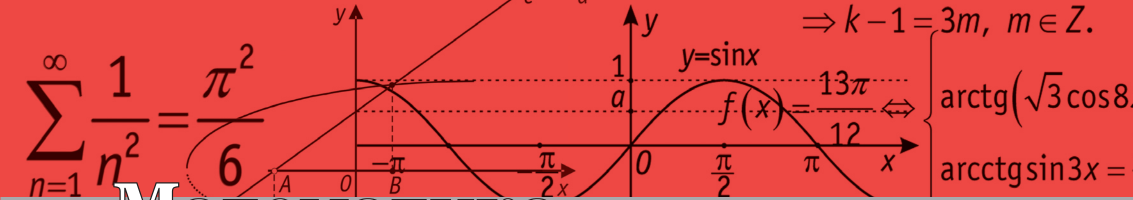
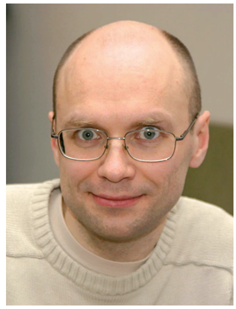


Вавилов Валерий Васильевич
*Профессор, зам. директора СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова.
Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ.*



Устинов Алексей Владимирович
Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИПМ ДВО РАН (Хабаровский филиал).

Окружности на клетчатой бумаге

В статье рассматриваются возможные расположения окружности на декартовой плоскости и выясняются случаи, когда для заданного натурального числа n окружность внутри себя содержит ровно n узлов клетчатой бумаги (целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$) или проходит ровно через n её узлов.

1. Теоремы Гаусса

Первое исследование решётки $\mathbb{Z}^2$ как математического объекта было, по-видимому, предпринято К. Гауссом – королём математики, как его называли современники. Решётка $\mathbb{Z}^2$, по определению, состоит из всех точек декартовой плоскости с целыми координатами. Эту решётку часто называют *клетчатой бумагой*.

Гаусс заинтересовался вопросом о том, как быстро с ростом R растёт число $N(R)$ точек с целыми координатами в круге

$$K(R)=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le R^2\right\},$$

где $R\ge 0$ – целое число. Число $N(R)$ равно площади фигуры $F(R)$, составленной из тех единичных квадратов решётки, у которых левый нижний угол лежит в $K(R)$ (см. рис. 1).

Так как наибольшее расстояние между двумя точками единичного квадрата не превосходит $\sqrt{2}$, то ясно, что все квадраты, которые пересекаются окружностью $x^2+y^2=R^2$, расположены в кольце

$$\left\{(x,y):\ \left(R-\sqrt{2}\right)^2\le x^2+y^2\le\left(R+\sqrt{2}\right)^2\right\}.$$

(На рис. 1 граница этого кольца изображена пунктиром при $R=4$.)

Площадь этого кольца равна

$$\pi\left(\left(R+\sqrt{2}\right)^2-\left(R-\sqrt{2}\right)^2\right)=4\pi\sqrt{2}R,$$

