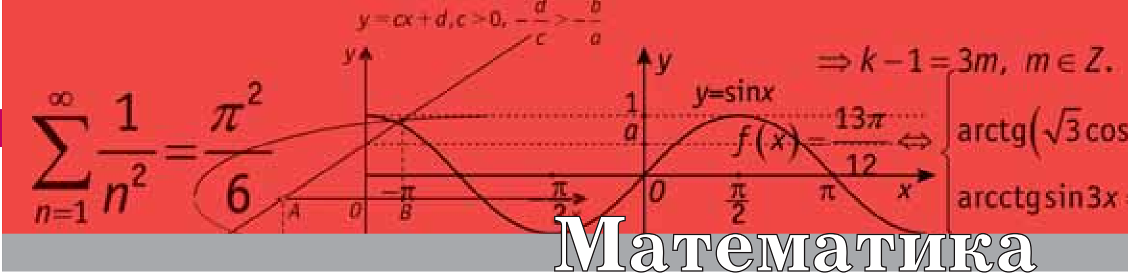

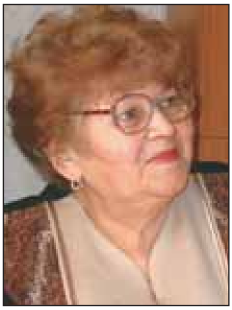

Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Федеральной заочной физико-технической школы (ФЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».

«Поиграем» с равносильными переходами в уравнениях и неравенствах с модулями

Встречаются уравнения или неравенства, в которых «проглядывается» некоторая «симметрия». В этом случае иногда удобнее сначала просмотреть равносильные переходы в общем виде. Все рассмотренные в статье примеры, вообще говоря, могут быть решены стандартными школьными методами. Вы можете решить их таким способом, а затем сравнить объём выкладок.

Но мы рассмотрим нестандартные равносильные переходы. Некоторые из них окажутся практически очевидными, другие – не очень. Ведь бывает, что одно из решений находится довольно просто, но доказать, что это все решения (а некоторые об этом и вовсе забывают), не всегда получается. В этом случае можно рассмотреть равносильные переходы в общем виде и увидеть, что, действительно, других решений нет.

В статье мы как бы «поиграем» в построение некоторых равносильных соотношений и посмотрим, сделают ли они решения более короткими и «красивыми».

Мы будем пользоваться всем хорошо известными равносильными переходами

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x), \end{cases} \qquad \text{(УР М1)}$$

$$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array}\right. \qquad \text{(УР М2)}$$

1. Нестандартные методы решения некоторых уравнений

Уравнения вида $|f(x)| - |g(x)| = g(x) - f(x)$

Рассмотрим сначала уравнение $|f(x)| - |g(x)| = f(x) - g(x)$. Оно содержит два модуля. В общем случае раскрывать их не очень приятно.

Вообще говоря, можно догадаться, что если $f(x)=g(x)$ или $f(x)\ge 0$ и $g(x)\ge 0$, то уравнение превращается в тождество. Но спрашивается, нет ли при этом ещё и других решений? Оказывается, нет.

Встречаются ещё и уравнения вида $|f(x)|-|g(x)|=g(x)-f(x)$. И здесь проглядывают «очевидные» решения. Покажем, что кроме них, других и нет, т. е.

$$|f(x)|-|g(x)|=g(x)-f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ \begin{cases} f(x)\le 0, \\ g(x)\le 0. \end{cases}\end{array}\right. \qquad \text{(УР М3)}$$

Прежде всего замечаем, что

$$|f(x)|-|g(x)|=g(x)-f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(|f(x)|-|g(x)|\right)^2=\left(g(x)-f(x)\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|f(x)g(x)|=f(x)g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)g(x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \\ f(x)g(x)>0, \end{array}\right.$$

т. е. либо одна из функций равна 0, либо $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые знаки. Выясним, что из этого следует:

$$|f(x)|-|g(x)|=g(x)-f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0\Rightarrow -|g(x)|=g(x)\le 0; \\ g(x)=0\Rightarrow -|f(x)|=f(x)\le 0; \\ \begin{cases} f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0, \\ f(x)=g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\le 0,\ g(x)\le 0, \\ 0=0 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ \begin{cases} f(x)\le 0, \\ g(x)\le 0, \end{cases}\end{array}\right. \text{ ч. т. д.}$$

