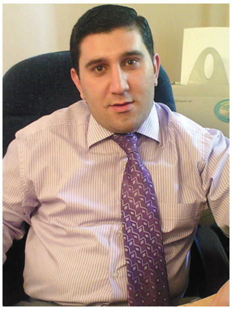

Аракелян Армен Гомеросович
Кандидат физико-математических наук.
Республика Армения, г. Ереван,
Государственный инженерный университет Армении (ГИУА), Департамент математики.

Окружности Карно и их свойства

Пусть даны треугольник ABC и описанная ***около него*** окружность ω с центром O. Построим окружности, симметричные окружности ω относительно сторон BC, AC и AB треугольника ABC, и обозначим их через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно (рис. 1). Центры окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ будут симметричны точке O относительно соответствующих сторон. Обозначим их через O_1, O_2 и O_3 соответственно.

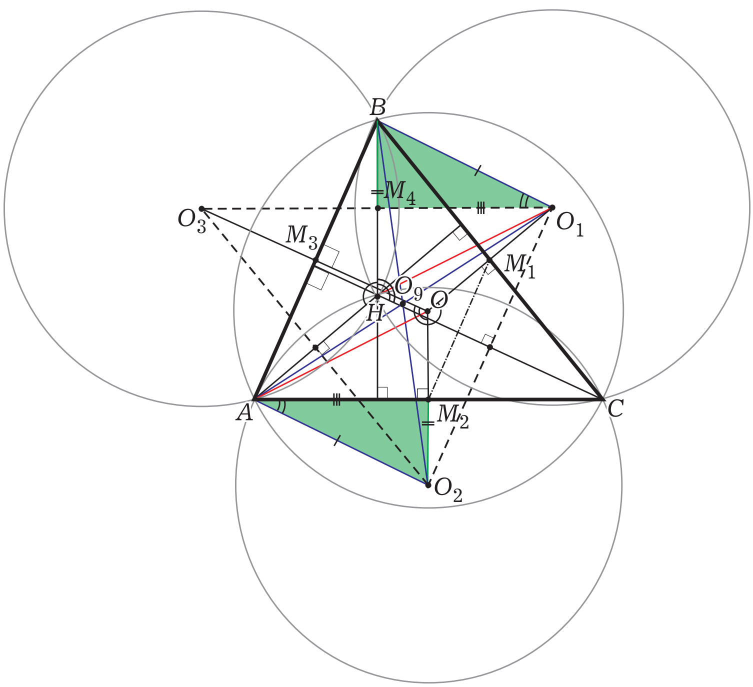

Рис. 1

Определение 1. Окружности $\omega_1(O_1)$, $\omega_2(O_2)$, $\omega_3(O_3)$ называются *окружностями Карно треугольника ABC*.

Утверждение 1. $\Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$, причём $AB \parallel O_1O_2$, $BC \parallel O_2O_3$, $AC \parallel O_1O_3$.

Доказательство. Пусть M_1, M_2, M_3 – середины сторон BC, AC и AB соответственно. Тогда $M_1M_2 \parallel AB$ и $M_1M_2 = \frac{1}{2}AB$ как средняя линия.

Рассмотрим ΔO_1OO_2. В нём $OM_2 = O_2M_2$, $OM_1 = O_1M_1$.

Следовательно $M_1M_2 \parallel O_1O_2$ и $M_1M_2 = \frac{1}{2}O_1O_2$ как средняя линия.

Значит, $O_1O_2 \parallel AB$ и $O_1O_2 = AB$. Аналогично доказывается, что $O_2O_3 \parallel BC$ и $O_2O_3 = BC$; $O_1O_3 \parallel AC$ и $O_1O_3 = AC$.

Следовательно, $\Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$ по трём сторонам.

Утверждение 2. Точка O – ортоцентр $\Delta O_1O_2O_3$.

Доказательство. Прямая $O_1O \perp BC$ по построению точки O_1, а $BC \parallel O_2O_3$ согласно утверждению 1, значит, $O_1O \perp O_2O_3$, т. е. является высотой $\Delta O_1O_2O_3$, опущенной из вершины O_1. Аналогично, O_2O является высотой, опущенной из вершины O_2, а O_3O – высотой, опущенной из вершины O_3. И все эти высоты пересекаются в точке O.

