Мычка Евгений Юрьевич
Кандидат физико-математических наук старший научный сотрудник кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета МГУ. Выпускник СУНЦ МГУ 2002 года.

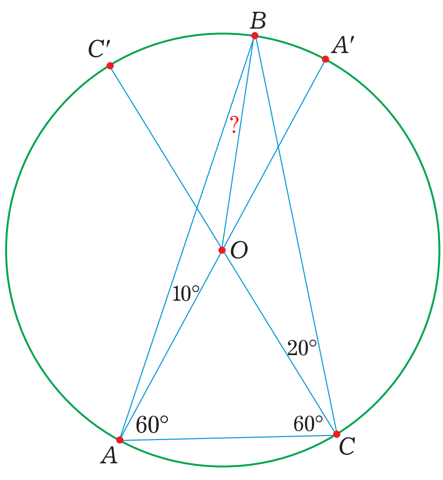
Об одном свойстве диагоналей правильного многоугольника и его применении к решению задачи о поиске угла

В статье обсуждается метод решения задачи о поиске угла с помощью одного свойства диагоналей правильного многоугольника.

При решении планиметрических задач крайне важно уметь делать полезное дополнительное построение. Дополнительные построения позволяют взглянуть на исходную задачу другими глазами и при удачных обстоятельствах пролить свет на происходящее. Задача о поиске угла − это особый вид планиметрических задач, в которых требуется определить угол, используя средства только элементарной геометрии (сумма углов в треугольнике, признаки подобия и равенства треугольников, теорема о вписанных углах и пр.). Заведомо, например, запрещено использовать тригонометрию и проективную геометрию, а также всевозможные теоремы, связанные с этим. В этой статье мы как раз и хотим поделиться с вами одной «разрешённой» конструкцией. Начнём с простого примера.

Задача 1. Внутри треугольника $\triangle ABC$ дана точка O. Известно, что $\angle OAC = \angle OCA = 60°$, $\angle BAO = 10°$, $\angle BCO = 20°$. Чему равен угол $\angle ABO$?

Решение. Опишем около треугольника $\triangle ABC$ окружность и продлим до пересечения с ней отрезки



AO и CO. Полученные точки обозначим A' и C'.

Данные по условию задачи углы позволяют вычислить градусные меры дуг $CA'C'$ и $A'C'A$. Они равны по 180°. Следовательно, AA' и CC' – диаметры, а точка O – центр окружности. Таким образом, отрезки AO и BO равны как радиусы, а искомый угол $\angle ABO$ равен 10°, т.к. треугольник $\triangle ABO$ равнобедренный. □

При решении задачи 1 ключевым моментом для нас стало то обстоятельство, что продолженные отрезки AA' и CC' оказались диаметрами описанной окружности. А что если продолженные отрезки окажутся не диаметрами окружности, а просто диагоналями некоторого правильного многоугольника? В некоторых ситуациях продолженный отрезок BB' также будет диагональю многоугольника. Именно это в последствии и позволит нам вычислять искомый угол. Перед тем как проиллюстрировать сказанное на конкретных примерах, докажем теорему.

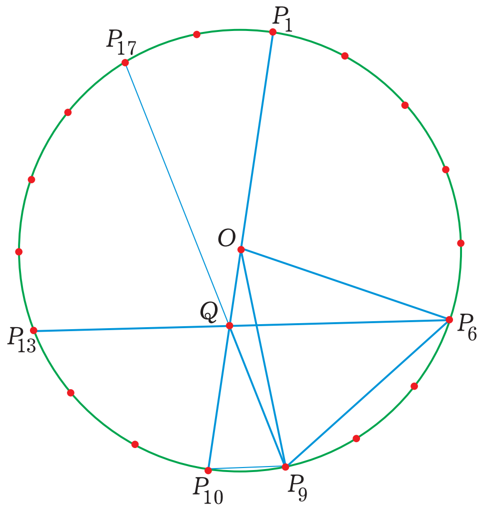
Теорема о диагоналях. Пусть дан правильный 18-угольник $P_1P_2\ldots P_{18}$. Тогда

а) диагонали P_1P_{10}, P_6P_{13} и P_9P_{17} пересекаются в одной точке;

б) диагонали P_4P_{11}, P_8P_{14} и P_9P_{16} пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим центр окружности, описанной около $P_1P_2\ldots P_{18}$, через O.

