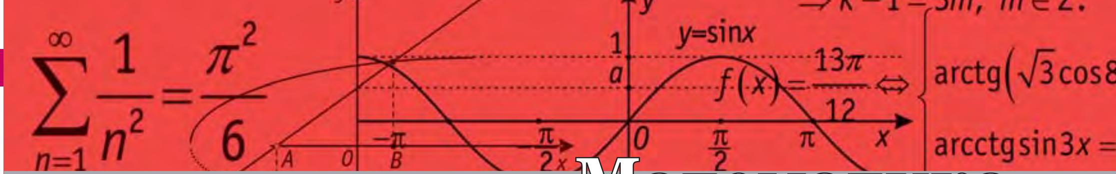

Дроздов Виктор Борисович
Преподаватель физики Медицинского университета г. Рязани, Почётная грамота. Министерства просвещения СССР 1979 г.

Пентаграмма как геометрический объект

В статье рассказывается о правильном пятиугольнике и связанной с ним пятиконечной звезде (пентаграмме), о соотношении отрезков, взаимосвязи площадей; в заключение приводятся исторические сведения.

Уникальные свойства правильного пятиугольника

Очевидно, что в правильном пятиугольнике никакие две его диагонали не параллельны и никакие три не проходят через одну точку (см. рис. 1). Ясно также, что правильный пятиугольник – единственный из правильных многоугольников (с числом сторон более четырёх), у которого все диагонали равны.

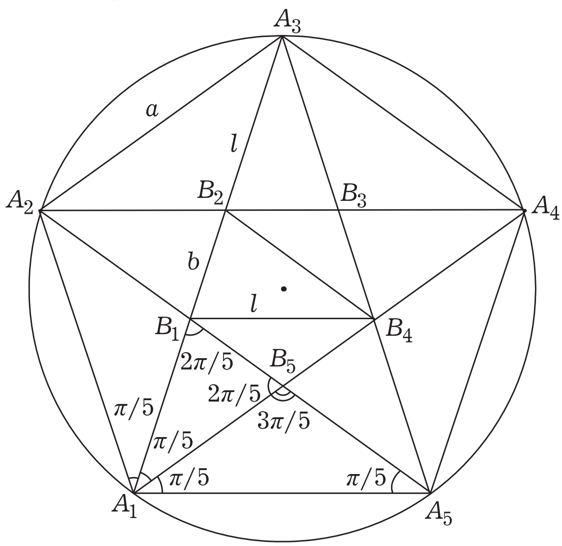

Рис. 1

Рассмотрим теперь выпуклый n-угольник, удовлетворяющий отмеченным для правильного пятиугольника свойствам.

Число диагоналей этого многоугольника равно числу сочетаний из n элементов по два минус число сторон, т. е.

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Иное рассуждение: из любой вершины n – угольника можно провести $n - 3$ диагонали, а поскольку каждую диагональ нужно считать один раз, то приходим к тому же результату.

Определим число точек пересечения диагоналей n-угольника. Любая такая точка полностью определяется двумя пересекающимися диагоналями, а каждые две диагонали однозначно определяются четырьмя вершинами многоугольника (которые они соединяют). Обратно, каждые четыре вершины n-угольника определяют одну точку пересечения диагоналей. Поэтому искомое число равно числу сочетаний из n элементов по четыре:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Найдём многоугольник, в котором число диагоналей равно числу сторон.

Из уравнения $\frac{n(n-3)}{2} = n$ получим

$$n = 5.$$

А теперь найдём многоугольник, в котором число диагоналей равно числу точек пересечения между ними. Уравнение

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n(n-3)}{2}$$

легко приводится к квадратному

$$n^2 - 3n - 10 = 0,$$

имеющему тот же корень $n = 5$.

Отсюда следует, что пятиугольник является единственным из многоугольников (с наложенными выше условиями на диагонали), в котором совпадают все три числа: сторон, диагоналей и точек пересечения между ними. Это, естественно, относится и к правильному пятиугольнику. Следовательно, из всех правильных n-угольников правильный пятиугольник – единственный, в котором точки пересечения между диагоналями образуют внутренний правильный пятиугольник, подобный внешнему (исходному). А каков коэффициент подобия? Об этом в следующем пункте.

Алгебра отрезков

Чтобы излишне не перегружать статью, очевидные величины углов и очевидные равенства и параллельность отрезков не аргументируется. Это легко сделает читатель.

Обозначим длины отрезков:

a – длина стороны исходного пятиугольника;

d – длина диагонали исходного пятиугольника;

b – длина стороны внутреннего пятиугольника;

l – длина «луча» звезды, равная диагонали внутреннего пятиугольника.

