**Пукас Юрий Остапович**
*Более 20 лет преподавал математику и физику в школах города Троицка. Автор книг по подготовке к ЕГЭ и множества статей по олимпиадной математике. Многократный победитель Творческого конкурса учителей математики.*

# Первые впечатления от ЕГЭ – 2020: Дальний Восток – начинаем, Москве и Петербургу – подготовиться!

Начинаем разговор о профильном ЕГЭ по математике, основная волна которого в этом году прошла-прокатилась 10 июля по нашей стране от берегов Камчатки до Калининграда.

Замечательные люди, выступавшие в начале нашего века против ЕГЭ, в числе прочих доводов приводили тот, что для такой протяженной страны, а разница во времени между Хабаровском и Москвой плюс 7 часов, «единый» для всех регионов экзамен невозможен, мол нельзя же давать всем и везде похожие варианты. Но почему же нельзя? Дают. Вот какое неравенство, наряду с другими заданиями из дальневосточных вариантов, обсуждалось на одном из форумов начиная примерно с 7 часов утра 10 июля, когда экзамен там только-только завершился, а до начала экзамена в Москве оставалось ещё 3 часа:

**Задание 15. Дальний Восток**.
Решите неравенство

$$x^2\log_{243}(4-x)\le\log_3\left(x^2-8x+16\right).$$

Точно такое неравенство потом было и в Москве, именно оно встретилось в большинстве тех работ, сканы которых я видел. Ещё в московских работах мне встретились такие неравенства:

$$x^2\log_{625}(2-x)\le\log_5\left(x^2-4x+4\right),$$

$$x^2\log_{625}(2-x)\ge\log_5\left(x^2-4x+4\right),$$

$$x^2\log_{243}(3-x)\le\log_3\left(x^2-6x+9\right).$$

Упомянем ещё Краснодар и Санкт-Петербург:

$$x^2\log_{512}(x+5)\le\log_2\left(x^2+10x+25\right)\text{ и}$$

$$x^2\log_{343}(5-x)\le\log_7\left(x^2-10x+25\right).$$

Конечно, в те утренние часы я не знал и не думал, что других неравенств нигде и никому предложено не будет, но что уровень сложности задания будет примерно таким, понимал.

Что ещё интересного было для меня в то утро в дальневосточных заданиях? Особую радость я испытал, когда увидел экономическую задачу.

**Задание 17.1.** В июле 2020 года планируется взять кредит на пять лет размере 825 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

– в июле 2021, 2022 и 2023 годов долг остаётся равным 825 тыс. рублей;

– суммы выплат 2024 и 2025 годов должны быть равны.

– К июлю 2025 долг должен быть полностью выплачен.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

**Решение**. Дело в том, что в конце статьи «Легенда №17» («Потенциал», МФИ, №03 2019) я предположил появление именно такого типа задач, как основного, в вариантах ЕГЭ – 2020. Рассмотрим эти задачи в общем виде, чтобы в дальнейшем было проще разбираться в похожих ситуациях. Здесь в условиях фигурируют три величины: сумма кредита $S$ тыс. рублей, процентная ставка $r\%$ и $x$ тыс. рублей – величина каждого из двух последних равных платежей. Две из этих величин бывают известны, и надо найти третью, чтобы получить окончательный ответ. Здесь также бывает полезно ввести стандартную для экономических задач переменную $b=1+\frac{r}{100}$.

Три первые выплаты равны по $\frac{r}{100}\cdot S$ тыс. рублей каждая, после них долг банку равен взятому кредиту, то есть $S$. Мы просто возвращаем начисленные проценты. После четвёртого начисления процентов долг банку возрастёт и станет равным $S+\frac{r}{100}S=\left(1+\frac{r}{100}\right)S=bS$, где $b=1+\frac{r}{100}$. После четвёртой выплаты равной $x$ тыс. рублей, долг банку составит уже $(bS-x)$ тыс. рублей. После пятого начисления процентов уже на эту сумму долг станет равным $((bS-x)b)$ рублей, и после пятой выплаты, также равной $x$ тыс. рублей, кредит будет полностью погашен:

$$((bS-x)b-x)=0 \Rightarrow S\cdot b^2=x(b+1).$$

Отсюда находим размер двух последних выплат $x=\frac{S\cdot b^2}{b+1}$ тыс. рублей.