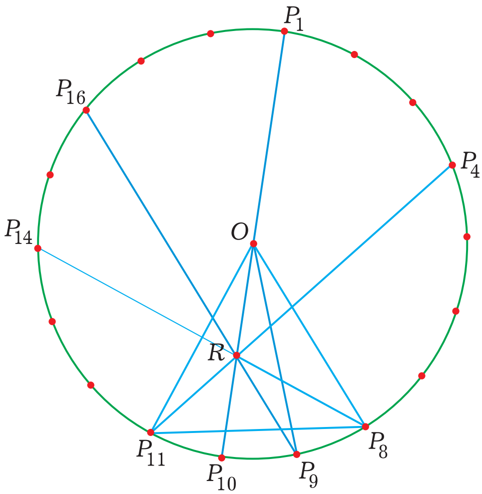
а) Обозначим точку пересечения диагоналей P_1P_{10} и P_6P_{13} через Q и проведём отрезок P_9Q. Наша цель – доказать, что прямая P_9Q пересечёт окружность второй раз в точке P_{17}. Для этого рассмотрим треугольник $\triangle OP_6P_9$.

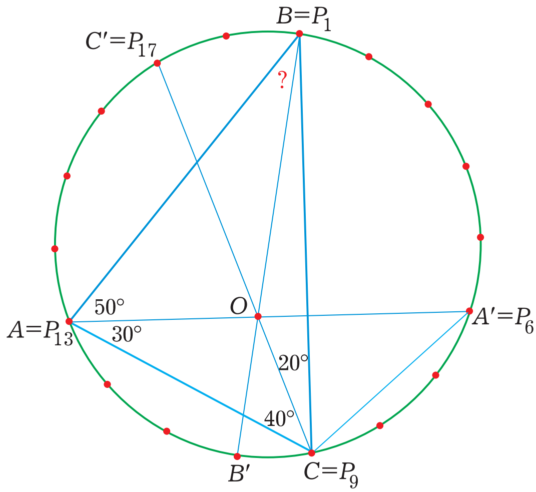


В треугольнике $\triangle OP_6Q$ угол $\angle P_6$ равен 20°, угол $\angle O$ равен 80°, следовательно, угол $\angle Q$ также равен 80°, и треугольник $\triangle OP_6Q$ равнобедренный, $P_6Q = P_6O$. Треугольник $\triangle OP_6P_9$ равносторонний, $P_6P_9 = P_6O$. Таким образом, $P_6Q = P_6P_9$ и треугольник OP_6P_9 равнобедренный с углом при основании $\angle P_6P_9Q = 70°$. Угол $\angle OP_9Q$ равен разности углов $\angle OP_6P_9Q - \angle P_6P_9O$ и равен 10°. Отрезок P_9O пересекает окружность второй раз в точке P_{18}, значит, P_9Q пересекает окружность второй раз в точке P_{17}.

б) Обозначим точку пересечения диагоналей P_4P_{11} и P_9P_{16} через R. Точка R принадлежит диаметру P_1P_{10}, т.к. диагонали P_4P_{11} и P_9P_{16} симметричны относительно него. Рассмотрим треугольник $\triangle OP_8P_{11}$.

Из равенства углов $\angle ROP_{11}$ и $\angle RP_{11}O$ (они равны по 20°), а также из того, что треугольник $\triangle OP_8P_{11}$ является равносторонним, следует,





что P_8R является биссектрисой угла $\angle OP_8P_{11}$. Следовательно, угол $\angle OP_8R$ равен 30° и продолжение отрезка P_8R пересекает окружность в точке P_{14}. □

Теперь с помощью теоремы о диагоналях решим такую задачу.

Задача 2. Внутри треугольника $\triangle ABC$ дана точка O. Известно, что $\angle OAC=30°$, $\angle OCA=40°$, $\angle BAO=50°$, $\angle BCO=20°$. Чему равен угол $\angle ABO$?