Совершенно ясно, что:

$$\begin{cases} a = b + l; \\ d = b + 2l; \\ d = a + l. \end{cases}$$

Рассмотрим подобные треугольники:

$\Delta A_1B_1B_5 \sim \Delta A_1B_2B_4$, откуда

$$\frac{l}{b} = \frac{l+b}{l} \text{ и } \left(\frac{l}{b}\right)^2 - \frac{l}{b} - 1 = 0.$$

$\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta A_1B_5A_5$, откуда

$$\frac{a}{a+l} = \frac{l}{a} \text{ и } \left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{a}{l} - 1 = 0.$$

$\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta A_1B_5A_5$, откуда

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} \text{ и } \left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{d}{a} - 1 = 0.$$

Итак, величины $\frac{l}{b}$, $\frac{a}{l}$, $\frac{d}{a}$ удовлетворяют одному и тому же квадратному уравнению $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ с положительным корнем $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, $\frac{l}{b} = \frac{a}{l} = \frac{d}{a} = \varphi$.

Отсюда вытекают равенства:

$$\begin{cases} a^2 = dl, \\ l^2 = ab, \\ al = bd. \end{cases}$$

Величина $\varphi = 1,618$ называется «золотым» сечением (точнее, характеризует его). Из рис. 1 видно, что если бо́льшая часть отрезка относится к меньшей, как весь отрезок относится к своей бо́льшей части, то это равное отношение как раз и есть φ.

Ясно, что $\varphi^2 = 1+\varphi$ и $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Две последние формулы очень удобны для преобразований без обращения к числовому значению φ. Это будет использовано в четвёртом пункте.

Вычислим, наконец, $\cos\frac{\pi}{5}$. Из треугольника $A_1A_3A_4$ по теореме косинусов $a^2 = 2d^2 - 2d^2\cos\frac{\pi}{5}$, откуда

$$\cos\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{d}\right)^2.$$

Но

$$\left(\frac{a}{d}\right)^2 = \frac{1}{\varphi^2} = (\varphi-1)^2 = \varphi^2 - 2\varphi + 1 = 2 - \varphi.$$

Значит, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Площадь правильного пятиугольника

Положив в известной формуле площади правильного n-угольника $S = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, $n = 5$, получим $S = \frac{5a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$. Осталось выразить в квадратных радикалах $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$. Это легко сделать, учитывая, что только что вычислен $\cos\frac{\pi}{5}$, а $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}$.

В результате получим $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$.

Следовательно, $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.

Интересно предложить для сравнения второй вариант вычисления: очевидно, что $S = S_{A_1A_3A_4} + 2S_{A_1A_2A_3}$, что сразу преобразуется к виду

$$S = \frac{1}{2}a\sqrt{d^2 - \frac{a^2}{4}} + d\sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

Подставляя сюда $d = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, найдём:

$$S = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

Отсюда сразу следует любопытное равенство:

$$\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Нам его обосновывать не надо. Но представим, что оно предложено «с чистого листа». Тогда равенство доказывается возведением обеих его частей в квадрат.

Алгебра площадей

Обозначим:

S_1 – площадь $\Delta A_1B_1B_5$ и равных ему.

S_2 – площадь $\Delta A_1B_5A_5$ и равных ему.

S_3 – площадь правильного пятиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5$.

S_4 – площадь звезды.

S – площадь правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Всё познаётся в сравнении. А сравнить две величины одной размерности – получить их безразмерное отношение. Будем делить на наименьшую площадь S_1.

Очевидно, что $\frac{S_2}{S_1} = \varphi$.

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{S_1 + 2S_{B_1B_4B_5}}{S_1} = 1 + \frac{2S_2}{S_1}\cdot\frac{1}{\varphi^2} = 1 + \frac{2}{\varphi} = 1 + 2(\varphi - 1) = 2\varphi - 1.$$

(Учитываем, что $\Delta B_1A_2B_2 = \Delta B_1B_2B_4$ и что площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия.)

$$\frac{S_4}{S_1} = \frac{5S_1 + S_3}{S_1} = 2\varphi + 4.$$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{5S_1 + 5S_2 + S_3}{S_1} = 7\varphi + 4.$$

Циркулем и линейкой

Сначала разделим данный отрезок AB в «золотом» сечении (см. рис. 2). Последовательность действий такова.

1. Делим отрезок AB пополам: $AC = BC$.
2. В точке B восстанавливаем перпендикуляр к AB и откладываем на нём отрезок $BD = AC$.
3. Соединяем точки A и D.
4. Из точки D опишем дугу радиусом DB, которая пересекает отрезок AD в точке E.
5. Отложим на отрезке AB отрезок $AF = AE$.

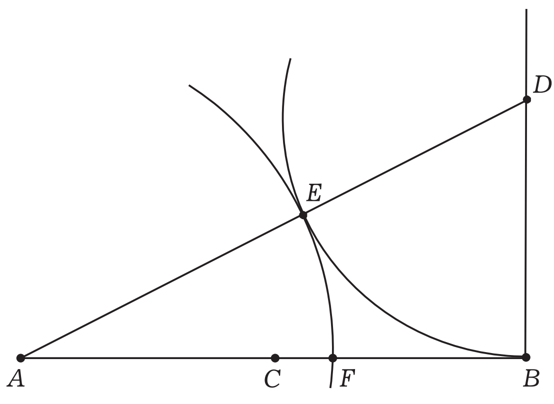

Рис. 2

Легко видеть, что точка F делит отрезок AB в «золотом» сечении. Если $AB = R$, то $AD = \frac{R}{2}\sqrt{5}$;

$$AE = AF = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

$$BF = R - \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{R}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Тогда $\frac{AF}{BF}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, что и требовалось доказать.