Нам надо общую сумму выплат за пять лет. Она равна $3\cdot\frac{r}{100}\cdot S+2\cdot x=1575$ тыс. рублей.

**Ответ**: 1575 тыс. рублей.

**Задание 17.2. Санкт-Петербург**. В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет размере $S$ тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

– в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным $S$ тыс. рублей;

– суммы выплат в 2030 и 2031 годах равны по 360 тыс. рублей;

– к июлю 2031долг должен быть полностью выплачен.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

**Решение**. Здесь $x = 360$ тыс. рублей, $b = 1{,}2 = \frac{6}{5}$. Полученное в решении предыдущей задачи соотношение $S \cdot b^2 = x(b+1)$ позволяет нам найти $S$. $S = \frac{x(b+1)}{b^2} = 550$ тыс. рублей.

Тогда общая сумма выплат равна

$3 \cdot \frac{r}{100} \cdot S + 2 \cdot x = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 550 + 2 \cdot 360 =$
$= 1050$ тыс. рублей.

**Ответ**: 1050 тыс. рублей.

**Задание 17.3. Краснодар.** В кредит взяли 220 тыс. рублей на 5 лет под $t$% годовых.

На конец первых трёх лет задолженность остаётся неизменной и равной 220 тысячам рублей, а выплаты последних двух лет равны. На конец пятого года кредит должен быть погашен.

Найдите $t$, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 420 тыс. рублей.

**Комментарий.** В первых откликах на эту задачу были жалобы на сложные вычисления. Но если ввести стандартную для экономических задач переменную $b = 1 + \frac{t}{100}$, то задача сводится к решению квадратного уравнения $55b^2 - 21b - 54 = 0$. Дискриминант здесь равен $12321 = 111^2$, $b = 1{,}2 \Rightarrow t = 20\%$. Разве это запредельно трудно? Вероятно, уравнение составляли для неизвестной $t$, а не для $b$. Это и могло привести к трудным вычислениям.

**Ответ**: 20%.

В Москве давали задачу про три равных платежа. Собственно говоря, именно с такого типа задач начинают обычно изучение задания **№17**. Так что «от тайги до британских морей» всё же был регион, где задание **№17** отличалось от рассмотренных выше. И мне кажется, что отличалось оно в более лёгкую сторону, как, впрочем, и задания **№18**, к рассмотрению которых мы скоро приступим. Почему-то вспоминается экономический (или юридический) термин «недобросовестная конуренция». Высказываются мнения, что это делается для того, чтобы облегчить москвичам поступление в ВУЗы столицы. Я не знаю, что и для чего задумано, но на мой взгляд, это бьёт в первую очередь по интересам сильных (не только московских) учеников. Они заинтересованы в честных и сложных экзаменах, на которых смогут показать свой высокий уровень. А что происходит? Практически любой средних способностей выпускник не более, чем за час может обеспечить себе 80 баллов, приведя первые 12 правильных ответов на задачи из открытого банка и оформив три очень стандартных задания (**13**, **15** и **17**). А если он, воспользовавшись опытом Дальнего Востока «решит» **№18**, то у него станет уже 88 баллов. Добавив два первичных балла за простейшие пункты в **№19**, он достигает отметки 92**.** Эта последняя задача перестала быть сложной, стала повторяться. Но вместо того, чтобы её «обновить» и усложнить происходит что-то другое. Например, на ЕГЭ – 2019 мало кому в Москве удалось получить больше 2 баллов из четырёх возможных за правильно решенную несложную последнюю задачу. Апелляции не удавались. Похоже, что было принято такое решение: больше двух за неё не ставить. Другого объяснения я не вижу. В результате таких экзаменов сильные утрачивают своё преимущество. Смогут ли они поступить туда, куда хотят, где их были бы рады увидеть?

**Задание 17.4. Москва.**

В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга одним платежом.

