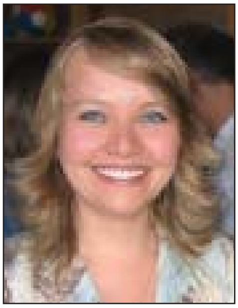


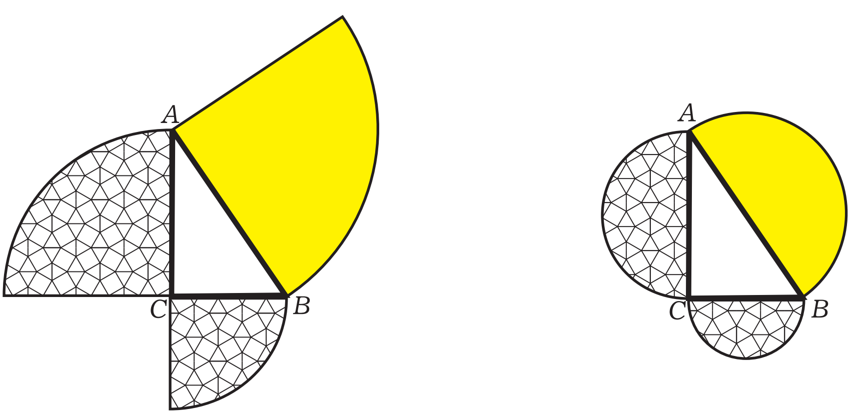
Колоскова Мария Евгеньевна
Ассистент кафедры математики школы им. А.Н. Колмогорова СУНЦ МГУ.

Площадь круга и его частей

В статье рассматриваются некоторые задачи на вычисление площадей фигур, границы которых составлены из отрезков прямых и дуг окружностей.

Напомним, что площадь круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, а площадь центрального сектора круга, содержащего угол в α радиан, – по формуле $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$; радианная мера угла α связана с его градусной мерой α° формулой $\alpha^\circ = \frac{\alpha}{2\pi}360^\circ$. Площадь кругового сегмента вычисляется как разность площадей центрального сектора и соответствующего треугольника с вершиной в центре круга.

Задача 1. На сторонах прямоугольного треугольника построены секторы (рис. 1 *a*), полукруги (рис. 1 *b*), дуговые треугольники (рис. 1 *c*; там же указан способ их построения), так называемые «луночки Гиппократа» (рис. 1 *d*) и некоторые их комбинации (рис. 1 *e*, *f*). Докажите, что сумма площадей заштрихованных фигур равна площади закрашенной фигуры.



a) b)