Решение. Опишем около треугольника $\triangle ABC$ окружность и продлим отрезки AO, BO и CO до вторичного пересечения с ней. Обозначим получившиеся хорды AA', BB' и CC'. Из данных по условию задачи углов видно, что в окружность вписывается правильный 18-угольник так, что $A=P_{13}$, $C'=P_{17}$, $B=P_1$, $A'=P_6$, $C=P_9$.

Из теоремы о диагоналях, пункт а), мы знаем, что хорда BB' также будет диагональю 18-угольника и, следовательно, $B'=P_{10}$. Теперь искомый угол легко вычисляется и равен 30°. □

Замысел статьи появился благодаря двум задачам, которые меня просто очаровали. Одна из них мне встретилась совершенно случайно на просторах интернета, а другую я увидел на youtube-канале «Математика и фокусы». Обе задачи очевидно являлись родственными, но решались при этом различными и оригинальными дополнительными построениями. Мне захотелось разобраться в чём же тут дело, в результате чего и получилась предлагаемая конструкция. Приведём решение этих двух задач нашим способом.

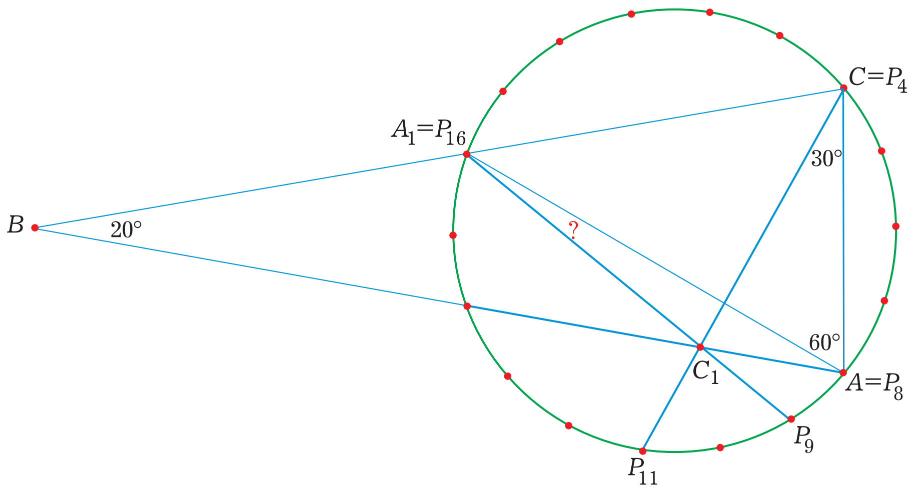
Задача 3. В равнобедренном треугольнике $\triangle ABC$ угол при вершине B равен 20°. На боковой стороне BC отмечена точка D так, что $BD = AC$. Чему равен угол $\angle ADC$?

Решение. Проведём окружность с центром в точке B радиуса BA. Сделаем переобозначения $A=P_9$, $B=O$, $C=P_{10}$ и рассмотрим рисунок к теореме о диагоналях, пункт а). Из равенства треугольников $\triangle OP_6Q$ и $\triangle OP_9OP_{10}$ следует, что $OQ=P_9P_{10}$, следовательно, $D=Q$.

Но тогда искомый угол легко вычисляется и равен 30°. □

Задача 4. В равнобедренном треугольнике $\triangle ABC$ угол при вершине B равен 20°. На боковых сторонах AB и BC выбраны точки C_1 и A_1 так, что $\angle A_1AC = 60°$ и $\angle C_1CA = 30°$. Чему равен угол $\angle C_1A_1A$?

Решение. Опишем около треугольника $\triangle AA_1C$ окружность. Из данных по условию задачи углов видно, что в окружность вписывается правильный 18-угольник так, что $A = P_8$, $A_1 = P_{16}$, $C = P_4$ и продолженный отрезок CC_1 пересекает окружность в точке P_{11}.