Найдите общую сумму выплат, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 34150 рублей больше суммы взятого кредита.

**Ответ**: 199650 рублей.

На стриме, который я смотрел утром 10 июля, условие задачи с параметром было искажено, в левой части второго уравнения вместо суммы квадратов была разность. Конечно, и в таком виде система решается, но было понятно, что нарушена гармония, в условии что-то не так, и что кроме очевидной ошибки со знаками, могут быть и другие искажения. Ближе к вечеру появились надёжные условия. Но ведь наверняка были «стримы», на которых ещё ранним утром разбирались задания **№18** с точными условиями.

**Задание 18.1. Дальний Восток.**

Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\log_5\left(16-y^2\right)=\log_5\left(16-a^2x^2\right),\\ x^2+y^2=6x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Решение.**

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}\log_5\left(16-y^2\right)=\log_5\left(16-a^2x^2\right),\\ x^2+y^2=6x+4y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16-y^2>0,\\ 16-y^2=16-a^2x^2,\\ x^2-6x+y^2-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4<y<4,\\ y^2=a^2x^2,\\ (x-3)^2+(y-2)^2=13.\end{cases}$$

Третье уравнение системы, это уравнение окружности, а второе – пучок прямых, проходящих через начало координат. Поэтому графический подход здесь очень оправдан, но аналитическое решение тоже совсем не сложное и к тому же, проще в оформлении. Для него, кстати, третье уравнение удобнее рассматривать без выделения полных квадратов. Но уравнение окружности поможет нам заметить, что при $y\le-4,\ (y-2)^2\ge16>13.$ Поэтому, вместо условия $-4<y<4$, будем проверять только условие $y<4$.

Сначала рассмотрим случай $a=0$. При этом значении параметра система имеет как раз два различных решения: $(0;0)$ и $(6;0)$.

Пусть теперь $a\neq 0$. Заметим, что для любого значения параметра $a$, пара чисел $(0;0)$ является одним из решений исходной системы. Другие решения (в которых $y\neq 0$, так как $y=0\Rightarrow x=0$, а эту пару мы уже учли) будем искать, рассмотрев два случая.

В первом случае получаем:

$$\begin{cases} y<4, \\ x=\dfrac{y}{a}, \\ \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{6y}{a}+y^2-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ x=\dfrac{y}{a}, \\ y^2\left(a^2+1\right)-6ay-4a^2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ y=\dfrac{6a+4a^2}{a^2+1}, \\ x=\dfrac{y}{a}=\dfrac{6+4a}{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6a+4a^2}{a^2+1}<4, \\ y=\dfrac{6a+4a^2}{a^2+1}, \\ x=\dfrac{y}{a}=\dfrac{6+4a}{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{2}{3}, \\ y_1=\dfrac{6a+4a^2}{a^2+1}, \\ x_1=\dfrac{6+4a}{a^2+1}. \end{cases}$$

Заметим, что если $a=-\dfrac{3}{2}$, то решение $(x_1;y_1)$ совпадает с уже найденным решением $(0;0)$.

Во втором случае:

$$\begin{cases} y<4, \\ x=-\dfrac{y}{a}, \\ \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{6y}{a}+y^2-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ x=-\dfrac{y}{a}, \\ y^2\left(a^2+1\right)+6ay-4a^2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ y=\dfrac{-6a+4a^2}{a^2+1}, \\ x=-\dfrac{y}{a}=\dfrac{6-4a}{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-6a+4a^2}{a^2+1}<4, \\ y=\dfrac{-6a+4a^2}{a^2+1}, \\ x=-\dfrac{y}{a}=\dfrac{6-4a}{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{2}{3}, \\ y_2=\dfrac{-6a+4a^2}{a^2+1}, \\ x_2=\dfrac{6-4a}{a^2+1}. \end{cases}$$

Если $a=\dfrac{3}{2}$, то решение $(x_2;y_2)$ совпадает с уже найденным решением $(0;0)$.

Решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ различны, так как равенство $x_1=\dfrac{6+4a}{a^2+1}=\dfrac{6-4a}{a^2+1}=x_2$ возможно только при $a=0$, а эти решения найдены при $a\neq 0$.