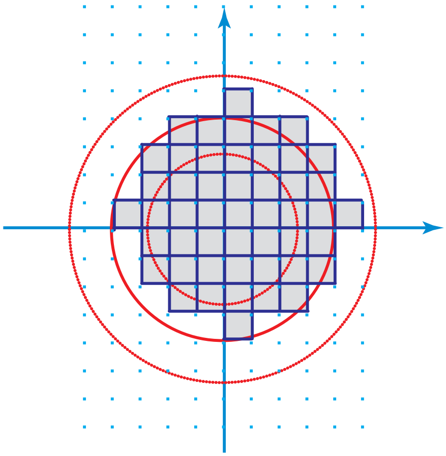


Рис. 1

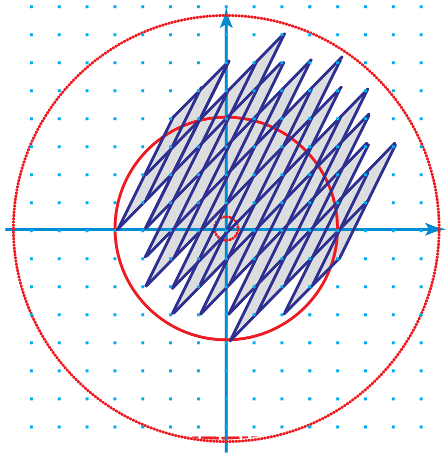


Рис. 2

и поэтому

$$\left|[F(R)] - \pi R^2\right| < 4\pi\sqrt{2}R,$$

где $[F]$ обозначает площадь фигуры F. Итак,

$$\left|\frac{N(R)}{R^2} - \pi\right| \leq \frac{4\pi\sqrt{2}}{R}.$$

Таким образом, при всех достаточно больших R имеем приближённое равенство

$$\frac{N(R)}{R^2} \approx \pi,$$

что в более точной форме можно записать в виде отдельного утверждения.

Теорема 1 (К. Гаусс). *Имеет место соотношение*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{R^2} = \pi. \qquad (1)$$

Как написано в книге [1], Гаусс численно проверил точность формулы (1), составив таблицу, где в последней строке приводятся приближённые значения для числа π:

R	10	20	30	100	200	300
$N(R)$	317	1257	2821	31417	125629	282697
π	3,17	3,1425	3,134	3,1417	3,140725	3,14107

С помощью равенства (1) можно доказать одно из основных свойств решётки $\mathbb{Z}^2$: площадь любого параллелограмма П, порождающего решётку $\mathbb{Z}^2$, равна 1. Такие параллелограммы называются *фундаментальными*. Говорят, что *параллелограмм П порождает решётку* $\mathbb{Z}^2$, если вся плоскость разбита (без наложений) на равные параллелограммы П, а множество вершин всех параллелограммов разбиения совпадает с множеством всех узлов целочисленной решётки.

Для доказательства сформулированного утверждения установим взаимно-однозначное соответствие между фундаментальными параллелограммами и узлами решётки $\mathbb{Z}^2$. Сопоставим каждому параллелограмму его самую левую вершину, а если таких вершин две, то из них выберем ту, которая имеет наименьшую ординату. Модуль разности площади круга $K(R)$ и площади фигуры F, состоящей из объединения всех параллелограммов, которые соответствуют узлам из $K(R)$, меньше площади кольца

$$\{(x,y):\ (R-a)^2 \le x^2+y^2 \le (R+a)^2\},$$

где a – наибольшая диагональ параллелограмма Π (см. рис. 2, на котором $R=4$ и $a=\sqrt{13}$). Если $[\Pi]=\Delta$, то

$$[F]=\Delta\cdot N(R)$$

и, следовательно,

$$\left|\Delta\cdot N(R)-\pi R^2\right|<$$

$$<\pi\left((R+a)^2-(R-a)^2\right)=4a\pi R.$$

Значит,

$$\left|\frac{N(R)}{R^2}-\frac{\pi}{\Delta}\right|\le\frac{4a\pi}{R\Delta}.$$

Устремляя R к бесконечности, получаем, что

$$\pi=\lim_{R\to\infty}\frac{N(R)}{R^2}=\frac{\pi}{\Delta},$$

то есть $\Delta=1$.

Получим ещё одно интересное следствие формулы (1). Величина $N(R)$, где R – целое, представляет собой число всех упорядоченных пар целых чисел $(x;\ y)$, для которых

$$x^2+y^2\le R^2.$$

Для любого узла $(x;\ y)\in\mathbb{Z}^2$ число x^2+y^2 является целым.

Поэтому, если $\tau(k)$ обозначает число всех различных способов представления натурального k в виде суммы квадратов двух целых чисел (представления

$$k=a^2+b^2=(-a)^2+b^2=$$

$$=a^2+(-b)^2=(-a)^2+(-b)^2$$

считаются попарно различными), то

$$N(R)=\tau(0)+\tau(1)+\ldots+\tau(n),$$

где $n=R^2$.

Теорема 2 (К. Гаусс). *Справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tau(0)+\tau(1)+\ldots+\tau(n)}{n}=\pi.$$

Отметим, что сама функция $\tau(n)$ ведёт себя нерегулярно. Например, $\tau(0)=1$, $\tau(1)=4$, $\tau(2)=4$, $\tau(3)=0$, $\tau(4)=4$, $\tau(5)=8$, $\tau(6)=0$, $\tau(7)=0$, $\tau(8)=4$, …, $\tau(21)=0$, $\tau(22)=0$, $\tau(23)=0$, $\tau(24)=0$, $\tau(25)=12$.

