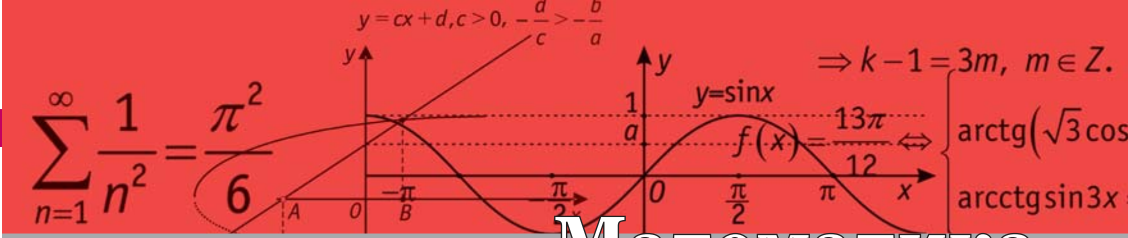

Беклемишев Дмитрий Владимирович
Доктор педагогических наук,
профессор кафедры высшей математики
Московского физико-технического института
(МФТИ).

Об определениях и не только о них...

Являются ли аксиомы незыблемыми истинами? Для чего они нужны и как используются? В статье разбираются логические основы определений математических объектов, даётся описание аксиоматического метода, роли аксиом в математике.

Математика имеет дело с «математическими» объектами: числами, геометрическими фигурами, функциями, множествами... Различных видов объектов столько, что можно без преувеличения сказать, что это – целый отдельный мир, в котором даже профессионалы могут уверенно ориентироваться лишь на ограниченной его части. От объектов реального мира «математические» объекты отличаются тем, что органам чувств они недоступны ни непосредственно, ни с помощью каких-либо экспериментов. Всё, что мы можем узнать о таком объекте, основывается на его определении. Скажем, слова «биссектриса угла» останутся пустым звуком и все рассуждения о биссектрисах – бессмыслицей, пока не сказано, что это прямая, лежащая в плоскости угла, проходящая через его вершину и составляющая равные углы с его сторонами.

Часто определение стоит в начале математических рассуждений:

определяется новый объект и затем изучаются его свойства. Формально определение может быть любым, лишь бы оно не содержало внутри себя логического противоречия, но в действительности дело обстоит иначе. Придуманные, «взятые с потолка» определения, как правило, ни к чему не ведут, никакой интересной и полезной теории из них не получается. С другой стороны, история математики полна таких примеров, когда никак не связанные между собой люди, жившие в разных странах и в разные времена, независимо друг от друга открывали один и тот же объект – приходили к одному и тому же определению, возможно, по-разному сформулированному. И уж такое определение, разумеется, оказывалось нужным и полезным. В этом смысле исследование математического мира напоминает географические открытия (да и любые открытия в естественных науках). И это делает работу математика особенно увлекательной.

По математическому миру, как и по реальному, передвигаются по определённым маршрутам. Каждый учебник или научная книга начинаются с какой-то исходной точки. Автор рассчитывает, что читатель, приступая к книге, имеет определённый запас предварительных знаний. По мере чтения он продвигается по намеченному автором маршруту и получает новые сведения, в том числе знакомится с новыми математическими объектами и их определениями. Одному и тому же объекту можно дать много равносильных определений. Какое из них выбрать – зависит от выбранного маршрута или способа изложения

материала, и тот выбор, который делается, жёстко связан со всей логикой данного способа изложения.

С более близкой нам позиции человека, обучающегося математике, всё сказанное означает, что нужно выработать в себе привычку твёрдо и точно помнить определения всех изучаемых понятий. Чтобы рассуждать уверенно, недостаточно «в общем-то представлять себе», что это такое. Приблизительное знание часто является источником ошибок. Много ли толку, если вы в общих чертах представляете себе чей-нибудь номер телефона? Кроме того, если вы изучаете предмет, следуя какому-то его изложению, нужно использовать именно те определения, которые там даются, а не заменять их произвольно на другие, хотя бы и равносильные.