Из теоремы о диагоналях, пункт б), мы знаем, что продолженный отрезок A_1C_1 также будет диагональю 18-угольника, причём пересекать окружность второй раз будет в точке P_9. Теперь искомый угол легко вычисляется и равен 10°. □

Приведённые решения задач основаны на том, что именно в правильном 18-угольнике некоторые диагонали пересекаются в одной точке. Но кроме 18-угольника есть и другие правильные многоугольники. Это приводит нас к задаче исследовательского типа: искать в правильных n-угольниках тройки диагоналей, пересекающихся в одной точке. Каждая найденная тройка диагоналей даст новую задачу о поиске угла!

В заключение, приводим несколько задач для самостоятельного решения. Скорее всего вам понадобится ещё одна тройка: в правильном 18-угольнике диагонали P_1P_{10}, P_7P_{12} и P_9P_{15} пересекаются в одной точке. Задачи, связанные с равнобедренным треугольником с углом при вершине в 20°, хорошо известны, они обсуждаются и имеют свою историю. Об этом и о многом другом можно узнать на интересном сайте https://thinkzone.wlonk.com/MathFun/Triangle.htm. На это мне указал Франк Рем – член редакционной коллегии немецкого математического журнала MONOID для детей 5–13 классов (https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/).

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан треугольник $\triangle ABC$ и две чевианы AA_1, CC_1. Известно, что $\angle A_1AC=\angle C_1CA=60°$ и $\angle BAA_1+\angle BCC_1=30°$. Докажите, что точка пересечения чевиан является центром описанной окружности.

2. В равнобедренном треугольнике $\triangle ABC$ угол при вершине B равен $20°$. На боковой стороне BC отмечена точка D так, что $BD=2AC$. Чему равен угол $\angle ADC$?

3. В равнобедренном треугольнике $\triangle ABC$ угол при вершине B равен $20°$. На боковых сторонах AB и BC выбраны точки C_1 и A_1 так, что

а) $\angle A_1AC=50°$ и $\angle C_1CA=70°$;

б) $\angle A_1AC=60°$ и $\angle C_1CA=50°$;

в) $\angle A_1AC=70°$ и $\angle C_1CA=60°$;

Чему равен угол $\angle C_1A_1A$?

Новости Новости Новости Новости Новости

10 лет вперед

Андрей Райгородский, директор Физтех-школы прикладной математики и информатики (ФПМИ) МФТИ

Наука стремительно движется вперед, но на такую короткую перспективу, как ближайшие 10 лет, легче обозначить основные тренды развития, чем степень внедрения новых технологий в производство.

Активно будут развиваться проекты в области искусственного интеллекта, но насколько высок потолок, ограничивающий возможности нынешних идей и методов, пока сказать трудно. Да и десять лет – не такой уж долгой срок для полноценного внедрения. Возможно, лет через 20–30 мы будет вживлять чипы для совершенствования мозговой деятельности, но навряд ли в ближайшее десятилетие в данном направлении будут сделаны радикальные шаги. Даже интеллектуальный транспорт без управления человеком – не захватит мир в столь короткий период.

Также большое внимание будет уделено разработкам в области квантового компьютера. Хотя еще в начале двухтысячных были радужные прогнозы, только в прошлом году было заявлено о построении компьютера, достигшего квантового превосходства, то есть решающего задачу, которая не решается на классическом компьютере. Правда, пока эта задача не имеет практического смысла. Так что на десятилетие есть два варианта развития событий:

- Радикальный: квантовые компьютеры дорастут до такой мощности, что смогут реализовать алгоритм Шора разложения на множители. В результате криптографические протоколы, основанные на RSA и других примитивах, связанных с модулярной арифметикой, станут небезопасными. Но это не значит, что все электронные платежи и защищенная почта перестанут работать. Вместо этого произойдет переход на постквантовую криптографию, основанную, например, на теории решеток.
- Консервативный: область будет развиваться теоретически и экспериментально, будет много замечательных достижений, но на практически значимую мощность квантовые компьютеры не выйдут. Возможно, будут обнаружены фундаментальные физические причины, препятствующие масштабированию выше определенного уровня.

А еще, конечно, математики докажут массу красивейших теорем ☺

Источник информации https://zanauki.mipt.ru/2020/02/08/10-let-vpered/