2. Представление чисел в виде суммы двух квадратов

С геометрической точки зрения величина $\tau(k)$ – это количество целых точек на окружности радиуса k с центром в начале координат. Ниже нам понадобятся формулы для вычисления значений функции $\tau(k)$.

Для натурального m запись $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ означает, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m; другими словами,

$$a=mt+b\ (t\in\mathbb{Z}).$$

Инструментом для дальнейших построений является следующий важный результат.

Теорема 3 (о представлении целых чисел в виде суммы двух квадратов). *Пусть $n>1$ – натуральное число.*

а) *Тогда*

$$\tau(n)=4\left(d_1(n)-d_3(n)\right),$$

где $d_1(n)$ – количество делителей числа n вида $4k+1$, а $d_3(n)$ – количество делителей числа n вида $4k+3$.

б) *Если*

$$n=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}q_1^{\beta_1}\ldots q_l^{\beta_l}$$

есть каноническое разложение числа n на простые множители, в котором

$$p_j\equiv 1(mod\ 4),\ q_j\equiv 3(mod\ 4),$$

то

$$\tau(n)=\begin{cases}4(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_k+1), & \text{когда } \beta_1,\ldots,\beta_l \text{ – чётные числа,}\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Полное доказательство этой теоремы, использующее свойства комплексных чисел, можно найти, например, в статье А.Б. Гончарова (см. «Квант», 12, 1985).

Отметим один полезный частный случай теоремы 3: уравнение

$$x^2 + y^2 = 5^k \quad (k \ge 0)$$

имеет $4(k+1)$ целочисленных решений; другими словами, окружность радиуса $5^{k/2}$ с центром в начале координат проходит в точности через $4(k+1)$ узлов решётки $\mathbb{Z}^2$.

Теорема 3 имеет много различных приложений. В качестве первого из них приведём доказательство формулы Лейбница, которая на первый взгляд не связана ни с решётками, ни с представлениями чисел в виде суммы двух квадратов.

Теорема 4 (Г. Лейбниц). *Справедливо равенство*

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4},$$

где под выражением слева понимается

$$\lim_{n\to\infty} S_n,\ S_n = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Доказательство. Согласно утверждению а) теоремы 3,

$$N(R) = 1 + 4\sum_{n=1}^{R^2}\left(d_1(n) - d_3(n)\right).$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{R^2} d_1(n) = \left[\frac{R^2}{1}\right]+\left[\frac{R^2}{5}\right]+\left[\frac{R^2}{9}\right]+\ldots,$$

где справа стоит конечная сумма, а равенство справедливо, поскольку каждое слагаемое вида

$$\left[\frac{R^2}{k}\right] \quad (k = 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots)$$

равно количеству чисел, кратных k, в множестве $\{1, 2, 3, \ldots, R^2\}$. Аналогично,

$$\sum_{n=1}^{R^2} d_3(n) = \left[\frac{R^2}{3}\right]+\left[\frac{R^2}{7}\right]+\left[\frac{R^2}{11}\right]+\ldots$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}\left(N(R)-1\right) = \left[\frac{R^2}{1}\right]-\left[\frac{R^2}{3}\right]+\left[\frac{R^2}{5}\right]-\left[\frac{R^2}{7}\right]+\left[\frac{R^2}{9}\right]-\left[\frac{R^2}{11}\right]+\ldots$$

Определим $\sigma_n(R)$ из равенства

$$\frac{1}{4}\left(N(R)-1\right) = \left[\frac{R^2}{1}\right]-\left[\frac{R^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{R^2}{4n+1}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+3}\right]+\sigma_n(R), \qquad (2)$$

С одной стороны, остаток $\sigma_n(R)$ неотрицателен, так как

$$\sigma_n(R) = \left(\left[\frac{R^2}{4n+5}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+7}\right]\right)+\left(\left[\frac{R^2}{4n+9}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+11}\right]\right)+\ldots \ge 0$$