В этой статье мы разберём, какие бывают виды определений. Приведённое в ней деление на виды не следует рассматривать как чёткое. Границы между видами расплывчаты, так как иногда трудно с уверенностью отнести какое-то определение к одному определённому виду. Тем не менее, такое деление имеет смысл.

1. Простейший случай. Наиболее простой и распространённый вид определений римляне характеризовали словами «per genus proxima et differentia specifica». (Мы будем коротко писать GPDS.) В переводе эта фраза означает «через ближайший род и специфические отличия». Если вы определяете объект таким образом, вы находите множество объектов, его содержащее, ранее уже определённое и имеющее название. Это – «род». Например, давая определение квадрата, вы замечаете, что это – частный вид прямоугольника, и говорите: «Квадрат – это прямоугольник...». Этого, конечно, недостаточно, не каждый прямоугольник – квадрат. Нужно указать «специфические отличия», выделяющие квадраты из остальных прямоугольников, например, сказать: «Это прямоугольник, все стороны которого равны.»

Конечно, нельзя и не нужно требовать, чтобы родовое понятие было именно ближайшим. Неясно, что такое «ближайшее», и кто может поручиться, что выбранное им – точно ближайшее. Может быть, квадрат – это ромб, у которого диагонали равны. Вполне можно сказать, что квадрат – это четырёхугольник, у которого все углы прямые и все стороны равны. И отсюда будет следовать, что он и параллелограмм, и прямоугольник, и ромб.

2. Определение построением объекта. Определения GPDS очень хороши, но, к сожалению, не для каждого нового понятия удаётся подыскать родовое понятие. Может быть, его вовсе не существует, или его не существует при теперешнем состоянии науки, или такое понятие существует, но при выбранном способе изложения материала не считается известным. Поэтому должны использоваться другие виды определений, в частности, новый объект может быть построен из уже известных объектов.

В качестве примера рассмотрим определение рационального числа. Если спросить ученика, кончающего школу, что это такое, он уверенно произнесёт: «Рациональное число – это число вида p/q, где p – целое, а q – натуральное». Выглядит, как определение GPDS, но только выглядит. Нет общего определения числа вообще. Есть, конечно, вещественные числа, и, имея их в виду, следовало бы сказать: «Вещественное число...». Но в стандартном изложении в тот момент, когда вводится определение рационального числа, вещественные числа ещё не определены. Так что и это не годится. Хорошо, забудем это. «Целое» и «натуральное» – понятно, но вот знак «/» – это что такое? Такой вопрос ставит в тупик. Естественная попытка выйти из затруднения: «Это знак деления...». К сожалению, пока нет рациональных чисел, нет и деления целого на натуральное. Что же получается?

Получается, что «/» – просто знак, не несущий никакой информации, на месте которого с тем же успехом могла бы стоять запятая или любой другой знак, например $\Diamond$. Это значит, что реально определение рационального числа сводится к следующему: «Рациональное число – это пара чисел $p\Diamond q$, из которых первое – целое, а второе – натуральное». Новый объект сконструирован из уже известных.

Однако всё не так просто. Пара чисел, и всё? Никакого смысла, то есть связей с уже известными фактами и объектами, в ней нет. Для того, чтобы эта пара в самом деле стала рациональным числом, получила все его свойства, потребуется еще целый ряд определений, которые, строго говоря, должны считаться неотъемлемой составной частью основного определения. Именно, нужно сказать, что:

• Числа $p\Diamond q$ и $m\Diamond n$ равны, если существует такое натуральное число a, что $m=ap$ и $n=aq$, или такое натуральное число a', что $p=a'm$, а $q=a'n$.

• Число $p\Diamond 1$ совпадает с числом p.

• Суммой чисел $p\Diamond q$ и $m\Diamond n$ называется число $(pn+qm)\Diamond qn$. Аналогично должна быть определена разность.

Произведением чисел $p\Diamond q$ и $m\Diamond n$ называется число $pm\Diamond qn$, частным от деления $p\Diamond q$ на $m\Diamond n$ называется число $pn\Diamond qm$.