Выделенные нами значения параметра $a=\pm\dfrac{3}{2}$ соответствуют случаям касания прямых и окружности, если рассматривать геометрическую интерпретацию исходной системы.

Таблица поможет нам выбрать те значения параметра $a$, при которых исходная система имеет ровно два различных решения. В первой строке – значения параметра а, во второй – решения системы при этих значениях.

| $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ | $-\frac{3}{2}$ | $\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right]$ | $\left(-\frac{2}{3};0\right)$ | $\{0\}$ | $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ | $\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$ | $\frac{3}{2}$ | $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x_1;y_1)$<br>$(0;0)$ | $(0;0)$ | $(x_1;y_1)$<br>$(0;0)$ | $(x_1;y_1)$<br>$(x_2;y_2)$<br>$(0;0)$ | $(0;0)$<br>$(6;0)$ | $(x_1;y_1)$<br>$(x_2;y_2)$<br>$(0;0)$ | $(0;0)$ | $(x_2;y_2)$<br>$(0;0)$ | $(0;0)$ |

**Ответ**: $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right);\ \left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right];\ \{0\};\ \left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right);\ \left(\frac{3}{2};+\infty\right).$

**Задание 18.2. Санкт-Петербург**.

Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\log_{11}\left(16-y^2\right)=\log_{11}\left(16-a^2x^2\right),\\ x^2+y^2=2x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Решение**.

Воспользуйтесь, как шаблоном, решением задачи **18.1**, а потом сверьтесь с моим.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}\log_{11}\left(16-y^2\right)=\log_{11}\left(16-a^2x^2\right),\\ x^2+y^2=2x+4y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16-y^2>0,\\ 16-y^2=16-a^2x^2,\\ x^2-2x+y^2-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4<y<4,\\ y^2=a^2x^2,\\ (x-1)^2+(y-2)^2=5.\end{cases}$$

Третье уравнение системы, это уравнение окружности, а второе – пучок прямых, проходящих через начало координат. Для аналитического решения, а мы будем решать аналитически, третье уравнение удобнее рассматривать без выделения полных квадратов. Но уравнение окружности поможет нам заметить, что при $y\le-4$, $(y-2)^2\ge16>5$. Поэтому, вместо условия $-4<y<4$, будем проверять только условие $y<4$.

Сначала рассмотрим случай $a=0$. При этом значении параметра система имеет как раз два различных решения: $(0;0)$ и $(2;0)$.

Пусть теперь $a\ne0$. Заметим, что для любого значения параметра $a$, пара чисел $(0;0)$ является одним из решений исходной системы. Другие решения (если они есть) найдём, рассмотрев два случая.

В первом случае получаем:

$$\begin{cases}y<4,\\ x=\frac{y}{a},\\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{2y}{a}+y^2-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ x=\dfrac{y}{a}, \\ y^2\left(a^2+1\right)-2ay-4a^2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ y=\dfrac{2a+4a^2}{a^2+1}, \\ x=\dfrac{y}{a}=\dfrac{2+4a}{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a+4a^2}{a^2+1}<4, \\ y=\dfrac{2a+4a^2}{a^2+1}, \\ x=\dfrac{2+4a}{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<2, \\ y_1=\dfrac{2a+4a^2}{a^2+1}, \\ x_1=\dfrac{2+4a}{a^2+1}. \end{cases}$$

Заметим, что если $a=-\dfrac{1}{2}$, то решение $(x_1;y_1)$ совпадает с уже найденным решением $(0;0)$.

Во втором случае:

$$\begin{cases} y<4, \\ x=-\dfrac{y}{a}, \\ \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{2y}{a}+y^2-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ x=-\dfrac{y}{a}, \\ y^2\left(a^2+1\right)+2ay-4a^2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y<4, \\ y=\dfrac{-2a+4a^2}{a^2+1}, \\ x=-\dfrac{y}{a}=\dfrac{2-4a}{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2a+4a^2}{a^2+1}<4, \\ y=\dfrac{-2a+4a^2}{a^2+1}, \\ x=-\dfrac{y}{a}=\dfrac{2-4a}{a^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>-2, \\ y_2=\dfrac{-2a+4a^2}{a^2+1}, \\ x_2=\dfrac{2-4a}{a^2+1}. \end{cases}$$

Если $a=\dfrac{1}{2}$, то решение $(x_2;y_2)$ совпадает с уже найденным решением $(0;0)$.

Решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ различны, так как равенство $x_1=\dfrac{2+4a}{a^2+1}=\dfrac{2-4a}{a^2+1}=x_2$ возможно только при $a=0$, а эти решения найдены при $a\neq 0$.

Выделенные нами значения параметра $a=\pm\dfrac{1}{2}$ соответствуют случаям касания прямых и окружности, если рассматривать геометрическую интерпретацию исходной системы.

Таблица поможет нам выбрать те значения параметра $a$, при которых исходная система имеет ровно два различных решения. В первой строке – значения параметра а, во второй – решения системы при этих значениях.

| $(-\infty;-2]$ | $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ | $\{0\}$ | $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2};2\right)$ | $[2;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x_1;y_1)$ $(0;0)$ | $(x_1;y_1)$ $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ | $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ | $(x_1;y_1)$ $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ | $(0;0)$ $(2;0)$ | $(x_1;y_1)$ $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ | $(x_1;y_1)$ $(0;0)$ | $(x_1;y_1)$ $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ | $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ |

**Ответ**: $(-\infty;-2]$; $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; $\{0\}$; $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; $[2;+\infty)$.

**Задание 18.3. Сибирь.**

Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\sqrt{36-y^2}=\sqrt{36-a^2x^2},\\ x^2-4x=6y-y^2\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Решение**.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}\sqrt{36-y^2}=\sqrt{36-a^2x^2},\\ x^2-4x=6y-y^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}36-y^2\ge 0,\\ 36-y^2=36-a^2x^2,\\ x^2-4x+y^2-6y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6\le y\le 6,\\ y^2=a^2x^2,\\ (x-2)^2+(y-3)^2=13.\end{cases}$$

Третье уравнение системы, это уравнение окружности, а второе – пучок прямых, проходящих через начало координат. Уравнение окружности поможет нам заметить, что при $y\le -6$, $(y-3)^2\ge 81>13$. Поэтому, вместо условия $-6\le y\le 6$ будем проверять только условие $y\le 6$. Вот оно отличие от задач с логарифмами! В них мы проверяли выполнение строгого неравенства.

Сначала рассмотрим случай $a=0$. При этом значении параметра система имеет как раз два различных решения: $(0;0)$ и $(4;0)$.

Пусть теперь $a\ne 0$. Заметим, что для любого значения параметра $a$, пара чисел $(0;0)$ является одним из решений исходной системы. Другие решения (если они есть) найдём, рассмотрев два случая.

В первом случае получаем:

$$\begin{cases}y\le 6,\\ x=\dfrac{y}{a},\\ \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{4y}{a}+y^2-6y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\le 6,\\ x=\dfrac{y}{a},\\ y^2\left(a^2+1\right)-4ay-6a^2y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\le 6,\\ y=\dfrac{4a+6a^2}{a^2+1},\\ x=\dfrac{y}{a}=\dfrac{4+6a}{a^2+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4a+6a^2}{a^2+1}\le 6,\\ y=\dfrac{4a+6a^2}{a^2+1},\\ x=\dfrac{4+6a}{a^2+1}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a\le \dfrac{3}{2}, \\ y_1=\dfrac{4a+6a^2}{a^2+1}, \\ x_1=\dfrac{4+6a}{a^2+1}. \end{cases}$$

Заметим, что если $a=-\dfrac{3}{2}$, то решение $(x_1;y_1)$ совпадает с уже найденным решением $(0;0)$.