(каждая скобка неотрицательна). С другой стороны,

$$\sigma_n(R) = \left[\frac{R^2}{4n+5}\right]-\left(\left[\frac{R^2}{4n+7}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+9}\right]\right)-\ldots \le \left[\frac{R^2}{4n+5}\right].$$

Пусть $R = 4n + 3$. Тогда очевидно, что

$$0 \le \sigma_n(R) \le R.$$

Если в формуле (2) отбросить все целые части, то её правая часть (по модулю) изменится не более чем на R. Таким образом,

$$\frac{1}{4}\left(N(R)-1\right) = R^2\left(1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right)+2\theta R,$$

или

$$\frac{N(R)-1}{4R^2} = 1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{R-2}-\frac{1}{R}+\frac{2\theta}{R},$$

где $|\theta| \le 1$. Устремляя теперь R к бесконечности, с учётом равенства (1) получаем формулу Лейбница.

3. Окружности Шинцеля

Сначала отметим, что для любого натурального числа n существует круг с центром в точке ($\sqrt{2}$; 1/3), который содержит внутри себя n точек целочисленной решётки. Для доказательства этого покажем, что если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – два различных узла целочисленной решётки, то они находятся на различных расстояниях от точки ($\sqrt{2}$; 1/3). Действительно, если

$$\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2+\left(y_1-1/3\right)^2 = \\ =\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2+\left(y_2-1/3\right)^2,$$

то

$$x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2-\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2- \\ -2\sqrt{2}\left(x_1-x_2\right)=0.$$

В силу того, что координаты – целые числа, отсюда следует, что

$$x_1=x_2 \quad \text{и} \quad y_1^2-y_2^2-\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2=0.$$

Второе равенство означает, что

$$\left(y_1-\frac{1}{3}\right)^2=\left(y_2-\frac{1}{3}\right)^2,$$

или

$$3y_1-1=\pm\left(3y_2-1\right).$$

В первом случае $y_1=y_2$, а во втором $3\left(y_1+y_2\right)=2$, что невозможно. Таким образом, $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. То есть можно выбрать такую растущую последовательность радиусов R_n, что в круге

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-1/3\right)^2\le R_n{}^2$$

будет содержаться в точности n точек.

Более интересным и трудным является следующий вопрос: сколько точек решётки $\mathbb{Z}^2$ может попасть на окружность?

Легко отыскать окружности, которые проходят через 1, 2, 3 или 4 точки (найдите их самостоятельно). Нетрудно придумать примеры и для n = 8, 12 (см. рис. 3, 4).

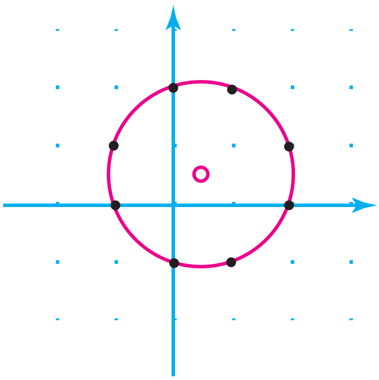


Рис. 3

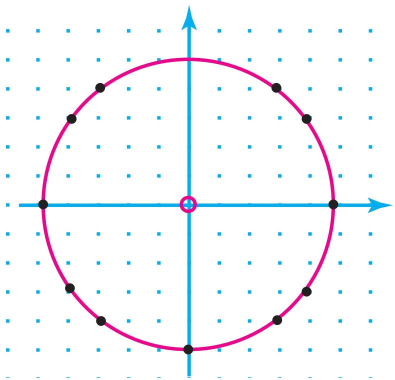


Рис. 4

Менее тривиален случай, когда n = 6 (см. рис. 5). Внимательно сравнив окружности на рисунках 4 и 5, можно догадаться, как был построен этот пример. Окружность радиуса 5 была нарисована с центром в точке (1; 0) (см. рис. 6). Из 12 точек на ней 6 имеют чётные координаты, то есть являются узлами решётки $(2\mathbb{Z})\times(2\mathbb{Z})$, которая состоит из точек с чётными координатами. Рассматривая эту более крупную решётку, мы и получаем рисунок 5.