Следствие. Так как $|-f(x)|=|f(x)|$, $|g(x)|=|-g(x)|$, то возьмём $(-f(x))$ в роли $f(x)$, $(-g(x))$ в качестве $g(x)$. Тогда

$$|f(x)|-|g(x)|=f(x)-g(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}\end{array}\right. \qquad \text{(УР М4)}$$

Теперь видно, что действительно, кроме *«очевидных»* решений, других нет. А поэтому это нетрудно и запомнить.

Примечание. Важно понять и для учителя, и для учащегося, что такие неравенства наверняка решатся, если «решабельны» неравенства для $f(x)$ и $g(x)$ и уравнение $f(x)=g(x)$.

1. Решите уравнение

$$|5x-3|-|7x-4|=2x-1.$$

Конечно, уравнение можно решить, раскрывая последовательно два модуля. Попробуйте сделать это самостоятельно, а затем сравните с приведённым ниже решением.

Наше уравнение имеет вид:
$|f(x)| - |g(x)| = g(x) - f(x).$
Воспользуемся (УР М3):

$$|5x-3| - |7x-4| = 2x-1 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x-3 = 7x-4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} 5x-3 \le 0, \\ 7x-4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le \dfrac{4}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \le \frac{4}{7}.$$

Ответ. $\left(-\infty; \dfrac{4}{7}\right].$

2. Решите уравнение

$$|x^2-2x-63| - |x^2+13x+12| = 15x+75.$$

Если предыдущее уравнение многие наверняка попытаются решить традиционным методом раскрытия модуля, то это уравнение у них поубавит энтузиазм – промежутков здесь будет уже 5. Мы тоже не будем «искушать судьбу» и сразу воспользуемся (УР М3):

$$|x^2-2x-63| - |x^2+13x+12| = 15x+75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+13x+12 = x^2-2x-63, \\ \begin{cases} x^2-2x-63 \le 0, \\ x^2+13x+12 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-7; -1].$$

Ответ. $[-7; -1].$

3. Решите уравнение

$$|5x-2| = |7x-3| - 2x + 1.$$

Приведём уравнение к виду $|f(x)| - |g(x)| = f(x) - g(x)$ и воспользуемся (УР М4):

$$|7x-3| - |5x-2| = 2x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |7x-3| - |5x-2| = (7x-3) - (5x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-3 = 5x-2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} 5x-2 \ge 0, \\ 7x-3 \ge 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge \frac{3}{7}.$$

Ответ. $\left[\dfrac{3}{7}; +\infty\right).$

Уравнения вида $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x)$

Рассмотрим уравнение вида

$$|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x).$$

И здесь можно догадаться, что если $f(x) \ge 0$ и $g(x) \ge 0$, то уравнение превращается в тождество. Но спрашивается, нет ли при этом ещё и других решений? Оказывается, нет. Покажем, что

$$|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \qquad \text{(УР М5)}$$

Действительно,

$$|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| - f(x) = -(|g(x)| - g(x)).$$

Но для любой функции $|f(x)| \ge$ $\ge f(x)$, а у нас справа стоит $-(|g(x)| + g(x)) \le 0.$ Поэтому равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |f(x)| - f(x) = 0, \\ |g(x)| - g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Следствие. Встречаются и уравнения вида

$$\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|=-f(x)-g(x).$$

Т.к. $\left|f(x)\right|=\left|-f(x)\right|,\ \left|g(x)\right|=\left|-g(x)\right| \Rightarrow$

$$\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|=-f(x)-g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le 0, \\ g(x)\le 0. \end{cases} \qquad \text{(УР М6)}$$

Примечание. Важно *разглядеть* в заданном уравнении его «тип».

