Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий инженер Лаборатории по работе с одаренными детьми МФТИ.

Об одном диофантовом уравнении, или как решают уравнения физики

Решено нелинейное диофантово уравнение. Рассмотрены особенности поведения его решений (решений оказалось бесконечно много) при возрастании номеров корней.

Уравнение, о котором пойдет речь, «подбросил» автору статьи лет 20 назад его коллега по Институту атомной энергии им. И.В. Курчатова. Еще и поддразнивал: «*Слаб**о**, мол, решить?*» ☺ – Не с первой попытки (да-да!), уравнение все же решить удалось.

Нас будет интересовать решение *в целых числах* уравнения

$$2x^2 - y^2 = 1, \quad x, y \in Z. \qquad (1)$$

Похожее уравнение

$$2x^2 - y^2 = 0 \qquad (2)$$

в целых числах решений не имеет; иначе бы корень квадратный $\sqrt{2}$ был **числом рациональным**. На самом деле, известно, что $\sqrt{2} \neq \dfrac{m}{n}$, $m,\ n \in Z$.

А вот решения в целых числах уравнение (1) имеются! Одно решение очевидно; это пара чисел

$$x_1 = y_1 = 1. \qquad (3)$$

Есть ли другие решения уравнения (1)? – Оказывается, их даже бесконечно много!

В дальнейшем будем интересоваться не просто целочисленными решениями, но решениями **в натуральных числах**. Это не ограничивает общности рассмотрения. В целых числах количество корней лишь учетверится: кроме пары (3), будут еще пары 2) $x = -1$, $y = 1$, 3) $x = 1$, $y = -1$ и 4) $x = -1$, $y = -1$.

1. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ИДЕЯ состоит в следующем: представим левую и правую части уравнение (1) в несколько ином виде

$$\left(\sqrt{2}x-y\right)\cdot\left(\sqrt{2}x+y\right)=$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right). \qquad (1^*)$$

Из такой формы записи, разумеется, сразу «угадывается» корень $x_1=y_1=1$.

Но единицу в правой части (1) можно **представить и еще бесконечно большим числом способов**:

$$1=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=\left(\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2=$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^3\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^3=$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^4=\left(\sqrt{2}-1\right)^5\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^5=$$

Для всех ***нечетных степеней*** имеем:

$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n-1}=A_n\sqrt{2}-B_n$ и **одновременно** $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1}=A_n\sqrt{2}+B_n$ (4-5)

с теми же коэффициентами A_n и B_n. Например, для $n=2$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^3=2\sqrt{2}-3\cdot2+3\sqrt{2}-1=$$
$$=5\sqrt{2}-7 \qquad (4.1)$$

и $$\left(\sqrt{2}+1\right)^3=2\sqrt{2}+3\cdot2+3\sqrt{2}+1=$$
$$=5\sqrt{2}+7 \qquad (5.1)$$

Это наблюдение позволяет сразу найти еще один корень уравнения (1):

$$\left(\sqrt{2}x-y\right)\cdot\left(\sqrt{2}x+y\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)^3\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^3=$$
$$=\left(5\sqrt{2}-7\right)\cdot\left(5\sqrt{2}+7\right); \qquad (6)$$

сравнивая коэффициенты при $\sqrt{2}$ и слагаемые без $\sqrt{2}$ в скобках слева и справа, видим, что

$$x_2=5,\quad y_2=7. \qquad (7)$$

Прежде чем искать другие корни уравнения (1), скажем, что для всех ***четных степеней***:

$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}=-C_n\sqrt{2}+D_n$ **одновременно** имеем $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}=C_n\sqrt{2}+D_n$ (8-9)

с теми же коэффициентами C_n и D_n. Например, при $n=2$ имеем

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^2=2-2\cdot\sqrt{2}+1=-2\sqrt{2}+3 \qquad (8.1)$$

и

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2=2+2\cdot\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}+3. \qquad (9.1)$$

В этом случае

$$\left(\sqrt{2}x-y\right)\cdot\left(\sqrt{2}x+y\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^2=$$
$$=\left(-2\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+3\right);$$

в правой части в первой скобке возникло слагаемое «$-2\sqrt{2}$» со знаком «минус» при $\sqrt{2}$. Теперь не удается приравнять одновременно друг другу коэффициенты при $\sqrt{2}$ и слагаемые без $\sqrt{2}$ **в разных скобках**. Так что представление единицы в правой части (1) в виде $1=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}$ новых корней уравнения (1) не дает.