Рис. 1

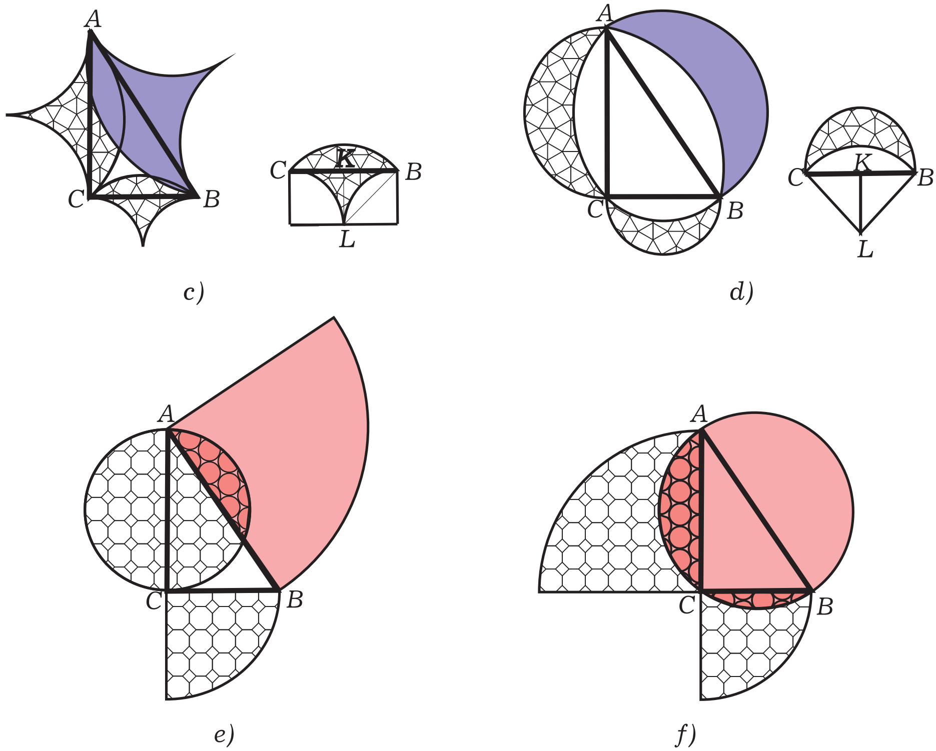


Рис. 1

Решение. Положим $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$.

a) Площади секторов, построенных на сторонах AC, BC и AB, равны $\dfrac{\pi b^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ}$, $\dfrac{\pi a^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ}$ и $\dfrac{\pi c^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ}$ соответственно. Тогда сумма площадей заштрихованных секторов есть

$$\frac{\pi b^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} + \frac{\pi a^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{4}(b^2 + a^2).$$

По теореме Пифагора эта площадь равна $\dfrac{\pi}{4}c^2$, то есть равна площади закрашенного сектора. Что и требовалось доказать.

b) Площади полукругов, построенных на сторонах AC, BC и AB прямоугольного треугольника ABC, равны $\pi\dfrac{b^2}{8}$, $\pi\dfrac{a^2}{8}$ и $\pi\dfrac{c^2}{8}$ соответственно. Применив теорему Пифагора, получим нужное утверждение.

c) Найдём сначала формулу для вычисления площади дугового треугольника. Рассмотрим дуговой треугольник, построенный на стороне BC. По построению $CK = KL = KB = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$, тогда $BL = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, площадь дугового треугольника CLB есть разность площадей сектора CLB и сегментов, ограниченных хордами CL и BL. Имеем:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 2a^2 \cdot 90^\circ}{4 \cdot 360^\circ} = \frac{\pi a^2}{8},$$

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}.$$

Тогда искомая площадь есть

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi a^2}{8} - 2\left(\frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}\right) = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{\pi a}{8} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}.$$

Следовательно, площади дуговых треугольников, построенных на сторонах AC и AB, равны $\frac{b^2}{4}$ и $\frac{c^2}{4}$ соответственно. По теореме Пифагора $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{c^2}{4}$, что и требовалось доказать.

d) Найдём формулу для вычисления площади луночки, построенной на стороне данного треугольника. Рассмотрим катет BC и построенную на нём луночку. По построению $CK=KB=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$, тогда $BL=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, площадь луночки, построенной на стороне BC, есть разность площадей полукруга, построенного на стороне BC как на диаметре, и сегмента круга радиуса BL, ограниченного хордой BC. Имеем:

$$S_{\text{полукруга}}=\frac{1}{2}\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi a^2}{8}.$$

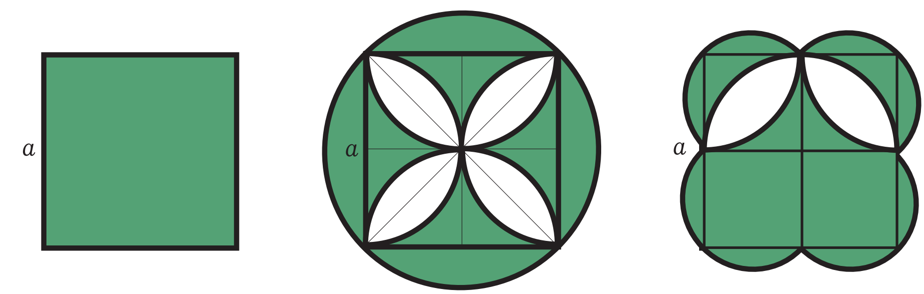
Тогда искомая площадь есть

$$S_{\text{луночки}}=\frac{\pi a^2}{8}-\left(\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{a^2}{4}.$$

