Лупашевская Василиса Юрьевна
Студентка IV курса математического факультета Московского педагогического государственного университета (МПГУ).

Олимпиадные задачи на целые числа

В статье разбираются задачи олимпиадного характера на целые числа. Приводятся несколько важных идей и поучительных технических приёмов, часто применяемых при решении подобных задач: признаки делимости и анализ остатков при делении квадратов и кубов на целые числа.

Начнём с двух, как окажется, несложных уравнений, при решении которых используется следующая идея: *квадрат целого числа x не может иметь остаток 2 при делении на 3.*

Убедимся в этом: число x может иметь при делении на 3 остатки 0, 1, 2; то есть его мы можем представить как $x=3k$, или $x=3k+1$, или $x=3k+2$. Рассмотрим квадраты этих чисел:

$$(3k)^2=9k^2=3(3k^2) \text{ — остаток } 0;$$

$$(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1 \text{ — остаток } 1;$$

$$(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1 \text{ — остаток } 1.$$

1. Решите в целых числах уравнение $3^n+8=x^2$. (Типовой вариант ЕГЭ.)

Если $n=0$, то $x^2=9$, получаем $x_1=3$, $x_2=-3$. Теперь рассмотрим уравнение $3^n+8=x^2$ при $n>1$: $x^2=3(3^{n-1}+2)+2$ – остаток 2 при делении на 3, следовательно, правая часть не может равняться квадрату целого числа. Поэтому при $n>1$ решений нет.

2. Найдите все пары натуральных чисел m и k, удовлетворяющих равенству $m!=k^2-24k+97$, где $m! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$. (Типовой вариант ЕГЭ.)

Выделяя в правой части полный квадрат, получаем $m!=(k-12)^2-47$, или $m!+47=(k-12)^2$. Если $m\geq 3$, то $m!$ делится на 3, а 47 при делении на 3 даёт остаток 2. При делении же на 3 правой части (квадрата целого числа) можно получить в остатке либо 0, либо 1, поэтому в этом случае решений нет. Осталось рассмотреть $m=1$ (убеждаемся, что здесь нет решения) и $m=2$, в этом случае $(k-12)^2=49$, и мы получаем ответ: $m=2$, $k=5$; $m=2$, $k=19$.

Здесь есть и другой путь решения, связанный с рассмотрением последней цифры числа. Заметим, что при $m\geq 5$ число $m!$ будет оканчиваться на 0, следовательно, последняя цифра числа $(m!+47)$ будет равняться семи. Правая часть (квадрат целого числа!) на эту цифру оканчиваться не может. Перебирая случаи $1\leq m\leq 4$, находим решения: $m=2$, $k=5$; $m=2$, $k=19$.

Согласитесь, как многому можно научиться, решая и разбирая эти две задачи! Выделение полного квадрата, рассмотрение остатков и последней цифры, ограниченный перебор случаев. Давайте рассмотрим ещё несколько задач с факториалами.

3. Натуральные числа n и k таковы, что число $n!/k!$ оканчивается на 2008. Докажите, что число n также оканчивается на 2008. (Региональный этап Всероссийской олимпиады, 2008, 11 класс.)

Т. к. $n!/k!=(k+1)(k+2)\ldots(n-1)(n)$, то на 2008 оканчивается произведение этих нескольких последовательных чисел. Их меньше пяти, иначе на конце будет цифра 0. Осталось убедиться, что произведения двух, трёх и четырёх последовательных чисел на 8 не оканчиваются. Опять последняя цифра! Следовательно, после сокращения остаётся только одно число, получается, что k и n – это два последовательных числа и поэтому $n!/k!=(k+1)=n$. А по условию задачи это число как раз и оканчивается на 2008. Что и требовалось доказать.

4. Натуральное число m таково, что существует факториал, оканчивающийся ровно m нулями, но не существует факториала, оканчивающегося $(m-1)$ нулями. Существует ли факториал, оканчивающийся ровно $(m+1)$ нулями? (И. Акулич, Турнир им. А.П. Савина, 1999.)

Обратим внимание на то, что число нулей, которыми оканчивается десятичная запись числа $n!$, равно степени пятёрки в каноническом разложении числа $n!$ на простые множители (это очевидно, поскольку в натуральном ряду числа, кратные 2, встречаются гораздо чаще, чем числа, кратные 5).