Возвращаемся к нечетным степеням.

$$\left(\sqrt{2}x-y\right)\cdot\left(\sqrt{2}x+y\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)^5\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^5=$$
$$=\left(29\sqrt{2}-41\right)\cdot\left(29\sqrt{2}+41\right), \qquad (10)$$

откуда

$$x_3=29,\quad y_3=41. \qquad (11)$$

Продолжим процедуру:

$$\left(\sqrt{2}x-y\right)\cdot\left(\sqrt{2}x+y\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)^7\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^7=$$
$$=\left(169\sqrt{2}-239\right)\cdot\left(169\sqrt{2}+239\right); \qquad (12)$$

отсюда

$$x_4=169,\quad y_4=239. \qquad (13)$$

Небольшая подсказка. Уже при получении $\left(\sqrt{2}+1\right)^5=29\sqrt{2}+41$ возникают проблемы: не все мы помним коэффициенты бинома Ньютона. Тогда на помощь приходит прием прямого перемножения скобок с учетом предыдущего шага:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^5=\left(\sqrt{2}+1\right)^3\left(\sqrt{2}+1\right)^2=$$

$$=\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)=(15+14)\sqrt{2}+(20+21)=$$

$=29\sqrt{2}+41$. Здесь мы воспользовались уже найденным ранее соотношением (5.1): $\left(\sqrt{2}+1\right)^3=5\sqrt{2}+7$.

Далее – по той же схеме:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^7=\left(\sqrt{2}+1\right)^5\left(\sqrt{2}+1\right)^2=$$

$$=\left(29\sqrt{2}+41\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)=$$

$$=(87+82)\sqrt{2}+(123+116)=169\sqrt{2}+239.$$

На каждом новом шаге пользуемся результатом, полученным на предыдущем шаге.

Если вдуматься в используемую процедуру, легко сообразить, что все корни (1) можно получить из соотношения

$$x_n\sqrt{2}+y_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1}\quad n=1,2,3,\ldots \quad (14)$$

Последнее можно записать еще иначе

$$x_{n+1}\sqrt{2}+y_{n+1}=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}=$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1}\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\left(x_n\sqrt{2}+y_n\right)\left(3+2\sqrt{2}\right), \quad (15)$$

или

$$x_{n+1}\sqrt{2}+y_{n+1}=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}=$$

$$=\left(3x_n+2y_n\right)\sqrt{2}+\left(4x_n+3y_n\right). \quad (15^*)$$

Это соотношение позволяет получить рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} x_{n+1}=3x_n+2y_n \\ y_{n+1}=4x_n+3y_n \end{cases} \quad x_1=y_1=1 \quad (16)$$

Выпишем несколько первых корней уравнения (1), вычисленных по формулам (16):

$$\begin{cases} x_2=3x_1+2y_1=3+2=5 \\ y_2=4x_1+3y_1=4+3=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=3\cdot 5+2\cdot 7=29 \\ y_3=4\cdot 5+3\cdot 7=41 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4=3\cdot 29+2\cdot 41=169 \\ y_4=4\cdot 29+3\cdot 41=239 \end{cases}$$

Мы снова получили значения (7), (11) и (13). Использование рекуррентных формул (16), видимо, – самый простой способ вычисления корней.

2. О ПОЛЬЗЕ САМОИЗОЛЯЦИИ ☺

На этом можно было бы поставить точку: читателю показаны два способа решения уравнения (1) – из соотношения (14) и по рекуррентным формулам (16). Недавно автор вспомнил об этой задачке, сидя на самоизоляции по поводу коронавируса. Удалось найти одно любопытное свойство полученных ранее решений, о которых математики, вероятно, тоже давно знают. Не уверен, однако, что о них знают школьники. Поэтому продолжим.

Сведем в таблицу несколько первых корней уравнения (1)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	5	29	169	985	5 741	33 461	195 025
y_n	1	7	41	239	1 393	8 119	47 321	275 807

Из таблицы видно, что значения x_n и y_n быстро растут с ростом номера корня. – Вопрос «*Как быстро растут?*» Автор, в прошлом физик-теоретик, немного «поэкспериментировал» с числами таблицы. Он обнаружил, что отношения корней $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ и $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ близки друг к другу и, начиная с $\frac{x_3}{x_2}$ и $\frac{y_3}{y_2}$, близки к значению $5{,}83$. Например,

$$\frac{x_7}{x_6}=\frac{33461}{5741}=5{,}828427103$$

$$\frac{x_8}{x_7}=\frac{195025}{33461}=5{,}828427124$$

$$\frac{y_7}{y_6}=\frac{47321}{8119}=5{,}828427146$$

$$\frac{y_8}{y_7}=\frac{275807}{47321}=5{,}828427125.$$

Этот «экспериментальный» факт наводил на мысль, что при $n\to\infty$ отношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ и $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ стремятся к некоему общему пределу, равному таинственному числу «5,828427125» (или, может быть, «5,828427124»).