Во втором случае:

$$\begin{cases} y\le 6, \\ x=-\dfrac{y}{a}, \\ \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{4y}{a}+y^2-6y=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y\le 6, \\ x=-\dfrac{y}{a}, \\ y^2\left(a^2+1\right)+4ay-6a^2y=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y\le 6, \\ y=\dfrac{-4a+6a^2}{a^2+1}, \\ x=-\dfrac{y}{a}=\dfrac{4-6a}{a^2+1} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{-4a+6a^2}{a^2+1}\le 6, \\ y=\dfrac{-4a+6a^2}{a^2+1}, \\ x=\dfrac{4-6a}{a^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a\ge -\dfrac{3}{2}, \\ y_2=\dfrac{-4a+6a^2}{a^2+1}, \\ x_2=\dfrac{4-6a}{a^2+1}. \end{cases}$$

Если $a=\dfrac{3}{2}$, то решение $(x_2;y_2)$ совпадает с уже найденным решением $(0;0)$.

Решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ различны, так как равенство $x_1=\dfrac{4+6a}{a^2+1}=\dfrac{4-6a}{a^2+1}=x_2$ возможно только при $a=0$, а эти решения найдены при $a\ne 0$.

Выделенные нами значения параметра $a=\pm\dfrac{3}{2}$ соответствуют случаям касания прямых и окружности, если рассматривать геометрическую интерпретацию исходной системы.

Таблица поможет нам выбрать те значения параметра $a$, при которых исходная система имеет ровно два различных решения. В первой строке – значения параметра а, во второй – решения системы при этих значениях.

| $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$; | $\left[-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$ | $-\frac{2}{3}$ | $\left(-\frac{2}{3};0\right)$ | $\{0\}$ | $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ | $\frac{2}{3}$ | $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$ | $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x_1;y_1)$<br>$(0;0)$ | $(x_1;y_1)$<br>$(x_2;y_2)$<br>$(0;0)$ | $(x_2;y_2)$<br>$(0;0)$ | $(x_1;y_1)$<br>$(x_2;y_2)$<br>$(0;0)$ | $(0;0)$<br>$(4;0)$ | $(x_1;y_1)$<br>$(x_2;y_2)$<br>$(0;0)$ | $(x_1;y_1)$<br>$(0;0)$ | $(x_1;y_1)$<br>$(x_2;y_2)$<br>$(0;0)$ | $(x_2;y_2)$<br>$(0;0)$ |

**Ответ**: $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$; $\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$; $\{0\}$; $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$; $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

**Задание 18.4. Краснодар**

Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2},\\ x^2+y^2=6x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Указание.**

Действуя по проверенным образцам, получаем результаты, которые сводим в таблицу:

| $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$; | $-\frac{3}{2}$ | $\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$ | $\left[-\frac{2}{3};0\right)$ | $\{0\}$ | $\left(0;\frac{2}{3}\right]$ | $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$ | $\frac{3}{2}$ | $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x_1;y_1)$ $(0;0)$ | $(0;0)$ | $(x_1;y_1)$ $(0;0)$ | $(x_1;y_1)$ $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ | $(0;0)$ $(6;0)$ | $(x_1;y_1)$ $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ | $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ | $(0;0)$ | $(x_2;y_2)$ $(0;0)$ |

**Ответ**: $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$; $\{0\}$; $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

**Задание 18.5. Москва.**

Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\log_7\left(a-y^2\right)=\log_7\left(a-x^2\right),\\ x^2+y^2=4x+6y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Решение**.

Здесь всё настолько просто, что можно попробовать обойтись без таблицы. На всякий случай сразу отметим, что так как здесь $a-y^2>0$, то $a>0$.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}\log_7\left(a-y^2\right)=\log_7\left(a-x^2\right),\\ x^2+y^2=4x+6y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-x^2>0,\\ a-x^2=a-y^2,\\ x^2+y^2-4x-6y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>x^2,\\ x^2=y^2,\\ x^2+y^2-4x-6y=0.\end{cases}$$

Далее рассматриваем два случая, решаем две системы:

$$\begin{cases}a>x^2,\\ x=-y,\\ 2x^2+2x=0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}a>x^2,\\ x=y,\\ 2x^2-10x=0.\end{cases}$$

В результате находим 3 различных решения: $(0;0)$ и $(-1;1)$ из первой системы; $(0;0)$ и $(5;5)$ из второй. Как видим, решение $x_1=y_1=0$ является общим для обоих случаев если $a>0$. Для второй пары $(-1;1)$ условие $a>x^2$ выполнится при $a>1$.