Пусть $n!$ – наименьший из факториалов, оканчивающийся на m нулей. Тогда n делится на 5 (иначе $(n-1)!$ тоже оканчивалось бы на m нулей). Учитывая, что не существует факториала, оканчивающегося $(m-1)$ нулями, делаем вывод, что n делится на 25. А тогда $(n+5)!$ оканчивается $(m+1)$ нулями, т. к. $n+5$ делится на 5, но не делится на 25.

5. Решите в натуральных числах уравнение $a!+b!+c!=d!$. (Районный этап Московской областной олимпиады, 1996.)

Пусть для определённости $a \le \le b \le c$. Из уравнения ясно, что $c < d$. Тогда $d \ge (c+1)$, или $d! \ge (c+1)!$. Но $(c+1)! = (c+1) \cdot c!$, и мы получаем цепочку неравенств: $3c! \ge a! + b! + c! = d! \ge (c+1)c!$. При $c > 2$ это не выполняется. При $c \le 2$, перебирая оставшиеся возможности, находим ответ: $a = b = c = 2$, $d = 3$.

То, что $a = b = c$, можно доказать иначе. Если $a < b \le c$, то в исходном уравнении все факториалы, кроме первого ($a!$), делятся на $b!$. Получаем противоречие. Если же $a = b \le c$, тогда $2a! + c! = d!$. Разделим все на $c!$. Получим $2a!/c! + 1 = d!/c!$. Число $2a!/c!$ может быть целым только в двух случаях: когда $a = c$ (здесь мы находим ответ) или когда $a = 1$, $c = 2$. Во втором случае решений нет.

6. Найдите все тройки натуральных чисел m, n и k, удовлетворяющие уравнению $5k! = m! - n!$. (ЕГЭ-2010, резервный день 21.06.10.)

Из условия задачи видно, что $m > n$ и $m > k$. Рассмотрим три случая: 1) $k > n$; 2) $k < n$; 3) $k = n$.

1) Пусть $k > n$. Но тогда левая часть уравнения делится на $k!$, а правая часть не делится.

2) Пусть $k < n$. Правая часть уравнения делится на $n!$. Учитывая то, что 5 – простое число, понимаем, что левая часть уравнения (то есть $5k!$) разделится на $n!$ только при $k = 4$ и $n = 5$. Получаем тогда $m! = 2 \cdot 5!$. Решений нет.

3) Пусть $k = n$. Получаем: $6 \cdot k! = m!$. Или иначе: $k! \cdot 6 = k! \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot m$.

Так как множитель 6 мы можем получить (представить) в подобном выражении лишь двумя способами ($6 = 6$ и $6 = 2 \cdot 3$), находим два решения:

$$m = 6,\ k = n = 5;$$
$$m = 3,\ k = n = 1.$$

7. Найдите все тройки чисел p, q, n, где число n – натуральное, а числа p и q – простые, удовлетворяющие уравнению $3(p^q + q^p) = n!$. (Региональный этап Всероссийской олимпиады, 2006, 11 класс.)

Без ограничения общности можно считать, что $p \ge q$. Рассмотрим три случая. Если $p \ge q \ge n$, то левая часть уравнения более чем в 6 раз превосходит правую. Если $p \ne q$ и $q \le n$, то правая часть уравнения делится на q, а левая – не делится. И последний случай. Пусть $p = q < n$. Получаем $6q^q = n!$. Одно решение легко подбирается: $p = q = 2$, $n = 4$. Других решений нет, так как при нечётных значениях q левая часть будет не меньше $162 - x$ ($q \ge 3$, $q^q \ge 27$) и не будет делиться на 4, а правая часть, если $n! \ge 162$, на 4 делится.

8. Каких чисел больше в первой тысяче, представимых или не представимых в виде $x^3 - y!$, где x и y – натуральные числа? (В. Сендеров, Н. Агаханов, турнир имени

А.П. Савина, 2006.) Приведём авторское решение.

При $y>5$ все числа $y!$ делятся на 9, а числа x^3 при делении на 9 дают лишь третью часть возможных остатков: 0, 1, 8. Поэтому при $y>5$ чисел $x^3-y!$ среди первой тысячи не более $333+1$. Если $y \le 5$, то $x^3 \le 1000+5!$, т. е. $x \le 10$. Поэтому каждый $y \le 5$ даёт не более 10 представимых чисел, т. е. всего представимых чисел с $y \le 5$ существует не более 50. Итак, всех представимых чисел не более $334+50=384$. Ответ: непредставимых чисел больше.