Что это за число? Из каких других чисел оно «конструируется»? Может, оно каким-то образом связано с «вездесущими» числами $\pi=3{,}141592654\ldots$ и $e=2{,}718281828\ldots$? – Сразу скажем, что нет: к этим «фундаментальным константам» число 5,828427125 не имеет отношения. Всё прозаичнее.

Начнем с того, что при $n\to\infty$ стремится к конечному пределу отношение $\frac{y_n}{x_n}$. Найдем $c=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$.

Воспользуемся формулами (16):

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}=\frac{4x_n+3y_n}{3x_n+2y_n}=\frac{4+3y_n/x_n}{3+2y_n/x_n}.$$

Тогда при $n\to\infty$ имеем

$$c=\frac{4+3c}{3+2c}\Rightarrow 3c+2c^2=4+3c\Rightarrow 2c^2=4,$$

т.е.
$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\sqrt{2}. \qquad (17)$$

Полученный результат легко понять, если вернуться непосредственно к уравнению (1), записать его в виде $2x^2=y^2+1$ и учесть, что для больших y пренебрежимо мал вклад единицы в правую часть этого уравнения, т.е. имеем $2x^2\approx y^2$. Подчеркнем: здесь – **приближенное** равенство, а **не точное**! Но оно тем точнее выполняется, чем больше y (и x, разумеется).

А теперь найдем пределы $k_1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ и $k_2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}$. Снова вернемся к формулам (16). Запишем их в виде

$$\begin{cases}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=3+2\dfrac{y_n}{x_n}\\[2mm] \dfrac{y_{n+1}}{y_n}=4\dfrac{x_n}{y_n}+3\end{cases}$$

Тогда при $n\to\infty$ получаем

$$\begin{cases}k_1=3+2c=3+2\sqrt{2}\\[2mm] k_2=4\dfrac{1}{c}+3=4\dfrac{1}{\sqrt{2}}+3=2\sqrt{2}+3=k_1\end{cases}$$

В итоге находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=k=3+2\sqrt{2}=5{,}828427125\ldots \qquad (18)$$

Итак, целочисленные корни уравнения $2x_n^2-y_n^2=1$ при больших значениях номеров растут, грубо говоря, как члены геометрической прогрессии $\frac{x_{n+1}}{x_n} \approx \frac{y_{n+1}}{y_n}$ с множителем $k = 3+2\sqrt{2} = 5{,}828427125...$ Из чего «конструируется» число «5,828427125...» теперь видно.

Такие задачки по математике решали на досуге физики Курчатовского института. ☺

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РАССМОТРЕНИЯ (в качестве целочисленных корней снова ищите натуральные)

1. (*) Докажите общую формулу для целочисленных корней уравнения $2x^2 - y^2 = 1$ (1)

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_{2n+1}^{2k}$$

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_{2n+1}^{2k+1} \quad (19-20)$$

где $n = 0,1,2,3,...$, $C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ – биномиальные коэффициенты.

2. (*) Докажите общую формулу для целочисленных корней уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ (21)

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_{2n}^{2k}.$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k-1} C_{2n}^{2k+1} \quad (22-23)$$

где $n = 1,2,3,...$

3. Решите в целых числах уравнение $2x^2 - y^2 = 2$ (24).

УКАЗАНИЕ: $y = 2z$, тогда для x и z имеем уравнение $x^2 - 2z^2 = 1$ (21) из задачи 2.

4. Докажите, что целочисленные корни уравнения $x^2 - 2z^2 = 1$ можно искать по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4z_n \\ z_{n+1} = 2x_n + 3z_n \end{cases} \quad x_1 = 3, z_1 = 2 \quad (25)$$

Покажите, что первыми тремя парами корней уравнения (3) будут $\{3;4\},\{17;24\},\{99;140\}$.