Утверждение 3. Точка H – центр описанной окружности около $\Delta O_1O_2O_3$.

Доказательство Очевидно, что $HB \perp O_1O_3$, т. к. $HB \perp AC$, а $AC \parallel O_1O_3$.

Пусть M_4 – точка пересечения O_1O_3 и BH.

Покажем, что $O_3M_4 = M_4O_1$.

Рассмотрим четырёхугольник ABO_1O_2. Согласно утверждению 1, $AB \parallel O_1O_2$ и $AB = O_1O_2 \Rightarrow ABO_1O_2$ – параллелограмм $\Rightarrow$ $BO_1 \parallel AO_2$ и $BO_1 = AO_2$.

Рассмотрим треугольники AO_2M_2 и O_1BM_4. Очевидно, они прямоугольные. $BO_1 = O_2A$ и при этом $\angle BO_1M_4 = \angle O_2AM_2$ (так как $BO_1 \parallel AO_2$ и $O_1M_4 \parallel AM_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta AO_2M_2 = \Delta O_1BM_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1M_4 = AM_2 = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}O_1O_3$, т. е. M_4 – середина O_1O_3.

Значит, HB – серединный перпендикуляр к O_1O_3. Аналогично, HA – серединный перпендикуляр к O_2O_3, а HC – к O_1O_2. То есть H – центр описанной окружности около $\Delta O_1O_2O_3$.

Следствие 1. Окружности ω_1, ω_2, ω_3 проходят через одну и ту же точку H, которая является ортоцентром ΔABC.

Следствие 2. Имеем $BH = 2\ OM_2$, $AH = 2\ OM_1$, $CH = 2\ OM_3$.

Определение 2. Прямой Эйлера треугольника ABC называется прямая, проходящая через точки O (центр описанной окружности) и H (точку пересечения высот) .

Определение 3. Окружностью Эйлера треугольника ABC (или окружностью девяти точек) называется окружность, проходящая через:

- основания медиан (середины сторон),
- основания высот,
- середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника.

Известно, что:

1) центр окружности Эйлера лежит на прямой Эйлера в середине отрезка OH – точке O_9.

2) радиус окружности Эйлера равен половине радиуса описанной окружности.

Из утверждений 2 и 3 следует, что треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ имеют одну и ту же эйлерову прямую и одну и ту же эйлерову окружность. Действительно, так как точки O и H являются ортоцентром и центром описанной окружности, то середина O_9 отрезка OH – центр окружности Эйлера для каждого из них. А в силу того, что треугольники равны, радиусы окружностей Эйлера для них также равны.

Теорема 1. Отрезки AO_1, BO_2, CO_3 пересекаются в одной и той же точке O_9, которая является центром окружности Эйлера.

Доказательство. Соединяя точки O_1 и O_2 с точками B и A соответственно, получим параллелограмм ABO_1O_2. Поскольку отрезок O_1O_2 параллелен и равен AB, следовательно, BO_1 параллелен и равен AO_2. Следовательно, четырёхугольник ABO_1O_2 – параллелограмм. Точку пересечения диагоналей полученного параллелограмма обозначим через K. Покажем, что K совпадает с серединой O_9 отрезка OH. Действительно, $AK=KO_1$, $BK=KO_2$. Соединим точки O_1 и O с точками H и A соответственно. Имея в виду, что отрезок OO_1 параллелен и равен AH, получим параллелограмм AHO_1O, диагонали AO_1 и OH которого пересекаются в середине O_9 отрезка OH, т. е. $HO_9 = O_9O$ и $AO_9 = O_9O_1$. Таким образом, O_9 также является серединой AO_1, следовательно, точки K и O_9 совпадают ($K \equiv O_9$). Аналогично покажем, что середины отрезков BO_2 и CO_3 также совпадают с точкой O_9. Рассматривая равные треугольники ABC и $O_1O_2O_3$, замечаем, что ортоцентр H треугольника ABC и центр O описанной окружности становятся для треугольника $O_1O_2O_3$ соответственно центром описанной окружности и ортоцентром.

Следствие. Треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ имеют одну и ту же эйлерову окружность и эйлерову прямую.