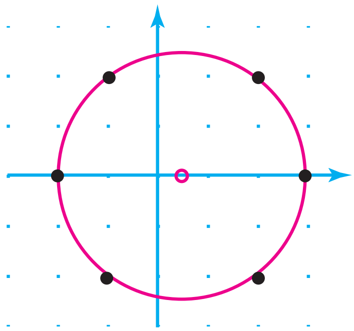


Рис. 5

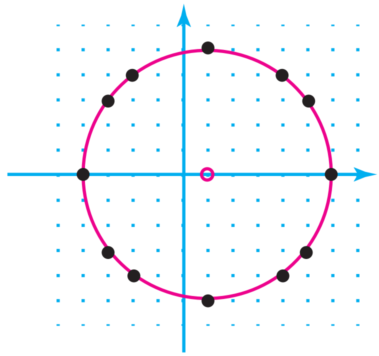


Рис. 6

Однако, имея только эти примеры, не вполне ясно, существуют ли окружности, на которых лежат, например, 5, 7 или 17 точек.

Теорема 5 (А. Шинцель, [2]). *Для любого натурального n существует окружность, которая проходит через n точек решётки $\mathbb{Z}^2$.*

Доказательство. Утверждение б) теоремы 3, конечно, позволяет для любого n построить окружность, на которой лежит в точности $4n$ точек. Для этого достаточно поместить центр окружности в начало координат, а в качестве радиуса выбрать число $R = 5^{(k-1)/2}$ (см. замечание после теоремы 3).

Рисунок 5 с шестью точками на окружности наталкивает на мысль, что полезно рассмотреть окружности с центром в точке (1/2; 0). Если в качестве радиуса взять число

$$R = 5^{(k-1)/2} / 2,$$

то уравнение окружности запишется в виде

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{k-1}}{4}, \qquad (3)$$

или

$$(2x-1)^2 + (2y)^2 = 5^{k-1}. \qquad (4)$$

Как уже отмечалось раньше, уравнение

$$a^2 + b^2 = 5^{k-1} \qquad (5)$$

имеет $4k$ решений. Ясно, что в равенстве (5) одно из чисел a, b должно быть чётным, а второе – нечётным. В уравнении (4) чётность каждого из слагаемых фиксирована, и поэтому из каждых двух решений (a, b), (b, a) уравнения (5) получается ровно одно решение уравнения (4) (отмеченные точки на рис. 6 симметричны относительно прямой $y = x - 1$). Таким образом, уравнение (4) имеет $2k$ решений (в 2 раза меньше, чем уравнение (5)).

Таким образом, мы можем построить окружность с любым чётным количеством точек на ней. Например, чтобы получить окружность с 10 точками решётки $\mathbb{Z}^2$, достаточно в уравнении (3) взять $k = 5$ (см. рис. 7).

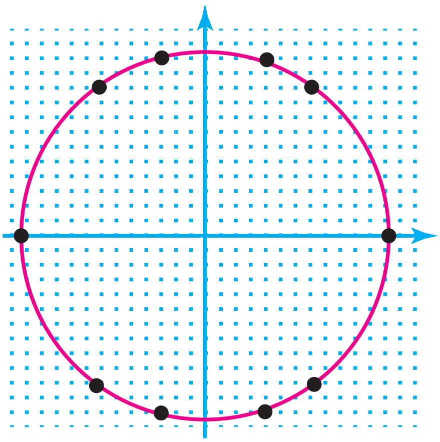


Рис. 7

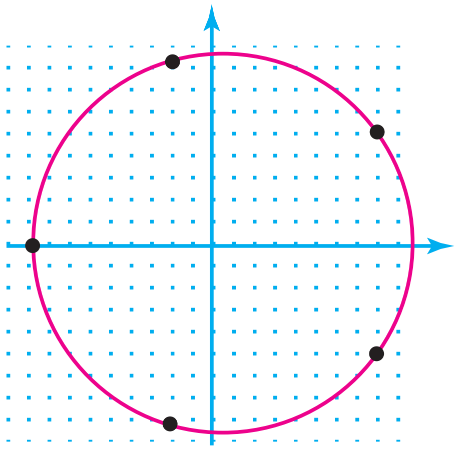


Рис. 8

Понятно, что точку (1/2; 0) нельзя брать в качестве центра, если мы хотим найти окружность с нечётным числом целых точек на ней (рисунок всегда симметричен относительно прямой $x = 1/2$). Оказывается, что для этого достаточно сдвинуть центр круга в точку (1/3; 0).

