2-12t}+\sqrt{29+z^2+4z}+$$
$$+\sqrt{45+(z-t)^2-6(z-t)}.$$

Выделяя полные квадраты, получаем

$$f(z,t)=\sqrt{(t-6)^2+11^2}+\sqrt{(z+2)^2+5^2}+$$

$+\sqrt{(z-t-3)^2+6^2}$. Для нахождения наименьшего значения этого выражения мы опять применим идею *уравнения отрезка*, теперь нам очень хорошо знакомую. Переставив слагаемые, получим

$$f(z,t)=\sqrt{(t-6)^2+11^2}+$$
$$+\sqrt{(z-t-3)^2+6^2}+\sqrt{(z+2)^2+5^2}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости четыре точки: $A(0;0)$, $B(t-6;11)$, $C(z-9;\ 17)$ и $D(-11;\ 22)$. Функция $f(z,t)$ – это длина ломанной $ABCD$, причём

$$AB=\sqrt{(t-6)^2+11^2},$$
$$BC=\sqrt{(z-t-3)^2+6^2},\ CD=\sqrt{(z+2)^2+5^2}.$$

Так как $AB+BC+CD\ge AD=11\sqrt{5}$, наименьшее значение функции $f(z,t)=11\sqrt{5}$ будет достигнуто, если точки $B(t-6;\ 11)$ и $C(z-9;\ 17)$ будут принадлежать отрезку AD, причём точка B будет располагаться между точками A и C. Это выполнится, если

$$\begin{cases}\dfrac{t-6}{-11}=\dfrac{11}{22},\\ \dfrac{z-9}{-11}=\dfrac{17}{22}\end{cases}\Leftrightarrow t=z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{x}{a}=\sin\frac{x}{a}=\sqrt{a}.$$

Следовательно, $a=\dfrac{1}{2}$ и $2x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$. Решить конкретно эту задачу в 2016 году на экзамене было невозможно, так как в условии была опечатка: в последнем подкоренном выражении вместо 45 было 47.

Ответ. $11\sqrt{5}$, $a=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in Z$.

Много интересных задач с суммами радикалов (и не только таких) можно найти в замечательных статьях В.В. Мирошина [2] и В.В. Вавилова [3]. Так как составители современных вариантов нередко используют яркие идеи задач вступительных экзаменов недавнего прошлого, знакомство хотя бы с некоторыми из них очень полезно.

E. Найдите все целочисленные пары (x,y), удовлетворяющие уравнению
$$\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}.$$
(Химфак МГУ, 2005).

Заметим, что сумма всех трёх подкоренных выражений (трёх целых неотрицательных чисел) равна 3. Но ни одно из них не может равняться нулю, так как, предположив обратное, мы придём к соотношению $\sqrt{0}+\sqrt{2}=2\sqrt{1}$. Следовательно, все они равны по 1!

$$\begin{cases}2x-y-3=m\ge0,\\ 2y-x+3=n\ge0,\\ 3-x-y=k\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+n+k=3,\\ \sqrt{m}+\sqrt{n}=2\sqrt{k}\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m=n=k=1.$$

Далее: $\begin{cases}2x-y-3=1,\\ 3-x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=0.\end{cases}$

Ответ: $(2;\ 0)$.

F. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{2x+3y-6z+3}}+\frac{2}{\sqrt{3x-5y+2z-2}}+$$
$$+\frac{3}{\sqrt{2y+4z-5x+2}}>z^2-9z+23.$$

(Мехмат МГУ, 1990).

Все три подкоренных выражения должны быть положительными, а так как x, y и z – целые числа, то не просто положительными, а натуральными. Но сумма этих подкоренных выражений равна 3, следовательно, все они равны по 1. В результате, наша задача сводится к нахождению целочисленных решений системы

$$\begin{cases} z^2-9z+17<0, \\ 2x+3y-6z+3=1, \\ 3x-5y+2z-2=1. \end{cases}$$

Квадратному неравенству удовлетворяют четыре целых значения z – это 3, 4, 5, 6. Решая при этих значениях систему $\begin{cases} 2x+3y=6z-2, \\ 3x-5y=-2z+3, \end{cases}$

убеждаемся, что только при $z=4$ числа x и y окажутся целыми.

Ответ. $x=5$; $y=4$; $z=4$.

G. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)}+\sqrt{(7-y)(1-x)}+$$
$$+\sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x\in[-2;3]$ и $y\in[0;11]$. (МГУ, 2007).

В двух рассмотренных выше задачах мы рассматривали суммы неотрицательных подкоренных выражений. А здесь – перемножим:

$$\times\begin{cases} (x-y)(y-7)\geq 0, \\ (x-1)(y-x)\geq 0, \Rightarrow \\ (7-y)(1-x)\geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -(x-1)^2(x-y)^2(y-7)^2\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ y=7, \\ x=y. \end{array}\right.$$

Разберём эти случаи. Обозначим исследуемое выражение как $f(x,y)$. Для $x=1$ и $y\in[0;\ 11]$ имеем

$$f(x,y)=\sqrt{(1-y)(y-7)}=\sqrt{9-(y-4)^2}\leq 3;$$

здесь $f_{\max}=f(1;\ 4)=3$.

При $y=7$ и $x\in[-2;\ 3]$ имеем

$$f(x,y)=\sqrt{(x-1)(7-x)}=$$
$$=\sqrt{9-(x-4)^2}\leq f(3;7)=\sqrt{8}<3.$$

Если же $x=y$, то

$$x=y\in[-2;3]\cap[0;11]=[0;3].$$

С учётом того, что в этом случае

$$f(x,y)=\sqrt{(7-y)(1-x)}=$$
$$=\sqrt{(7-x)(1-x)}=\sqrt{(x-1)(x-7)},$$

получаем, что $x=y\in[0;1]$.

На этом отрезке

$$0\leq f(x,y)\leq f(0;0)=\sqrt{7}<f(1;4)=3.$$

Следовательно, $f_{\max}=f(1;4)=3$.

Ответ. 3.

H. Решите уравнение

$$\sqrt{6y+8x-y^2-x^2-24}+$$
$$+\sqrt{x^2+4-6y+y^2-4x}-\sqrt{x-y+2}=$$
$$=\sqrt{x+y+1}\cdot\sin z-4\sqrt{x-y+2}\cdot\cos^2\frac{z}{2}.$$

(Институт стран Азии и Африки МГУ, 2007).

Присмотримся к двум первым подкоренным выражениям:

$$\begin{cases} 6y+8x-y^2-x^2-24=1-(x-4)^2-(y-3)^2\geq 0 \\ x^2+4-6y+y^2-4x=(x-2)^2+(y-3)^2-9\geq 0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2-(x-4)^2-8\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5.$$

Но если $x>5$, то $1-(x-4)^2-(y-3)^2<0$. Следовательно, $x=5$, а $y=3$. Подставив эти значения в исходное уравнение, получим

$$3\sin z-8\cos^2\frac{z}{2}=-2 \Leftrightarrow 3\sin z-4\cos z=2.$$

Введём вспомогательный угол $\sin(z-\varphi)=\frac{2}{5}$, где $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

Ответ. $x=5$; $y=3$;

$$z=(-1)^n\arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{4}{5},\quad n\in Z.$$

I. При каждом значении параметра b решите уравнение

$$\sqrt{4x^2-y^2-6bx-by+2b^2}+$$
$$+\sqrt{2x-y-2b}\cdot\sqrt{6-4x+3b}+$$
$$+\sqrt{-8x^2-4xy+(10b+12)x+(3b+6)y-3b^2-6b}=6.$$

(ВМК МГУ, 2006).

Выделяя полные квадраты, преобразуем первое подкоренное выражение:

$$4x^2-y^2-6bx-by+2b^2=$$
$$=\left(4x^2-6bx+\frac{9}{4}b^2\right)-\left(y^2+by+\frac{1}{4}b^2\right)=$$
$$=\left(2x-\frac{3}{2}b\right)^2-\left(y+\frac{1}{2}b\right)^2=$$
$$=(2x-y-2b)(2x+y-b).$$

Первый сомножитель совпадает со вторым подкоренным выражением. Естественно предположить, что третье подкоренное выражение равно $(2x+y-b)(6-4x+3b)$. Раскрывая скобки, убеждаемся, что

$$(2x+y-b)(6-4x+3b)=$$
$$=-8x^2-4xy+(10b+12)x+(3b+6)y-3b^2-6b.$$

Для краткости введём обозначения: $\alpha=2x-y-2b$, $\beta=2x+y-b$, $\gamma=6-4x+3b$.

Тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\gamma}=6.$$

Из условия задачи следует, что $\alpha\geq 0$, $\gamma\geq 0$, а значит, и $\beta\geq 0$.

Заметим также, что сумма трёх неотрицательных чисел $\alpha+\beta+\gamma=6$.

Но тогда

$$12=(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)+(\beta+\gamma)\geq$$
$$\geq 2\sqrt{\alpha\beta}+2\sqrt{\alpha\gamma}+2\sqrt{\beta\gamma}=12,$$

а такое возможно лишь в случае $\alpha=\beta=\gamma=2$. Осталось решить систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x-y-2b=2,\\2x+y-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{4}b+1,\\y=-\frac{b}{2}.\end{cases}$$

Это – ответ.

J. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{12-x^2+4x}-\sqrt{3-x^2+2x}.$$

(Черноморский филиал МГУ, 2002).

Здесь напрашивается выделение полных квадратов:

$$y=\sqrt{16-(x-2)^2}-\sqrt{4-(x-1)^2}.$$

Но что делать дальше, не ясно. Развить «успех» не получается, а то, что квадраты так хорошо выделяются, свидетельствует здесь лишь о том, что подкоренные выражения обращаются в нуль в целочисленных точках! Это даёт нам возможность представить нашу функцию так:

$$y=\sqrt{(6-x)(x+2)}-\sqrt{(3-x)(x+1)}.$$

Задача трудная! Похожую задачу её авторы решают примерно так:

Найдём область определения функции

$$y=\sqrt{(6-x)(x+2)}-\sqrt{(3-x)(x+1)}:$$

$$\begin{cases}(6-x)(x+2)\geq 0,\\(3-x)(x+1)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq x\leq 3.$$

На области определения $y(x)$ разность подкоренных выражений положительна:

$$\left(12-x^2+4x\right)-\left(3-x^2+2x\right)=9+2x>0,$$

следовательно, $y>0$. Далее

$$y^2=\left(\sqrt{(6-x)(x+2)}-\sqrt{(3-x)(x+1)}\right)^2=$$
$$=-2x^2+6x+15-2\sqrt{(6-x)(x+2)}\times$$
$$\times\sqrt{(3-x)(x+1)}.$$

Вот тут происходит неожиданное. Так как на области определения

$$\sqrt{(6-x)(x+2)}\cdot\sqrt{(3-x)(x+1)}=$$
$$=\sqrt{(6-x)(x+1)}\cdot\sqrt{(3-x)(x+2)},$$

а ещё $\left(-2x^2+6x+15\right)=$

$$=(6-x)(x+1)+(3-x)(x+2)+3,$$

то полученное выражение преобразуется к виду

$$y^2=\left(\sqrt{(6-x)(x+1)}-\sqrt{(3-x)(x+2)}\right)^2+3\geq 3.$$

Теперь всё стало понятно! Если $\sqrt{(6-x)(x+1)}=\sqrt{(3-x)(x+2)}$, то $y^2=3$.

Единственный корень этого уравнения $x=0 \Leftrightarrow y_{\min}=\sqrt{3}$.

Ответ. $y_{\min}=\sqrt{3}$.

Литература

1. *Егоров А.А., Раббот Ж.М.* Иррациональные уравнения // Квант. – 2001. – №5. – С. 42 – 45.

2. *Мирошин В.В.* Формулы геометрии помогают алгебре // Квант. – 2007. – №3. – С. 46 – 50.

3. *Вавилов В.В.* Геометрическая алгебра // Потенциал. – 2013. – №8. – С. 31-38.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

После экзамена

Студент – друзьям

– Ну и гад наш препод! Я ему билет как орех щёлкнул, а он дополнительными вопросами стал засыпать! Он – вопрос, я – ответ. Он – вопрос, я – ответ. И всё равно только трояк поставил.

Профессор – преподавателям

– Ну и дуб мне сегодня попался. По билету – ни в зуб ногой, чушь какую-то несусветную нёс. Пожалел я его, тянул-тянул наводящими вопросами, еле на троечку вытянул...

* * *

Папа, сегодня в школе родительское собрание для самого узкого круга.

– Что значит «для самого узкого круга»?

– Будут только директор школы и ты.