Один из способов построения правильного пятиугольника – это построить правильный десятиугольник, а затем соединить его вершины через одну (см. рис. 3). Правильный десятиугольник обладает таким свойством: сторона правильного вписанного десятиугольника равна бо́льшей части радиуса окружности, разделенного в «золотом» сечении.

Пусть хорда AB есть сторона правильного десятиугольника. В треугольнике AOB проведем биссектрису AC угла OAB. Величины углов очевидны и отмечены на рисунке. Из подобия треугольников AOB и ABC имеем пропорцию

$$AO : AB = AB : BC \text{, или}$$
$$AO : AB = OC : BC \text{, т. к.}$$
$$AB = AC = OC.$$

Требуемое доказано.

Итак:

1. Чертим окружность радиусом R.
2. Производим «золотое» сечение этого радиуса, как это описано выше.
3. От любой точки окружности откладываем циркулем десять раз бо́льшую часть «золотого» сечения радиуса.
4. Соединяем линейкой полученные точки через одну.

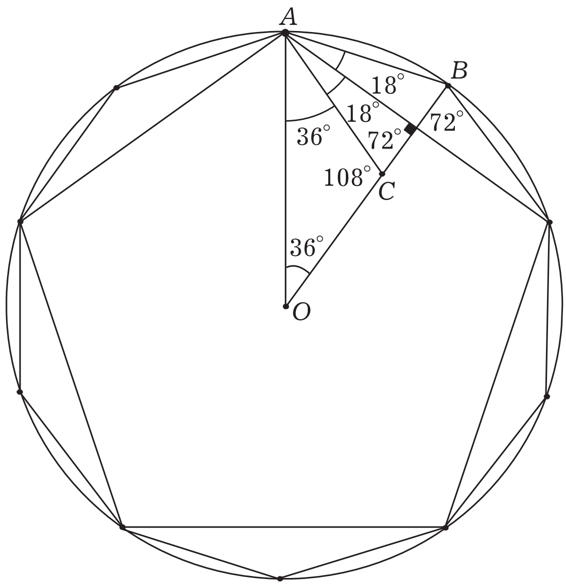

Рис. 3

Из глубины веков до наших дней

Из написанного выше видно, сколь замечательными геометрическими свойствами обладает правильный пятиугольник вместе с проведёнными в нём диагоналями. Пентаграмма (пятиконечная звезда) есть фигура, образованная совокупностью всех диагоналей правильного пятиугольника. Поэтому пентаграмма привлекла внимание людей уже в глубокой древности.

У древних римлян пятиконечная звезда была символом бога войны – Марса.

Изображения пентаграмм встречались на египетских статуях, в Вавилоне этот знак часто встречается на царских печатях.

У древних иудеев пентаграмма ассоциировалась со священным Пятикнижием.

Пентаграмма встречается на печатях Александра Македонского и Римского императора Константина I.

Пентаграмму использовали пифагорейцы в качестве отличительного знака принадлежности к их сообществу. Пифагор утверждал, что пентаграмма представляет собой математическое совершенство, так как заключает в себе «золотое» сечение.

Пятиконечная звезда находилась среди символов тамплиеров, встречалась в рисунках Леонардо да Винчи.

Представляет интерес место из трагедии «Фауст» Гёте (перевод Н. Холодковского):

«Мефистофель: Нет, трудновато выйти мне теперь. Тут кое-что мешает мне немного: волшебный знак у вашего порога.

Фауст: Не пентаграмма ль этому виной? Но как же, бес, пробрался ты за мной? Каким путём впросак попался?

Мефистофель: Изволили её вы плохо начертить, и промежуток в уголке остался. Там у дверей, и я свободно мог вскочить».

Красная пятиконечная звезда как символ мировой революции и единства всего мирового пролетариата («Пролетарии всех стран, соединяйтесь!») находилась на гербе СССР.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Российский геоход

Специалистами Томского политехнического университета и Федерального исследовательского центра угля и углехимии (Кемерово) создана мобильная установка, которая может прокладывать проход (туннель) в любом грунте (в том числе в лунном). Названа она геоходом.

От существующих сейчас горнопроходческих машин геоход отличается в лучшую сторону, благодаря новому принципу внедрения в грунт. У него нет ни гусениц, ни шагающих механизмов. Вместо них работают резцовые барабаны, ввинчивающиеся в препятствие и действующие подобно винту самолёта, и устройство вроде механических рук, отодвигающее раздробленный грунт в сторону.

Отсутствие массивных гусениц и использование в конструкции геохода композитных материалов значительно уменьшило его вес и увеличило маневренность – он движется не только по прямой траектории, но и по дугообразной, и даже с наклоном, причём с хорошей для проходческой машины скоростью до 6 м/ч. Управление этим «подземным роботом» дистанционное.

Испытание геохода проводится в Кемерово, где он должен «прорыть» бетонные (!) препятствия.