Для третьей пары $(5;5)$ условие $a>x^2$ выполнится при $a>25$.

Возможны три ситуации:

$$\begin{cases}0<a\le 1,\\ x_1=y_1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}1<a\le 25,\\ \left[\begin{array}{l}x_1=y_1=0,\\ x_2=-1, y_2=1;\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>25,\\ \left[\begin{array}{l}x_1=y_1=0,\\ x_2=-1, y_2=1,\\ x_3=y_3=5.\end{array}\right.\end{cases}$$

Нам надо, чтобы система имела ровно два различных решения, поэтому $1<a\le 25$.

**Ответ**: $(1;25]$.

В большинстве работ москвичей, сканы которых я видел (во всех, кроме одной, где встретилась **18.6)**, было именно такое условие. Но знаю, что были почти такие, но с основанием логарифмов, равным 3. Понятно, что их ответ, и их решение полностью совпадают с приведёнными. Допускаю, что у всех сидящих в одной аудитории могли быть одинаковые с точностью до оснований логарифмов задания №18. Во всяком случае, в прошлом году бывало, что выпускники с сожалением делились на форумах тем, что у сидящих перед ними были такие же задачи, но списать не удалось, так как те их не решили. Чем это плохо для сильных учеников, я уже говорил. Не давайте списывать у себя!

**Задание 18.6. Москва.**

Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\log_{13}\left(a-y^2\right)=\log_{13}\left(a-x^2\right),\\ x^2+y^2=2x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Ответ**: $(1;9]$.

А это условие есть на сайте kotolis.ru/realegemat2020:

**Задание 18.7. Москва.**

Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\log_{11}\left(a-y^2\right)=\log_{11}\left(a-x^2\right),\\ x^2+y^2=2x+6y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Ответ**: $(1;16]$.

Где давались варианты 406 и 409, я пока не знаю.

**Задание 18.8. Вариант 406.**

Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{2ay-a^2y^2},\\ y=x^2\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

**Решение**.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{2ay-a^2y^2},\\ y=x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-x^2\ge 0,\\ y=x^2,\\ 2x-x^2=2ay-a^2y^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2,\\ y=x^2,\\ a^2y^2-x^2=2ay-2x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2,\\ y=x^2,\\ (ay-x)(ay+x-2)=0.\end{cases}$$

Последнее уравнение системы можно было преобразовать иначе, отняв от правой и левой частей по единице и выделив полные квадраты:

$$2x-x^2=2ay-a^2y^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+2x-x^2=-1+2ay-a^2y^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ay-1)^2-(x-1)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ay-x)(ay+x-2)=0.$$

Заметим ещё, что так как $y=x^2\ge 0$ и $2ay-a^2y^2\ge 0$, то $a\ge 0$.

Если $a=0$, то

$$2x-x^2=2ay-a^2y^2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Тогда исходная система имеет бесконечное количество пар решений $(0;y);(2;y)$, так как $y$ может в этом случае принимать любое значение. Далее разбираем случай, когда $a>0$.

$$\begin{cases}0\le x\le 2,\\ y=x^2,\\ (ay-x)(ay+x-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2,\\ y=x^2,\\ \left[\begin{aligned}&ay-x=0,\\ &ay+x-2=0\end{aligned}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2,\\ y=x^2,\\ \left[\begin{aligned}&x(ax-1)=0,\\ &ax^2+x-2=0.\end{aligned}\right.\end{cases}$$

Найдём корни совокупности двух уравнений $\left[\begin{aligned}&x(ax-1)=0,\\ &ax^2+x-2=0.\end{aligned}\right.$

$x(ax-1)=0\Rightarrow x_1=0;x_2=\frac{1}{a}$. Первый корень не зависит от параметра и удовлетворяет ограничениям $0\le x\le 2$. Для второго (положительного) корня должно выполняться неравенство $x_2=\frac{1}{a}\le 2\Rightarrow a\ge\frac{1}{2}$.