• Число $p\Diamond q$ больше числа $m\Diamond n$, если $pn>qm$.

После того как эти определения введены, пара чисел $p\Diamond q$, как бы мы её ни обозначали, становится рациональным числом, а «$\Diamond$» – знаком деления.

Правильно ли определение, которое произнёс ученик? Можно ли определить рациональное число как «число вида p/q, где p – целое, а q – натуральное»? Все приведённые выше дополнения, конечно, даются и хорошо известны школьнику. Так что определение не неправильное, а с точки зрения логики неудачно сформулированное. Однако помимо логики, важна и педагогика. Если при первом знакомстве начинать с изложения всех подробностей, то это вызовет ненужные затруднения. И даже слово «число» вполне уместно: хотя определения и нет, общее представление, связанное с этим словом, у учеников есть. И на таком уровне этого достаточно. Что касается читателя журнала «Потенциал», то он уже достиг того возраста и развития, когда стоит посмотреть на дело несколько глубже.

Определения построением объекта в учебных курсах встречаются нередко: определение вектора, определение вещественного числа при помощи бесконечных десятичных дробей… И обычно последовательность дополнительных определений формулируется отдельно, а не как составная часть основного определения.

3. Определение перечислением условий. Этот вид определений очень похож на определения GPDS. Здесь «специфические отличия» представляют собой набор условий, которым должен удовлетворять определяемый объект, и применению такого определения должно предшествовать исследование этих условий. Поэтому мы и выделяем эти определения.

В качестве примера дадим ещё раз определение квадрата. Оно может быть таким. Четыре различных отрезка в плоскости: AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 составляют квадрат, если выполнены следующие условия:

1. $A_1=B$, $B_1=C$, $C_1=D$ и $D_1=A$,
2. $|AA_1|=|BB_1|=|CC_1|=|DD_1|$,
3. Угол ABC – прямой.

Что здесь неясного, и какое нужно исследование условий? Прежде всего нужно установить, что условия не противоречивы. Если они заданы произвольно (а именно так с точки зрения логики дело и обстоит), то условия могут оказаться противоречивыми. Заменим, например, условие 3 условием:

$3'$. Углы ABC и BCD равны по $\pi/3$.

Поскольку из второго условия следует, что $ABCD$ – параллелограмм, сумма этих углов должна быть равна π, и условие $3'$ выполнено быть не может. Так что вопрос о непротиворечивости – не праздный.

Условия непротиворечивы, если существует объект, им удовлетворяющий. Лучший способ доказать существование объекта – это указать, построить такой объект. Наша уверенность в существовании квадратов как раз и позволяет не беспокоиться о непротиворечивости приведённого определения.

Таким способом непротиворечивость большей частью и проверяется, хотя иногда и прибегают к рассуждениям, неявно доказывающим существование объекта.

Вот ещё пример определения, которое можно отнести и к определениям GPDS, и к определениям при помощи условий.

Множество точек плоскости называется ограниченным, если существует такой круг, внутри которого лежат все точки множества.

Здесь чётко видное родовое понятие и одно простое условие, непротиворечивость которого очевидна. Этот пример подтверждает расплывчатость границ между описанными здесь классами определений.

4. Аксиоматический метод. Если новая математическая теория начинается «с чистого листа», то по крайней мере формально изучающему неизвестно ничего, и что-либо определять нечем. Выход состоит в применении *аксиоматического метода*. Классический пример применения этого метода – определение натуральных чисел.

Как уже упоминалось, не существует общего определения числа вообще, а все классы чисел могут строиться последовательно, каждый следующий на основе предыдущего: целые числа строятся по натуральным, рациональные – по целым (как мы видели выше), вещественные числа определяются при помощи рациональных, комплексные – при помощи вещественных. Можно по этому пути двигаться и дальше... Как же определяются натуральные числа?

Как это ни парадоксально звучит, по существу, никак. Не делается попыток объяснить, что это такое, а только перечисляются их основные свойства. Утверждения, описывающие эти свойства, называются аксиомами.