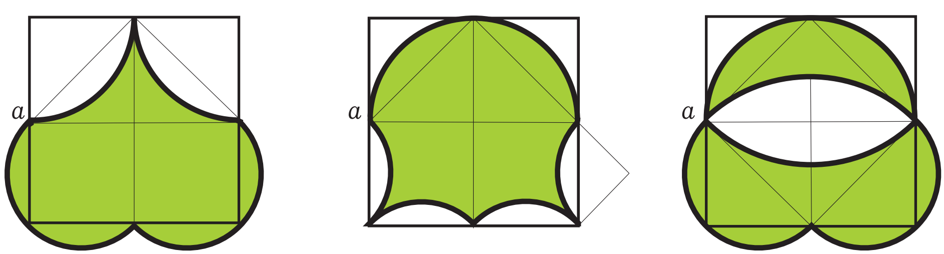
Следовательно, площади луночек, построенных на сторонах AC и BC, равны $\frac{b^2}{4}$ и $\frac{c^2}{4}$ соответственно. По теореме Пифагора $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{c^2}{4}$, что и требовалось доказать.

Нужные доказательства для фигур на рис. 1 *e*, *f* проведите самостоятельно.

Задача 2. Докажите, что на рисунках *а*) и *б*) изображены по три равновеликие фигуры. Найдите их площади.



а)



б)

Рис. 2

Решение. *а)* Рассмотрим вторую фигуру. Используя результаты, полученные в задаче 1, легко увидеть (мы предлагаем читателю провести необходимые вычисления самостоятельно), что площадь каждого лепестка, вырезанного из квадрата, равна площади сегмента круга, описанного вокруг квадрата, ограниченного стороной квадрата. Таким образом, получаем, что площадь вырезанных из квадрата частей равна площади добавленных к квадрату частей, то есть вторая фигура равновелика квадрату. Чтобы доказать равновеликость третьей фигуры квадрату со стороной a, покажем, что площадь каждого из вырезанных лепестков равна сумме площадей четырёх сегментов, отсекаемых сторонами квадрата со стороной $\frac{a}{2}$ от круга, описанного около этого квадрата. Вырезанный лепесток состоит из двух сегментов, площадь каждого из которых равна (задача 1, рис. 1 с)

$$\frac{\pi a^2}{16}-\frac{a^2}{8}.$$

Таким образом, $S_{\text{лепестка}}=\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$. А площадь четырёх сегментов есть $S=S_{\text{круга}}-S_{\text{квадрата}}=\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$, так как радиус круга, описанного около квадрата со стороной $\frac{a}{2}$, равен $r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Что и требовалось доказать. Таким образом, получаем, что площадь каждой из трёх фигур есть a^2.

б) Первая фигура получена из квадрата со стороной a путём вырезания двух одинаковых секторов с центральным углом 90° круга радиуса $\frac{a}{2}$ и добавления четырёх одинаковых сегментов, суммарная площадь которых равна $\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$ (см. пункт *а*)). Таким образом, площадь первой фигуры

$$S_1=a^2-2\frac{\pi a^2\cdot 90^\circ}{4\cdot 360^\circ}+\left(\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{3a^2}{4}.$$

Вторая фигура получена из квадрата со стороной a путём вырезания двух одинаковых криволинейных треугольников и четырёх одинаковых сегментов. Суммарная площадь четырёх сегментов равна $\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$. Площадь криволинейного треугольника равна разности площади сектора с центральным углом 90° круга радиуса $\frac{a}{2}$ (она равна $S_{\text{сект}}=\frac{\pi a^2\cdot 90^0}{4\cdot 360^0}=\frac{\pi a^2}{16}$) и площади лепестка, образованного двумя сегментами, площадь которого равна $S_{\text{лепестка}}=\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$ (см. пункт *а*)). Тогда площадь второй фигуры есть

$$S_2=a^2-\left(\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right)-2\left(\frac{\pi a^2}{16}-\left(\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right)\right)=$$

$$=a^2-\frac{\pi a^2}{8}+\frac{a^2}{4}-\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi a^2}{4}-\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{4}.$$

Проводя аналогичные рассуждения (проделайте их самостоятельно), получаем, что и площадь третьей фигуры $S_3=\frac{3a^2}{4}$. Таким образом, все три фигуры равновелики.