Две последние задачи достаточно трудные. В задаче №7 встретился куб целого числа. Вот какой совет даётся в книге «Ленинградские математические кружки» (С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин): «В задачах, в которых встречаются кубы целых чисел, бывает полезно перебрать остатки от деления на 7 или на 9 (и в том, и в другом случае возможны лишь три различных остатка: 0, 1, 6 и 0, 1, 8 соответственно)». Но «кубы» в задачах встречаются реже, чем «квадраты». Хотя в следующей задаче «куб» упоминается.

9. Пусть каждое из натуральных чисел k, $k+1$, $k+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число k делится на куб некоторого своего простого делителя. (Региональный этап Всероссийской олимпиады, 2007, 9 класс.)

Первая мысль: использовать то, что одно из трёх последовательных натуральных чисел делится на 3. Но задача на другую идею. Здесь удаётся применить другое важное свойство остатков: *квадрат числа не может иметь остаток 2 или 3 при делении на 4.*

Заметим, что если число k не является квадратом целого числа, то какой-то простой сомножитель q в разложении числа k будет повторяться нечётное число раз, не меньше трёх (т. к. число k делится на квадрат любого своего простого делителя). Таким образом, k разделится на q^3. Осталось доказать, что k не является квадратом.

Число k не может быть чётным, так как в этом случае чётным будет и число $k+2$. Но из двух подряд идущих чётных чисел лишь одно может делиться на $2^2=4$, а по условию нашей задачи каждое из натуральных чисел k, $k+1$, $k+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Поэтому число $(k+1)$ – чётное и делится на 4. Так как при делении на 4 квадрата целого числа можно получить в остатке только 0 или 1, а число k при делении на 4 даёт остаток 3, то оно не является квадратом и разделится на q^3.

А следующие задачи решите самостоятельно.

1. Решите в натуральных числах уравнение $n!+5n+13=k^2$. (Ответ: $n=2$, $k=5$.)

2. Решите в натуральных числах уравнение $x!=y^2-36y+281$. (Ответ: $x=3$, $y=25$; $x=3$, $y=11$.)

3. Доказать, что ни при каком натуральном n число $(3^n+2\cdot 17^n)$ не является квадратом натурального числа.

В этой задаче можно использовать тот факт, что *квадрат числа не может оканчиваться на числа 2, 3, 7, 8 (или иметь остатки 2, 3, 7, 8 при делении на 10)*. В этом можно убедиться самому или прочесть в различных учебниках.

4. Найдите целые решения уравнения $x^3+y^3=500$. (Олимпиада ВМК МГУ, 2000.) Если не знать того, о чём говорится в примечании к задаче №7, то, разложив левую часть на множители, можно перебирать различные случаи: $x+y=n$, $x^2-xy+y^2=m$, $nm=500$. Но вариантов здесь слишком много. (Ответ: решений нет.)

5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого $2009!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2009$ делится на каждое из чисел k^k при $k=1, 2,\ldots, n$. (Типовой вариант ЕГЭ.) (Ответ: $n=46$.)

6. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого число n^n не является делителем числа $2009!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2009$. (Типовой вариант ЕГЭ, а годом раньше эта задача была предложена 11-му классу (для числа 2008!) на олимпиаде высокого уровня – Московской математической.) Понятно, что зная ответ предыдущей задачи, мы знаем ответ и этой. (Ответ: $n=47$.) Решение доступно в Интернете.

7. Пусть A – множество таких натуральных чисел, которые записываются только с помощью цифр 1, 5 и 9, причём каждая цифра используется не менее одного раза. Может ли сумма 1001 различного числа из множества A быть полным квадратом? (Районный этап Московской областной олимпиады, 2003.) Трудная задача, но поняв, что общего у цифр 1, 5 и 9, вы поймёте, где искать противоречие. (Ответ: не может.)

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Рациональное предложение

Мальчик внимательно наблюдал, как старший брат крутил педали велотренажёра. Через несколько минут он обрадованно закричал:

– Я знаю, что тебе надо подарить! Колёса для твоего велосипеда, а то ты так и не уедешь.