Действительно, запишем уравнение окружности с центром в точке (1/3; 0) и радиусом $\frac{5^k}{3}$:

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{5^{2k}}{9}, \qquad (6)$$

или

$$(3x-1)^2+(3y)^2=5^{2k}. \qquad (7)$$

По утверждению б) теоремы 3 уравнение

$$a^2+b^2=5^{2k} \qquad (8)$$

имеет $4(2k + 1)$ решений. Квадраты целых чисел при делении на 3 могут давать только остатки 0 и 1. Поэтому, рассматривая остатки от деления на 3, получаем, что одно из чисел a, b делится на 3, а другое – нет. Допустим, что $a \equiv 0 \pmod 3$, $b \equiv \pm 1 \pmod 3$. Тогда из четырёх пар (a, b), $(a, -b)$, (b, a), $(-b, a)$ ровно одна пара приводит к решению уравнения (7). Следовательно, уравнение (7) имеет в 4 раза меньше решений, чем уравнение (3), то есть $2k + 1$.

Например, при $k = 2$ получается окружность (см. рис. 8; сравните его с рис. 7)

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{5^4}{9},$$

или

$$(3x-1)^2+(3y)^2=5^4.$$

Теорема 5 полностью доказана.

Окружности, которые задаются уравнениями (3) и (6), называются *окружностями Шинцеля*. Отметим, что для данного числа n эти уравнения могут задавать, вообще говоря, не самую маленькую окружность с n точкам решётки на ней. Так происходит, например, при $n = 4$ (очевидно, что можно предъявить окружность радиуса $1/\sqrt{2}$) и при $n = 9$ (окружность Шинцеля имеет радиус 625/3, но окружность с центром (1/3; 0) и радиусом 65/3 также проходит через 9 целых точек).

Возможны и более нетривиальные конфигурации точек. Так, на рис. 9 изображена окружность с центром в точке (1/5; 2/5) и радиусом $\sqrt{13 \cdot 17/5}$. Она проходит через четыре целые точки $(-6, -2)$, $(1, 7)$, $(2, -6)$, $(5, 5)$. На рис. 10 можно видеть окружность, проходящую через пять целых точек (–12, –4), (–7, 11), (4, –12), (10, –8), (13, 1). Её центр находится в точке (1/7; 2/7), а радиус равен $25\sqrt{13/7}$.

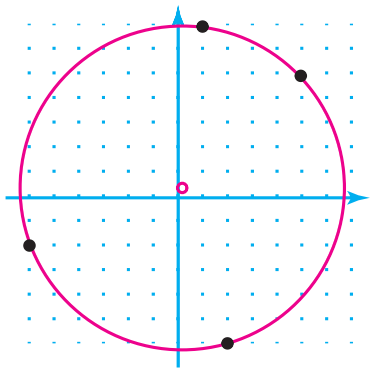


Рис. 9

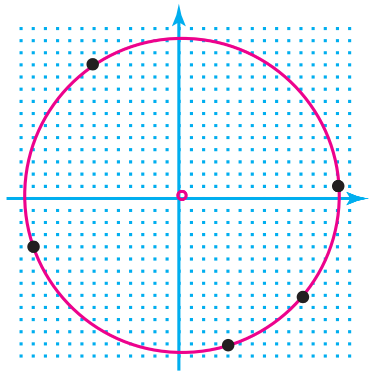


Рис. 10

4. Исследовательский проект

В связи с рассмотренными вопросами возникают несколько исследовательских задач (мы остановимся только на двух).

1) *Описать множество окружностей, которые проходят в точности через n точек.*

Предполагается, что окружность, проходящая через четыре точки, – достаточно редкое явление, то есть если провести окружность через три случайно выбранные точки решётки $\mathbb{Z}^2$, то через четвёртую целую точку она пройдёт с малой вероятностью.