4. Решите уравнение

$$\left|1+\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\right|+\left|x^2-15x+44\right|=$$
$$=15x-x^2-\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)-45.$$

Правая часть имеет что-то очень много общего с левой. Уравнение на самом деле имеет вид

$$\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|=-f(x)-g(x):$$

$$\left|1+\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\right|+\left|x^2-15x+44\right|=$$
$$=15x-x^2-\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)-45 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|1+\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\right|+\left|x^2-15x+44\right|=$$
$$=-\left(1+\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\right)-\left(x^2-15x+44\right).$$

Поэтому воспользуемся (УР М6):

$$\left|1+\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\right|+\left|x^2-15x+44\right|=$$
$$=15x-x^2-\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)-45 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\le 0, \\ x^2-15x+44\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=(1+2k)^2,\ k=0,1,\dots \\ x\in[4;\ 11] \end{cases} \Leftrightarrow x=9.$$

Ответ. $\{9\}$.

Примечание. Уравнение «сносно» решается и с помощью раскрытия модулей.

5. Решите уравнение

$$\left|x^3-64\right|+\left|x^2+8x-33\right|=$$
$$=x^3+x^2+8x-97.$$

Это уравнение имеет вид $\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|=f(x)+g(x)$. Поэтому воспользуемся (УР М5):

$$\left|x^3-64\right|+\left|x^2+8x-33\right|=$$
$$=x^3+x^2+8x-97 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-64\ge 0, \\ x^2+8x-33\ge 0. \end{cases}$$

Ответ. $[4;\ +\infty)$.

2. Нестандартные методы решения некоторых неравенств

Неравенства вида $\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|\le\left|h(x)\right|$

Рассмотрим неравенство вида $\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|\le\left|h(x)\right|$. Покажем, что

$$\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|\le\left|h(x)\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(f(x)+g(x)+h(x)\right)\times \\ \times\left(f(x)+g(x)-h(x)\right)\le 0, \\ \left(f(x)-g(x)+h(x)\right)\times \\ \times\left(f(x)-g(x)-h(x)\right)\le 0. \end{cases} \qquad \text{(УР М7)}$$

Действительно,

$$|f(x)|+|g(x)|\le|h(x)|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)+g^2(x)+2|f(x)g(x)|\le h^2(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|f(x)g(x)|\le -f^2(x)-g^2(x)+h^2(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x)g(x)\le -f^2(x)-g^2(x)+h^2(x), \\ 2f(x)g(x)\ge f^2(x)+g^2(x)-h^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(x)+g(x))^2\le h^2(x), \\ (f(x)-g(x))^2\le h^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(x)+g(x)+h(x))(f(x)+g(x)-h(x))\le 0, \\ (f(x)-g(x)+h(x))(f(x)-g(x)-h(x))\le 0. \end{cases}$$

6. Решите неравенство

$$3|x-2|+|5x-4|\le 10.$$

Конечно, здесь можно просто раскрыть модули, но так вы сделаете и сами. Мы же воспользуемся (УР М7):

$$3|x-2|+|5x-4|\le 10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-6+5x-4+10)\times \\ \times(3x-6+5x-4-10)\le 0, \\ (3x-6-(5x-4)+10)\times \\ \times(3x-6-(5x-4)-10)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x-\dfrac{5}{2}\right)\le 0, \\ (x-4)(x+6)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[0;\ \frac{5}{2}\right].$$

Ответ. $\left[0;\ \dfrac{5}{2}\right]$.

Если, как иногда встречается, $h(x)=f(x)+g(x)+2a^2$, то неравенства упрощаются и

$$|f(x)|+|g(x)|\le\left|f(x)+g(x)+2a^2\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+g(x)+a^2\ge 0, \\ \left(f(x)+a^2\right)\left(g(x)+a^2\right)\ge 0. \end{cases} \qquad \text{(УР М8)}$$

Конечно, это условие равносильности, наверное, не стоит запоминать, т. к. оно годится для узкого класса задач. Однако всё-таки интересно посмотреть, как оно работает – намного ли упрощает вычисления.

Рассмотрим четыре способа решения одного неравенства.

7. Решите неравенство

$$\left|x^2+x-2\right|+|x+4|\le x^2+2x+6.$$

Первый способ (использование (УР М8)).