Ниже я полностью приведу первый параграф с аксиомами натуральных чисел из книги «Основы анализа» немецкого математика Эдмунда Ландау, потому что не берусь сказать лучше.

Натуральные числа

§ 1. Аксиомы

Мы считаем заданным: некоторое множество, т. е. совокупность вещей, называемых натуральными числами, с перечисляемыми ниже свойствами, называемыми аксиомами. Предпошлём формулировке аксиом несколько замечаний, относящихся к употребляемым нами символам = и $\neq$. Строчные латинские буквы обозначают в этой книге всюду, где не оговорено противное, натуральные числа. Если задано x и задано y, то либо x и y – одно и то же число; это можно записать также в виде $x = y$ (= читается: равно); либо x и y – не одно и то же число; это можно записать также в виде $x \neq y$ ($\neq$ читается: не равно).

Отсюда чисто логически вытекает:

1) $x = x$ для каждого x.

2) Из $x = y$ следует $y = x$.

3) Из $x=y$ и $y=z$ следует $x=z$.

Таким образом, запись вида $a=b=c=d$, под которой непосредственно подразумевается лишь, что $a=b$, $b=c$, $c=d$, означает, кроме того, что, например, $a=c$, $a=d$, $b=d$. (Соответствующие замечания относятся и к аналогичным записям в последующих главах.) Мы принимаем теперь, что множество натуральных чисел обладает следующими свойствами.

Аксиома 1. *1 есть натуральное число.*

Т. е. наше множество не пусто; оно содержит вещь, именуемую 1 (читается: единица).

Аксиома 2. *Для каждого x имеется точно одно натуральное число, называемое его последующим и обозначаемое x'.*

Единственность последующего числа означает, что из $x=y$ следует $x'=y'$.

При записи последующих для чисел x, заданных не в виде одной буквы, мы будем, во избежание путаницы, заключать последние в скобки. Аналогично мы будем поступать во всей книге и при записи выражений $x+y$, xy, $x-y$, $-x$, x^y и т. п.

Аксиома 3. *Всегда $x' \neq 1$.*

Т. е. 1 не служит последующим ни для какого числа.

Аксиома 4. *Из $x'=y'$ следует $x=y$.*

Т. е. каждое число либо вовсе не служит последующим ни для какого числа, либо является последующим только для одного числа.

Аксиома 5 (аксиома индукции). *Пусть M – множество натуральных чисел, обладающее следующими свойствами:*

1) 1 принадлежит множеству M.

2) Если x принадлежит M, то и x' принадлежит M. Тогда M содержит все натуральные числа.

Приведённые тут пять аксиом называются аксиомами Пеано по имени итальянского математика Джузеппе Пеано.

Мы видим, что тут не идёт речь о том, истинны ли утверждения в аксиомах – это только предположения. *Если* они верны, то верны и все теоремы, которые из них следуют. И только.

Применяя аксиоматический метод, мы рассматриваем какое-то основное множество объектов и перечисляем свойства его элементов, но только те свойства, что будут нужны для той теории, которую собираемся развивать. При этом мало ли какие объекты могут обладать этими свойствами – мы не имеем никаких сведений об элементах основного множества, за исключением тех, которые перечислены в аксиомах.

Пусть каким-то образом, независимо от данной системы аксиом, определено множество, элементы которого таковы, что удовлетворяют всем аксиомам. Такое множество называется *реализацией* или *моделью* для данной системы аксиом.

Система аксиом называется *непротиворечивой* или *совместной*, если у неё существует хотя бы одна реализация.

Для одной системы аксиом возможно много существенно различных моделей. Пусть есть две модели. Если между элементами множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором сохраняются все отношения между элементами, установленные аксиомами, то такие модели называются *изоморфными* (по-русски говоря, имеющими одинаковую форму). Но возможны и неизоморфные модели для одной и той же системы аксиом.

Разумеется, как бы вы ни задавали модель, соответствующее множество и свойства его элементов, в конечном счёте придётся сослаться на какую-то другую систему аксиом.