Доказательство. Поскольку для равных треугольников ABC и $O_1O_2O_3$ точки H и O являются ортоцентром и центром описанной окружности, значит, середина O_9 отрезка OH является центром эйлеровой окружности этих треугольников. Следовательно, эти два треугольника имеют одну и ту же эйлерову прямую и эйлерову окружность.

Приведём несколько определений.

Определение 2. *Дополнительным треугольником* треугольника ABC называется треугольник, вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC.

Определение 3. *Антидополнительным треугольником* треугольника ABC называется треугольник, образованный в результате пересечения прямых, проходящих через вершины A, B, C и параллельных сторонам треугольника, противолежащим этим вершинам.

Теорема 2. Окружности Карно треугольника ABC касаются описанной окружности антидополнительного треугольника ABC.

Доказательство. Пусть вследствие пересечения проходящих через вершины A, B, C треугольника ABC прямых, параллельных противолежащим этим вершинам сторонам, образуется треугольник $A_1B_1C_1$, который является антидополнительным треугольником треугольника ABC (рис. 2). Точки A, B, C являются серединами сторон треугольника

$A_1B_1C_1$. Следовательно, перпендикуляры к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, восстановленные из точек A, B, C, пересекаются в ортоцентре H треугольника ABC. Таким образом, точка H будет центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Покажем, что точки H_1, O_1, A_1 находятся на одной прямой. Рассмотрим треугольники HO_1O_2 и HA_1B_1, где $HO_1 = HO_2 = R$. Здесь R является радиусом описанной около ABC окружности. Далее, $HA_1 = HB_1$.

Согласно построению антидополнительного треугольника $A_1B_1C_1$, замечаем, что четырёхугольник $ACBC_1$ является параллелограммом. Значит, $\angle C_1 = \angle C$, а H является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, $\angle A_1HB_1 = 2\angle C_1 = 2\angle C$. Так как H – центр описанной около $\Delta O_1O_2O_3$ окружности, а $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta ABC$, то $\angle O_1HO_2 = 2\angle O_1O_3O_2 = 2\angle C$. Следовательно, $\Delta HA_1B_1 \sim \Delta HO_1O_2$. Поскольку $O_1O_2 \| AB \| A_1B_1$ и $O_1O_2 = AB = \frac{A_1B_1}{2}$, коэффициент подобия k этих треугольников равен 2 ($k = 2$). Следовательно, $HA_1 = 2HO_1 = 2R$, $HB_1 = 2HO_2 = 2R$. Таким образом, точки H, O_1, A_1 находятся на одной прямой, а HA_1 и HB_1 являются диаметрами окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Следовательно, описанная окружность антидополнительного треугольника проходит через точки A_1, B_1, C_1.

Таким образом, описанная окружность антидополнительного треугольника треугольника ABC касается окружностей Карно $\omega_1, \omega_2, \omega_2$.

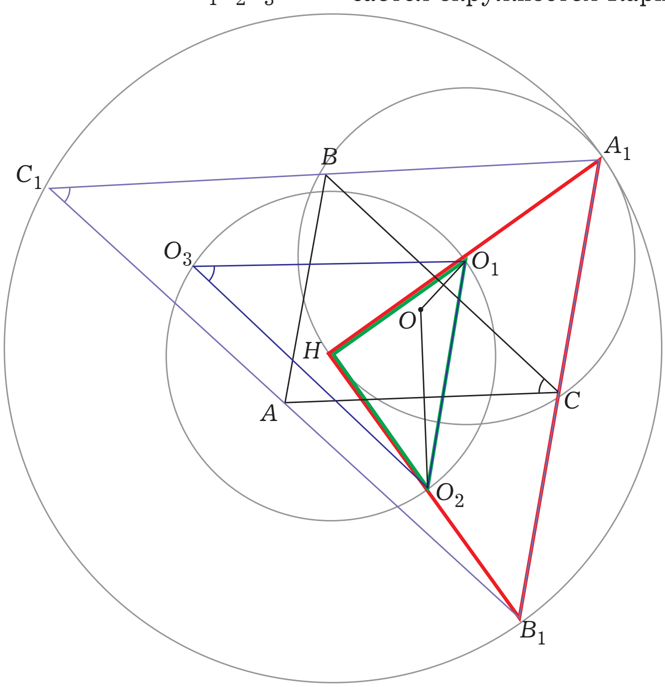

Рис. 2

Теперь на сторонах треугольника определим отрезки, образованные основаниями высот треугольника ABC. Перпендикуляры, проведённые из центра O описанной окружности треугольника ABC к сторонам AB, BC, AC, обозначим соответственно через k_c, k_a, k_b. Рассмотрим следующие пары подобных треугольников (см. рис. 3): $\Delta A_1BH \sim \Delta CH_3B$, откуда $\frac{A_1B}{CH_3}=\frac{BH}{BH_3}=\frac{A_1H}{BC}$, или $\frac{b}{h_c}=\frac{2k_b}{BH_3}=\frac{2R}{a}$,