Неравенство имеет вид

$$|f(x)|+|g(x)|\le\left|f(x)+g(x)+2a^2\right|,$$

где $2a^2=4$, т. к. $x^2+2x+6>0$ и $x^2+2x+6=\left(x^2+x-2\right)+(x+4)+4.$

Поэтому вот что получится, если воспользоваться новым условием равносильности (УР М8):

$$\left|x^2+x-2\right|+|x+4|\le x^2+2x+6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2+x-2\right|+\left|x+4\right| \le$$

$$\le \left(x^2+x-2\right)+\left(x+4\right)+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+4 \ge 0, \\ \left(x^2+x-2+2\right)\left(x+4+2\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-6;-1] \cup [0;+\infty).$$

Ответ. $[-6;-1] \cup [0;+\infty)$.

Второй способ (использование (УР М7)). Теперь решим то же неравенство с помощью (УР М7):

$$\left|x^2+x-2\right|+\left|x+4\right| \le x^2+2x+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+2x+2+x^2+2x+6\right)\times \\ \times\left(x^2+2x+2-x^2-2x-6\right) \le 0, \\ \left(x^2-6+x^2+2x+6\right)\times \\ \times\left(x^2-6-x^2-2x-6\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-6;-1] \cup [0;+\infty).$$

Третий способ (последовательное использование (УР М1). Попробуем по-прежнему обойтись без раскрытия модулей, используя последовательно два раза (УР М1):

$$\left|x^2+x-2\right|+\left|x+4\right| \le x^2+2x+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 \le x^2+2x+6-\left|x+4\right|, \\ x^2+x-2 \ge -x^2-2x-6+\left|x+4\right| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|x+4\right| \le x+8, \\ \left|x+4\right| \le 2x^2+3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \le x+8, \\ x+4 \ge -x-8, \\ x+4 \le 2x^2+3x+4, \\ x+4 \ge -2x^2-3x-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-6;\,-1] \cup [0;\,+\infty).$$

Ответ. $[-6;\,-1] \cup [0;\,+\infty)$.

Четвёртый способ (стандартный – наконец раскрываем модуль). Наберёмся терпения и раскроем все модули, как учат в школе:

$$\left|x^2+x-2\right|+\left|x+4\right| \le x^2+2x+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|(x+2)(x-1)\right|+\left|x+4\right| \le x^2+2x+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4<0, \\ x \ge -6; \end{cases} \\ \begin{cases} -4 \le x \le -2, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 1, \\ 0 \le 2x^2+2x; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x \in R \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-6;\,-1] \cup [0;\,+\infty)$$

Ответ. $[-6;\,-1] \cup [0;\,+\infty)$.

Теперь читателям решать – применять или не применять (УР М8).

Неравенства вида $|f(x)|-|g(x)| \ge g(x)-f(x)$

Сейчас попробуем сформулировать условия равносильности специально для неравенств такого типа. Покажем, что

$$\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right| \ge g(x)-f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \le 0. \end{array}\right. \quad \text{(УР М9)}$$

Действительно,

$$\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right| \ge g(x)-f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|g(x)\right| \le \left|f(x)\right|+f(x)-g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \le \left|f(x)\right|+f(x)-g(x), \\ g(x) \ge -\left|f(x)\right|-f(x)+g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|f(x)\right| \ge 2g(x)-f(x), \\ \left|f(x)\right|+f(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \in R \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge 2g(x)-f(x), \\ f(x) \le -2g(x)+f(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \leq 0. \end{array}\right.$$

Следствие. Отсюда, в частности, мгновенно получается и другое условие равносильности:

$$|f(x)| - |g(x)| \geq f(x) - g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \leq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{array}\right. \quad \text{(УР М10)}$$

Для этого достаточно взять $(-f(x))$ в качестве $f(x)$ и $(-g(x))$ в качестве $g(x)$. А можно в качестве упражнения доказать так же, как и (УР М8).

8. Решите неравенство

$$|5x-3| - |7x-4| \geq 2x-1.$$

Первый способ (нестандартный).