Задача 3. ADB – полуокружность с центром C радиуса 1, отрезок DC перпендикулярен AB. Найдите площадь незакрашенной луночки, образованной полуокружностью ADB и дугами AE, BF и EF окружностей с центрами B, A, D соответственно (рис. 3).

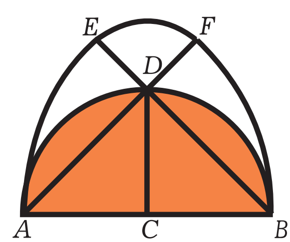


Рис. 3

Решение. Заметим, что искомую площадь можно найти следующим образом:

$$S = 2\cdot(S_{\text{сект}ABF} - S_{\text{сект}DBC} - S_{\text{треуг}ADC}) + S_{\text{сект}EDF}.$$

Найдём все площади, участвующие в этой формуле. Так как $\cup AE$ – дуга окружности с центром B, то $AB = BE = 2$ (так как $AC = CB = 1$ по условию). Тогда $DE = BE - BD = BE - (\sqrt{DC^2 + BC^2}) = 2 - \sqrt{2}$. Аналогично получаем, что $DF = 2 - \sqrt{2}$. По условию отрезок DC перпендикулярен AB, следовательно, треугольник ADC – прямоугольный и равнобедренный, значит $\angle DAC = \angle ADC = 45°$, аналогично $\angle CBD = \angle BDC = 45°$, то есть $\angle ADB = 90°$. Таким образом:

$$S_{\text{сект}EDF} = \frac{\pi(2-\sqrt{2})^2\cdot 90°}{360°} = \frac{\pi}{4}(2-\sqrt{2})^2,$$

$$S_{\text{сект}ABF} = \frac{\pi\cdot 4\cdot 45°}{360°} = \frac{\pi}{2},$$

$$S_{\text{сект}DBC} = \frac{\pi\cdot 1^2\cdot 90°}{360°} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как площадь треугольника ADC равна $1/2$, то искомая площадь равна

$$S = 2\cdot(S_{\text{сект}ABF} - S_{\text{сект}DBC} - S_{\text{треуг}ADC}) + S_{\text{сект}EDF} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi - \pi\sqrt{2} - 1.$$

Задача 4. Пусть G – центр равностороннего треугольника ABC ($AB = a$). Найдите площадь фигуры, закрашенной на рис. 4, которая ограничена дугами трёх окружностей.

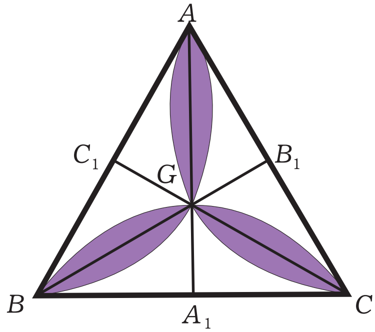


Рис. 4

Решение. Фигура состоит из трёх одинаковых лепестков, каждый из которых состоит из двух равных сегментов окружностей, описанных около треугольников BGC, BGA и AGC. Найдём площадь одного такого сегмента $S_{\text{сегм}}$, тогда площадь всей фигуры будет равна $S = 6\cdot S_{\text{сегм}}$. Вычислим, например, площадь сегмента, образованного дугой $\cup BG$ окружности, описанной около треугольника BGC, и хордой BG. Пусть O – центр описанной около треугольника BGC окружности, тогда $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}BOG} - S_{\text{треуг}BOG}$. Чтобы найти площадь сектора, необходимо знать радиус окружности и центральный угол. Заметим, что

$$CG = BG = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

так как BB и CC_1 – медианы в равностороннем треугольнике. Найдём теперь радиус окружности, описанной около треугольника BGC по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где a, b и c – стороны треугольника, а S – его площадь. Кроме того,

$$S_{\text{треуг}BGC} = \frac{1}{2}BG\cdot BC\cdot\sin 30° = \frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{3},$$