откуда $BH_3=\frac{a\cdot k_b}{R}$.

$\Delta A_1HC \sim \Delta BH_2C$, откуда $\frac{A_1C}{BH_2}=\frac{HC}{CH_2}=$ $=\frac{A_1H}{BC}$; $\frac{c}{h_b}=\frac{2\cdot k_c}{CH_2}=\frac{2R}{a}$ и, следовательно, $CH_2=\frac{a\cdot k_c}{R}$.

$\Delta AHB_1 \sim \Delta AH_2B$, откуда $\frac{AB_1}{BH_2}=$ $=\frac{AH}{AH_2}=\frac{HB_1}{AB}$; $\frac{a}{h_b}=\frac{2\cdot k_a}{AH_2}=\frac{2R}{c}$,

следовательно, $AH_2=\frac{k_a\cdot c}{R}$.

Суммируя последние два равенства, получим:

$$b=AH_2+CH_2=\frac{k_a\cdot c}{R}+\frac{k_c\cdot a}{R}=\frac{k_a\cdot c+k_c\cdot a}{R},$$

откуда $b\cdot R=a\cdot k_c+c\cdot k_a$.

Аналогично для сторон a и c получим

$c\cdot R=b\cdot k_a+a\cdot k_b$, $a\cdot R=b\cdot k_c+c\cdot k_b$.

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 3 (Карно). Сумма расстояний от центра O описанной около остроугольного треугольника ABC окружности до сторон треугольника равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей.

Доказательство. Рассмотрим три вышеприведённых равенства:

$$a\cdot R=b\cdot k_c+c\cdot k_b,\ b\cdot R= =a\cdot k_c+c\cdot k_a,\ c\cdot R=b\cdot k_a+a\cdot k_b.$$

Суммируя полученные равенства, с учётом того, что $a+b+c=2p$, где $2p$ является периметром треугольника ABC, и имея в виду, что пл.$\Delta A_1B_1C_1$ = пл.ΔA_1B_1H + пл.ΔA_1C_1H + +пл.ΔB_1C_1H, получим:

$$2R\cdot p=2p\cdot(k_a+k_b+k_c)- -(a\cdot k_a+b\cdot k_b+c\cdot k_c),$$

или

$$2R\cdot p=2p\cdot(k_a+k_b+k_c)-\frac{\text{пл.}\Delta A_1B_1C_1}{2},$$

откуда $R\cdot p=p\cdot(k_a+k_b+k_c)-S$, где S является площадью треугольника ABC. Заменяя S на pr, получим $k_a+k_b+k_c=R+r$. Что и требовалось доказать.

Примечание. Если угол A треугольника ABC тупой, то теорема Карно будет иметь следующий вид:

$$k_b+k_c-k_a=R+r.$$

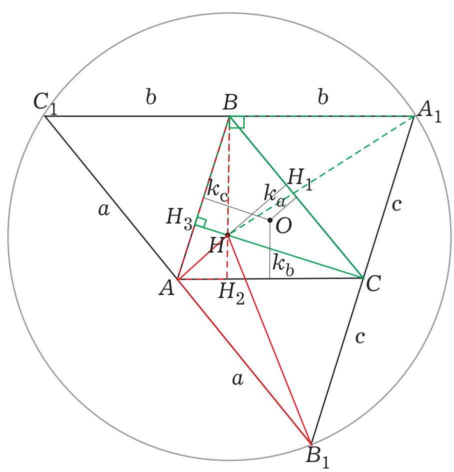

Рис. 3

Литература

1. *Зетель С.И.* Новая геометрия треугольника.– М., 1962.
2. *Зетель С.И.* Задачи на максимум и минимум. – М., 1948.