Воспользуемся только что полученным условием равносильности (УР М10):

$$|5x-3| - |7x-4| \geq 2x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-3 \geq 7x-4; \\ 7x-4 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{4}{7}\right].$$

Ответ. $\left(-\infty; \frac{4}{7}\right]$.

Второй способ.

Теперь решим неравенство, воспользовавшись последовательно более привычными условиями равносильности – сначала (УР М1), а затем (УР М1) и (УР М2):

$$|5x-3| - |7x-4| \geq 2x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-3 \geq 2x-1+|7x-4|, \\ 5x-3 \leq -2x+1-|7x-4| \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-2 \geq |7x-4|, \\ |7x-4| \leq 4-7x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x-4 \leq 3x-2, \\ 7x-4 \geq -3x+2; \end{cases} \\ \begin{cases} 7x-4 \leq 4-7x, \\ 7x-4 \geq -4+7x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x \leq 2, \\ 10x \geq 6; \end{cases} \\ \begin{cases} 7x \leq 4, \\ x \in R \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{4}{7}\right].$$

Ответ. $\left(-\infty; \frac{4}{7}\right]$.

9. Решите неравенство

$$|x^2-4x-5| - |2x^2-8x-42| \geq$$
$$\geq x^2-4x-37.$$

Первый способ.

Воспользуемся сначала последовательно два раза привычными условиями равносильности (УР М1), а затем (УР М2): $|2x^2-8x-42| \leq$

$$\leq |x^2-4x-5| - x^2+4x+37 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-8x-42 \leq \\ \leq |x^2-4x-5| - x^2+4x+37, \\ 2x^2-8x-42 \geq \\ \geq -|x^2-4x-5| + x^2-4x-37 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-4x-5| \geq 3x^2-12x-79, \\ |x^2-4x-5| \geq -x^2+4x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-4x-37 \leq 0, \\ x^2-4x-21 \leq 0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-8x-10 \geq 0, \\ x \in R \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in \left[2-\sqrt{41}; 2+\sqrt{41}\right].$$

Ответ. $\left[2-\sqrt{41};\ 2+\sqrt{41}\right]$.

Второй способ.

Неравенство имеет вид $|f(x)| - |g(x)| \geq g(x) - f(x)$, поэтому воспользуемся условием равносильности (УР М9):

$$\left|x^2-4x-5\right|-\left|2x^2-8x-42\right|\geq$$

$$\geq x^2-4x-37\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x-5-\left(2x^2-8x-42\right)\geq 0\\ 2x^2-8x-42\leq 0;\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[2-\sqrt{41};\ 2+\sqrt{41}\right].$$

Ответ. $\left[2-\sqrt{41};\ 2+\sqrt{41}\right]$.

10. Найти все значения x, при которых одно из двух выражений

$$|x-4|\left(|x-5|-|x-4|\right)-8x \quad \text{и}$$

$$|x|\left(|x|-|x-9|\right)+36$$

не положительно, и при этом его модуль не меньше модуля другого.

Условие этой задачи многих учащихся поставило в тупик – они испугались того, что придётся решать совокупность двух систем с таким большим количеством модулей. Мы поступим по-другому. Обозначим первое выражение буквой A, а второе – буквой B. Теперь формализуем заданные условия в общем виде. Решить задачу – это значит решить совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A(x)\leq 0,\\ |A(x)|\geq|B(x)|;\end{cases}\\ \begin{cases}B(x)\leq 0,\\ |B(x)|\geq|A(x)|.\end{cases}\end{array}\right.$$

Сначала упростим неравенства, используя (УР М1) и (УР М2):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A(x)\leq 0,\\ |A(x)|\geq|B(x)|;\end{cases}\\ \begin{cases}B(x)\leq 0,\\ |B(x)|\geq|A(x)|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-A(x)\geq|B(x)|,\\ -B(x)\geq|A(x)|\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}B(x)\leq -A(x),\\ B(x)\geq A(x);\end{cases}\\ \begin{cases}A(x)\leq -B(x),\\ A(x)\geq B(x)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A(x)+B(x)\leq 0,\\ A(x)-B(x)\leq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}A(x)+B(x)\leq 0,\\ A(x)-B(x)\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x)+B(x)\leq 0$$

(т. к. $A(x)+B(x)\leq 0$ и при $A(x)-B(x)\leq 0$, и при $A(x)-B(x)\geq 0$).