так как медианы в равностороннем треугольнике являются также биссектрисами. Таким образом, имеем:

$$R = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot a\cdot\frac{1}{4\cdot\frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Следовательно, $BO = GO = BG$ и треугольник BGO – равносторонний; поэтому $\angle BOG = 60°$. Тогда

$$S_{\text{сект}BOG} = \frac{\pi\cdot\frac{3a^2}{9}\cdot 60°}{360°} = \frac{\pi a^2}{18},$$

$$S_{\text{треуг}BOG} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{9}\cdot\sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Следовательно, площадь искомого сегмента есть $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi a^2}{18} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$, а площадь закрашенной фигуры равна $S = 6 \cdot \left(\frac{\pi a^2}{18} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Упражнения

Упражнение 1. Доказать, что площади фигур (рис. 5 *a*, *b*, *c*), обозначенных разными штриховками, равны.

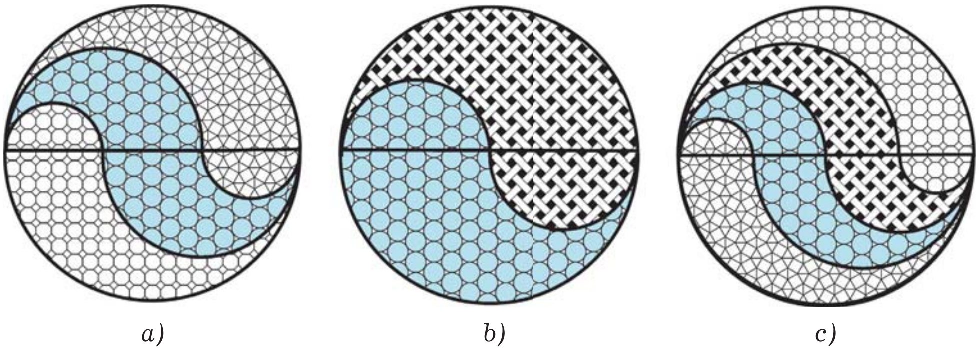


Рис. 5

Упражнение 2. Квадрат $ABCD$ ($AB = a$) разделён на четыре равных квадрата. Найдите площади закрашенных фигур (рис. 6), границы которых состоят из четвертей различных окружностей. **Ответ**. $a^2(\pi - 2)$ и $2a^2$.

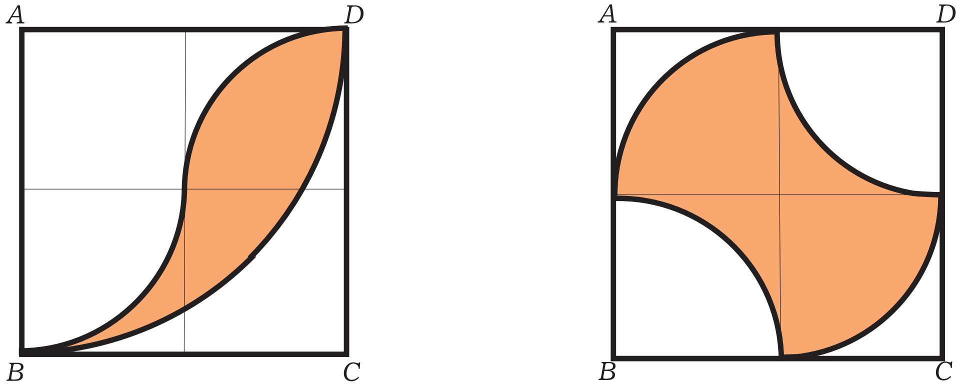


Рис. 6

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Учитель математики, заглянув в тетрадь ученика, был потрясён замысловатыми вычислениями:

– Один из нас сошёл с ума, Сидоров!

На следующий день Сидоров кладёт учителю на стол конверт.

– Что в нём? – спрашивает учитель.

– Справка о том, что я не сумасшедший.