В качестве примера можно привести одну из возможных систем аксиом, определяющих геометрию на плоскости – аксиоматику, предложенную немецким математиком Германом Вейлем. Она относительно проста, потому что использует как известное понятие вещественного числа.

Рассматриваются два множества P и V. Элементы первого из них P будем называть точками, элементы второго – V – векторами. Множество P называется *евклидовой плоскостью*, если выполнены следующие аксиомы.

• **Аксиомы векторов.** Любым двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ сопоставлен третий вектор $\vec{z}$ (называемый их *суммой* и обозначаемый $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$), а также любому вещественному числу α и любому вектору $\vec{x}$ сопоставлен вектор $\vec{y}$ (называемый *произведением* $\vec{x}$ на α и обозначаемый $\alpha\vec{x}$). При этом должны быть выполнены следующие аксиомы:

1. Для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ выполнено $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$.

2. Для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ выполнено $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$.

3. Существует вектор $\vec{0}$ (называемый *нулевым)* такой, что для любого вектора $\vec{x}$ выполнено $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$.

4. Для любого вектора $\vec{x}$ существует вектор $-\vec{x}$ (называемый *противоположным* для $\vec{x}$) такой, что $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$.

5. Для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и любого вещественного числа α выполнено $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$.

6. Для любых вещественных чисел α и β и любого вектора $\vec{x}$ выполнено $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$.

7. Для любых вещественных чисел α и β и любого вектора $\vec{x}$ выполнено $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$.

8. Умножение любого вектора $\vec{x}$ на 1 не меняет этого вектора: $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

• **Аксиомы размерности.**

1. Для любых трёх векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ найдутся такие числа α, β и γ, что $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$, а $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z}=\vec{0}$.

2. Найдутся такие два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$, что равенство $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\vec{0}$ возможно только в случае $\alpha=\beta=0$.

• **Аксиомы измерения длин и углов.** Любым двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ сопоставлено число, называемое их *скалярным произведением* и обозначаемое $\vec{x}\cdot\vec{y}$, таким образом, что для любых векторов и любых чисел:

1. $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$.

2. $(\alpha\vec{x}+\beta\vec{x})\cdot z=\alpha(\vec{x}\cdot\vec{z})+\beta(y\cdot z)$.

3. Для любого вектора $\vec{x}$, не равного $\vec{0}$, выполнено $\vec{x}\cdot\vec{x}>0$.

• **Аксиомы точек.** Любым двум точкам A и B сопоставлен единственный вектор, обозначаемый $\overrightarrow{AB}$ таким образом, что:

1. Для любой точки A и любого вектора $\vec{x}$ существует единственная точка B такая, что $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$.

2. Для любых трёх точек A, B и C выполнено равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Этих аксиом достаточно для строгого изложения элементарной планиметрии, хотя, конечно, потребуются дополнительные определения. Например, следует сказать, что *длиной отрезка* AB называется число

$$|AB| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}},$$

или что *прямой линией*, проходящей через две различные точки A и B, называется множество точек M, для каждой из которых существует вещественное число α такое, что

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}.$$

Приведём ещё одно следствие из последней аксиомы. Для любых четырёх точек A, B, C и D справедливо равенство:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.$$

Поэтому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Это то, что при стандартном изложении векторной алгебры называется определением равенства векторов.

Рассмотрим следующую модель системы аксиом Вейля.

Пусть элементами множества точек P являются всевозможные упорядоченные пары чисел $(x,\ y)$. Слово *упорядоченные* означает, что пары чисел $(x,\ y)$ и $(y,\ x)$ считаются различными. Множество векторов V – также множество всех упорядоченных пар чисел. Эти числа мы, чтобы не путать, обозначим греческими буквами: $(\alpha,\ \beta)$.