Теперь преобразуем неравенство $A(x)+B(x)\leq 0$:

$$A(x)+B(x)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|x-4|\left(|x-5|-|x-4|\right)-$$

$$-8x+|x|\left(|x|-|x-9|\right)+36\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|x^2-9x+20\right|-x^2+8x-$$

$$-16-8x+x^2-\left|x^2-9x\right|+36\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|x^2-9x+20\right|-\left|x^2-9x\right|+20\leq 0.$$

Полученное неравенство можно решить разными способами. Воспользуемся (УР М9) – не зря же мы его выводили:

$$\left|x^2-9x+20\right|-\left|x^2-9x\right|\leq -20\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|x^2-9x\right|-\left|x^2-9x+20\right|\geq 20\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-9x\geq x^2-9x+20\Leftrightarrow\varnothing,\\ x^2-9x+20\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[4;\ 5].$$

Ответ. $[4;\ 5]$.

Примечание. В данном примере $B(x)>0$, поэтому неположительным может быть только $A(x)$. Тогда вместо совокупности получится одна система:

$$\begin{cases} A(x) \le 0, \\ |A(x)| \ge B(x) \end{cases} \Leftrightarrow -A(x) \ge B(x) \left(\Rightarrow A(x) \le 0\right) \Leftrightarrow A(x) + B(x) \le 0.$$

Но могло быть и не так. Но и в этом простейшем варианте рассмотрение условия в общем виде полезно.

Неравенства вида $|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$

Рассмотрим неравенство вида $|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$. Покажем, что

$$|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)| \Leftrightarrow \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0. \quad \text{(УР М11)}$$

Действительно,

$$|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|f(x)| + |g(x)|\right)^2 > |f(x) + g(x)|^2 \Leftrightarrow$$

$$|f(x)g(x)| > f(x)g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)g(x) > f(x)g(x) \Leftrightarrow \varnothing \\ f(x)g(x) < -f(x)g(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)g(x) < 0, \text{ ч. т. д.}$$

Тоже довольно очевидное условие, но как-то совсем не используемое при решении неравенств. А мы проверим, как оно работает.

11. Решите неравенство

$$\left|x^2 + 3x - 4\right| + \left|x^2 - 16\right| > \left|2x^2 + 3x - 20\right|$$

и найдите наименьшую длину промежутка, содержащего все его решения.

Первый способ (нестандартный).

Заметим, что наше неравенство имеет вид $|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$. Воспользуемся (УР М11):

$$\left|x^2 + 3x - 4\right| + \left|x^2 - 16\right| > \left|2x^2 + 3x - 20\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 3x - 4\right)\left(x^2 - 16\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+4)^2(x-4) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (1;\ 4) \Rightarrow l = 3.$$

Ответ. $(1;\ 4)$, 3.

Второй способ.

Так как $x = -4$ неравенству не удовлетворяет, то, разложив на множители и сократив на $|x+4|$, получим $|x-1| + |x-4| > |2x-5|$. Воспользуемся последовательно (УР М1), а затем (УР М2):

$$|x-1| + |x-4| > |2x-5| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 < |x-1| + |x-4|, \\ 2x - 5 > -|x-1| - |x-4| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| > 2x - 5 - |x-4|, \\ |x-1| > -2x + 5 - |x-4| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 1 > 2x - 5 - |x-4|, \\ x - 1 < -2x + 5 + |x-4|, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x - 1 > -2x + 5 - |x-4|, \\ x - 1 < 2x - 5 + |x-4| \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x-4| > x - 4, \\ |x-4| > 3x - 6, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} |x-4| > -3x + 6, \\ |x-4| > -x + 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 4 < 0, \\ x - 4 > 3x - 6, \\ x - 4 < -3x + 6 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x - 4 > -3x + 6, \\ x - 4 < 3x - 6 \\ x - 4 > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1;\ 4) \Rightarrow l = 3.$$

Ответ. $(1;\ 4)$, 3.