2) С предыдущей задачей тесно связан и вопрос об изображении круга на экране компьютера. Можно считать, что монитор – это прямоугольный лист клетчатой бумаги, а круг на экране – объединение всех клеточек (пикселей), которые пересекается с внутренностью круга. Задача состоит в том, чтобы *выяснить, сколько различных изображений на экране имеет круг данного радиуса.* На рис. 11 представлены *некоторые* возможные изображения круга радиуса 1,05 («вручную» найдите остальные самостоятельно). Этой задаче было посвящено выступление британского математика М. Хаксли на конференции по теории чисел в Москве в 2006 году.

Решений и полных ответов в этих задачах пока нет.

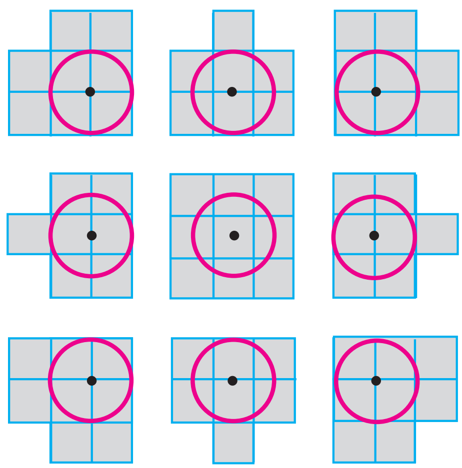


Рис. 11

5. Задачи

1. Имеется шахматная доска (границы квадратов считаются окрашенными в чёрный цвет). Начертить на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на чёрных полях

2. (Г. Штейнгауз; см. [3]) а) Имеются 64 квадратные плитки со стороной 10. Как их следует уложить на плоскости, чтобы все 64 плитки можно было описать окружностью радиусом 50? Существуют ли окружности меньшего радиуса, способные вместить все 64 плитки? Можно ли поместить 67 плиток внутри этого же круга?

б) Чему равно максимальное число квадратных плиток со стороной 1, которые можно расположить внутри круга радиуса 2?

3. Докажите, что если на окружности с центром в точке (0; 0) лежат только видимые из начала координат узлы решётки $\mathbb{Z}^2$, то квадрат радиуса не делится ни на один квадрат натурального числа, и обратно.

4. Докажите, что для каждого натурального n существует шар с центром в точке с координатами $\left(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 1/3\right)$, который содержит внутри себя ровно n узлов решётки $\mathbb{Z}^3$.

5. (Т. Куликовский; см. [2]) Пусть

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$$

есть окружность Шинцеля, на которой лежат n точек решётки $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что на сфере

$$(x - x_0)^2 + y^2 + \left(z - \sqrt{2}\right)^2 = R^2 + 2$$

лежит ровно n точек решётки $\mathbb{Z}^3$.

6. а) Докажите, что для каждого натурального числа n существует окружность, проходящая ровно через n узлов разбиения плоскости на правильные а) треугольники, б) шестиугольники.

7. (См. [2]) Докажите, что если по крайней мере одна координата центра окружности иррациональна, то на самой окружности найдётся не более двух точек с рациональными координатами.

8. (См. [2]) Докажите следующие утверждения:

а) Существуют окружности с центром в узле решётки $\mathbb{Z}^2$, на которых нет ни одной рациональной точки.

б) Существуют окружности, которые содержат ровно одну рациональную точку.

в) Существуют окружности, которые содержат ровно две рациональные точки.

г) Если окружность с центром в начале координат (0; 0) содержит по меньшей мере одну рациональную точку, то на такой окружности лежит бесконечно много рациональных точек плоскости.

9. На листе клетчатой бумаги с клетками размером 1×1 нарисована окружность радиуса R с центром в узле клетки. Докажите, что если на ней лежит ровно 1988 узлов сетки, то либо R, либо $R\sqrt{2}$ – целое число.

10. Докажите, что для любого чётного n существует окружность с центром в точке (1/3; 0), которая проходит ровно через n узлов решётки $\mathbb{Z}^2$.

Литература

1. *Гильберт Д., Кон-Фоссен О.* Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.

2. *Серпинский В.* Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики (На границе геометрии и арифметики). – М.: Просвещение, 1961.

3. *Штейнгауз Г.* Сто задач. – М.: Наука, 1976.

4. *Вавилов В.В., Устинов А.В.* Многоугольники на решётках. – М.: МЦНМО, 2006.