5. Решите в целых числах уравнение $2x^2 - y^2 = 2$ (26), представив правую часть в виде

$$2 = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{2n+1} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^{2n+1} \quad (27)$$

УКАЗАНИЕ. Убедитесь, что $\sqrt{2}(\sqrt{2}\pm 1)^{2n+1} = A_n\sqrt{2} \pm B_n$.

6. Решите в целых числах уравнение $3x^2 - y^2 = 2$ (28) представив правую часть в виде

$$1 = (\sqrt{3}-1)^n(\sqrt{3}+1)^n \quad (29)$$

Покажите, что первыми тремя парами корней уравнения (28) будут $\{1;1\},\{3;5\},\{11;19\}$.

7. Решите в целых числах уравнение $4x^2 - 3y^2 = 1$ (30) представив правую часть в виде

$$1 = (2-\sqrt{3})^n(2+\sqrt{3})^n \quad (31)$$

Покажите, что первыми тремя парами корней уравнения (30) будут $\{1;1\},\{13;15\},\{181;209\}$.

8. Докажите, что целочисленные корни $(m+1)x^2 - m\cdot y^2 = 1$ (32) можно искать как коэффициенты в разложении

$$(\sqrt{m+1} \pm \sqrt{m})^{2n+1} = = x_n\sqrt{m+1} \pm y_n\sqrt{m}. \qquad (33)$$

Покажите, что

$$x_1 = 4m+1 \quad y_1 = 4m+3, \qquad (34)$$

$$x_2 = 16m^2 + 12m + 1$$

$$y_2 = 16m^2 + 20m + 5 \qquad (35)$$

9. Докажите, что в поиске целочисленных корней уравнения $x^2 - m(m+1)\cdot y^2 = 1$ (36) может помочь следующее наблюдение

$$(\sqrt{m+1} \pm \sqrt{m})^{2n} = = A_n \pm B_n\sqrt{m+1}\sqrt{m}. \qquad (37)$$

Покажите, что для $m = 2$ первые три пары корней уравнения (36) таковы: $\{5;2\},\{49;20\},\{485;198\}$

10. (*) Докажите, что для произвольных значений m первые три пары целочисленных корня уравнения $x^2 - m(m+1)\cdot y^2 = 1$ вычисляются по формулам:

$$x_1 = 2m+1, \quad y_1 = 2 \qquad (38)$$

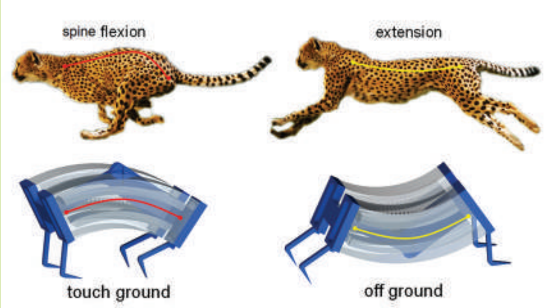
$$x_2 = 8m^2 + 8m + 1, \quad y_2 = 8m + 4 \qquad (39)$$

$$x_3 = 32m^3 + 48m^2 + 18m + 1,$$

$$y_3 = 32m^2 + 32m + 6 \qquad (40)$$

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Вдохновленные гепардами, исследователи создают быстрых мягких роботов



Вдохновленные биомеханикой гепардов, исследователи разработали новый тип мягкого робота, способного быстрее передвигаться по твердой поверхности или в воде, чем предыдущие поколения мягких роботов. Новая мягкая робототехника также способна деликатно захватывать предметы – или с достаточной силой, чтобы поднимать тяжелые предметы.

«Гепарды – самые быстрые существа на земле, и их скорость и мощь определяются изгибанием позвоночника», – говорит Цзе Инь, доцент кафедры машиностроения и аэрокосмической техники Университета Северной Каролины и автор статьи о новых мягких роботах. «Мы были вдохновлены гепардом, чтобы создать тип мягкого робота, который имеет пружинный, «бистабильный» позвоночник, что означает, что робот имеет два стабильных состояния», - говорит Инь. «Мы можем быстро переключаться между этими стабильными состояниями, закачивая воздух в каналы, которые выравнивают мягкий силиконовый робот. Переключение между двумя состояниями высвобождает значительное количество энергии, что позволяет роботу быстро приложить силу к Земле.» «Предыдущие мягкие роботы были гусеницами, постоянно находящимися в контакте с землей. Это ограничивает их скорость».

Источник: New-Science.ru https://new-science.ru