$ax^2+x-2=0\Rightarrow$

$x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{2a}$. Эти корни разных знаков. Отрицательный корень $x_4$ нам не подходит, а для положительного $x_3$ должно выполняться неравенство $x_3=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a}\le 2\Rightarrow a>0$.

Три корня, удовлетворяющие исходной системе найдены, соответствующие им значения $y=x^2$ определяются однозначно. Но ещё надо не забыть исключить тот случай, когда $x_2=x_3$. Итак, $x_2\ne x_3\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{1}{a}\ne\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a}\Rightarrow a\ne 1.$$

**Ответ:** $\left[\frac{1}{2};1\right);(1;+\infty)$.

**Задание 18.9. Вариант 409.**

Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4ay-a^2y^2},\\ y=x^2\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

**Ответ**: $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Вариант 991 – для учеников, имеющих проблемы со здоровьем, подтверждённые необходимыми справками. Но задание **18** в нём мне не кажется более простым, чем те, что предлагались в Москве.

**Задание 18.10. Вариант 991.**

Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\sqrt{4-y^2}=\sqrt{4-4x^2},\\ xy+a^2=ax+ay\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Решение**.

$$\begin{cases}\sqrt{4-y^2}=\sqrt{4-4x^2},\\ xy+a^2=ax+ay\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4-4x^2\ge 0,\\ y^2=4x^2,\\ (x-a)(y-a)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ (y-2x)(y+2x)=0,\\ (x-a)(y-a)=0.\end{cases}$$

Если $a=0$, то система имеет единственное решение $x=y=0$. Следовательно, $a\neq 0$.

В этом случае, на роль решений исходной системы претендуют четыре пары несовпадающих решений: $(a;2a)$; $(a;-2a)$; $\left(\frac{a}{2};a\right)$; $\left(-\frac{a}{2};a\right)$. Решениями будут те из них, для которых выполняется условие $-1\leq x\leq 1$. Это условие для первых двух пар принимает вид $-1\leq a\leq 1$, для двух последних пар это условие равносильно $-2\leq a\leq 2$.

Таким образом, исходная система имеет четыре различных решения, если $a\in[-1;0)$; $(0;1]$ и два различных решения, если $a\in[-2;-1);(1;2]$.

**Ответ**: $[-2;-1);(1;2]$.

## Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

### Тепловой хаос вернул квантовую систему в неизвестное прошлое

В продолжение нашумевшего прошлогоднего эксперимента по «обращению времени» квантовой системы в известном состоянии, двое физиков из МФТИ и Аргоннской национальной лаборатории опубликовали в журнале Communications Physics новую, не менее парадоксальную теоретическую работу. В ней изложена процедура обращения во времени произвольного, неизвестного квантового состояния. В будущем подобные операции послужат для контроля работы продвинутых квантовых компьютеров.

Один из авторов исследования, Валерий Винокур из Аргоннской национальной лаборатории, поясняет принцип в основе обоих исследований: «Один из наших прорывов — осознание и реализация на практике идеи, что квантовый компьютер можно использовать не как вычислитель, а как физический объект, кусочек материального мира, и эволюцией его состояния во времени можно поразительным образом управлять».

В эксперименте, который в прошлом году СМИ окрестили российской «машиной времени», физики на мгновение развернули стрелу времени для квантового чипа. А именно, запущенный в упорядоченном состоянии квантовый компьютер короткое время эволюционировал в сторону нарастания хаоса, после чего на чип воздействовали алгоритмом обращения времени. Как следствие, компьютер стал выполнять все прежние действия с точностью до наоборот и в конце концов пришел в исходное упорядоченное состояние.

Подвох состоял в том, что нужно заранее знать состояние компьютера в момент пуска алгоритма обращения времени — операция не универсальна. «Даже это воспринималось как своего рода волшебство, но наша усовершенствованная процедура — это, если угодно, волшебный джинн нового порядка, — объясняет Винокур.

https://zanauku.mipt.ru/2020/09/07/teplovoj-haos-vernul-kvantovuyu-sistemu-v-neizvestnoe-proshloe/