Сложение векторов и умножение вектора на число λ определим формулами:

$$(\alpha + \beta) + (\alpha_1 + \beta_1) = (\alpha + \alpha_1,\ \beta + \beta_1),$$
$$\lambda(\alpha,\ \beta) = (\lambda\alpha,\ \lambda\beta).$$

Скалярное произведение векторов определим формулой:

$$(\alpha,\ \beta) \cdot (\alpha_1,\ \beta_1) = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1.$$

Если точки A и B – это пары чисел $(x,\ y)$ и $(x_1,\ y_1)$, то положим

$$\overrightarrow{AB} = (x_1 - x,\ y_1 - y).$$

Легко проверить, что все перечисленные в аксиомах свойства справедливы. Эта модель плоскости может быть названа *арифметической евклидовой плоскостью*. Она строится при помощи чисел и в принципе никак не связана ни с какими интуитивными геометрическими представлениями.

Происхождение описанной тут модели сомнений не вызывает. Если на обычной плоскости выбрать декартову систему координат, то каждой точке соответствуют её координаты $(x,\ y)$, и каждому вектору – его координаты $(\alpha,\ \beta)$. Таким образом, выбор системы координат определяет изоморфное отображение геометрической евклидовой плоскости на арифметическую.

И тут может показаться, что разницы между геометрической и арифметической плоскостью нет. Однако это совсем не так. На геометрической плоскости все точки одинаковы: точка не имеет индивидуальных свойств, и всё, что мы можем о ней сказать, сводится к её расположению относительно других точек. Другое дело – арифметическая плоскость. На ней каждая точка хотя бы одним десятичным знаком хотя бы одного из составляющих её чисел отличается от любой другой точки, и если мы все точки арифметической плоскости случайно просыплем на пол, то сможем каждую из них вернуть на прежнее место.

На арифметической плоскости, таким образом, справедливы все геометрические теоремы, но есть и такие свойства, которые на геометрической плоскости не могут быть сформулированы. Например, на арифметической плоскости можно назвать точку $(x,\ y)$ целочисленной, если x и y – целые числа. На геометрической плоскости это определение ввести можно только, если фиксировать систему координат, то есть отобразить геометрическую плоскость на арифметическую.

5. **Непротиворечивость и независимость.** Как и для определений при помощи перечисления условий, при применении аксиоматического метода встаёт вопрос о непротиворечивости выдвинутых требований – аксиом. И так же, как и в том случае, основной путь доказательства непротиворечивости – это построение объекта, который удовлетворяет этим требованиям, то есть модели для данной системы. Но полного ответа на этом пути получить нельзя: модель сама строится на основе какой-то системы аксиом, и потому существование модели говорит о непротиворечивости исследуемой системы только в том случае, если мы уверены, что сама модель построена с помощью непротиворечивой системы.

Так, рассмотренная нами модель системы аксиом Вейля построена с помощью чисел и, в конечном счёте, основывается на системе аксиом Пеано. Всё, что мы можем утверждать – это то, что аксиомы Вейля непротиворечивы, если непротиворечивы аксиомы Пеано.

Второй вопрос – это вопрос о независимости аксиом. Система аксиом зависима, если одну из них можно доказать при помощи остальных. Считается, что в хорошей аксиоматической теории аксиомы должны быть независимы. Однако это требование не столь категорично, как требование непротиворечивости: теория, построенная на зависимой системе аксиом вполне может существовать, и нередко требованием независимости пренебрегают.

Естественный путь исследования независимости какой-либо аксиомы от остальных такой. Заменим эту аксиому на противоположное утверждение. Если полученная система аксиом окажется противоречивой, исходная система была зависима, так как исследуемая аксиома доказана через остальные «от противного». Наоборот, если полученная система непротиворечива, то исследуемая аксиома независима от остальных. Таким образом, исследование независимости и исследование непротиворечивости тесно связаны между собой.

6. **Немного истории.** В первоначальной форме аксиоматический метод возник в древней Греции. Диалоги Платона построены по следующей схеме: «Давай сначала определим, в чём мы согласны, а после будем рассуждать логически, и я покажу, что прав я, а не ты». С III в. до н. э. образцом математической строгости было сочинение Евклида «Начала», в котором из немногих аксиом выводились теоремы геометрии. При этом аксиомы рассматривались как непосредственно очевидные истины, «то, в чём мы согласны».

Однако какие именно логические средства при этом использовались, никак не уточнялось. Кроме того, без оговорок использовались интуитивные соображения, касающиеся взаимного расположения и равенства геометрических объектов. Определения точки, прямой линии и других основных понятий были, по существу, описаниями, например: «Точка есть то, что не имеет частей».

В последующие века математиками были затрачены значительные усилия на то, чтобы разобраться, где, помимо аксиом, Евклид использовал геометрическую интуицию и наглядные представления, отступая, таким образом, от чисто логического вывода. Пристальное внимание привлекали и аксиомы. Одна из них – «постулат о параллельных прямых» – выделялась сложностью формулировки. И античные математики, и математики арабского мира, а позже и европейские, предпринимали попытки доказать постулат Евклида с помощью остальных аксиом. Попытки эти были безрезультатны, и к началу XIX в. профессиональными математиками из крупных научных центров были давно оставлены. Однако общее развитие математической мысли подготовило прорыв в этом направлении.

Взяться за популярную, но безнадёжную проблему мог либо провинциал, либо дилетант, оторванный от актуальных в то время вопросов. И вот два человека – молодой профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский и (на несколько лет позже) венгерский военный инженер Янош Больяи[1] в двадцатых годах XIX в. независимо друг от друга пришли к мысли о том, что постулат о параллельных независим от остальных аксиом. Постулат заменили противоположным утверждением, стали искать противоречие и не нашли. Н.И. Лобачевский продвинулся по этому пути гораздо дальше: он построил геометрию, которая не менее развита и красива, чем евклидова геометрия. После этого в существование противоречия поверить было трудно, но доказательства непротиворечивости не было.

Геометрия Лобачевского, которую он опубликовал под названием «Воображаемая геометрия», мало похожа на евклидову. Это обстоятельство и не допускающий сомнений не только у широкой публики, но и среди математиков, взгляд на аксиомы как на незыблемые истины, вызвали полное неприятие работ Лобачевского. Учёные не хотели его слушать, его освистывали на докладах и осмеивали в газетах. Понадобилась вся сила его незаурядного характера для того, чтобы продолжать работать и пропагандировать свои работы.

Ведущий математик того времени Карл Фридрих Гаусс пришёл к тем же идеям, но побоялся их опубликовать. Следует сказать, что Гаусс с похвалой отзывался о работах Больяи и Лобачевского. Эти отзывы помогли Лобачевскому, однако его недомолвки в большой мере определили трагическую судьбу Больяи.

Н.И. Лобачевский не дожил до признания своих идей. Когда после смерти Гаусса его архивы были опубликованы, многие математики принялись за работу, и результат не заставил себя ждать. В 1868 г. итальянский математик Эудженио Бельтрами построил модель аксиоматики плоскости Лобачевского с помощью специально выбранной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве. Вскоре последовали и боле совершенные модели, созданные Феликсом Клейном и Анри Пуанкаре. Эти модели показали, что система аксиом плоскости Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива система аксиом евклидовой плоскости. Казалось бы, вопрос можно было закрыть. Но сам по себе встал вопрос о непротиворечивости системы аксиом евклидовой геометрии... Окончательный вид аксиоматике евклидовой геометрии придал Давид Гильберт в 1899 г. Он показал, что его аксиомы непротиворечивы, если непротиворечивы аксиомы Пеано. Именно Гильберт придал аксиоматическому методу современный вид, описания которого мы только коснулись.

Начавшееся с работ Лобачевского изучение логических оснований геометрии привело к длившемуся всю последнюю треть XIX и значительную часть XX в. пересмотру оснований всей математики и полностью изменило её лицо. Работа Лобачевского на фоне этого гигантского труда выглядит небольшой. Но он обнаружил трещину в старом фундаменте, вызвавшую перестройку всего здания.

---

[1] J. Bolyai. Русскими буквами его фамилию пишут по-разному: Больяи, Больяй, Бойаи.