Ажгалиев Урынбасар
Кандидат педагогических наук,
учитель математики школы-гимназии № 4,
г. Нур-Султан, Казахстан.

О способах решения одной задачи аналитической геометрии

Координатный метод является одним из самых мощных и универсальных методов решения геометрических задач.

Проиллюстрируем сказанное на примере одной задачи, решив ее 15 способами.

Задача

Дана прямая l своим уравнением: $2x-y+1=0$ и точка $A(3;-1)$. Требуется вычислить координаты точки B, симметричной точке A относительно прямой l.

Решение:

I способ

Пусть точка B имеет координаты $(m;\ n)$ (рис. 1). Рассмотрим произвольную точку $M(x;y)\in l$. И пусть $MA = MB$ или $MA^2 = MB^2$. Переходя к координатам получаем:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=(x-m)^2+(y-n)^2,$$

откуда после упрощений получаем уравнение:

$$2x(3-m)-2y(1+n)+m^2+n^2-10=0.$$

Это уравнение является уравнением оси симметрии. Но с другой стороны

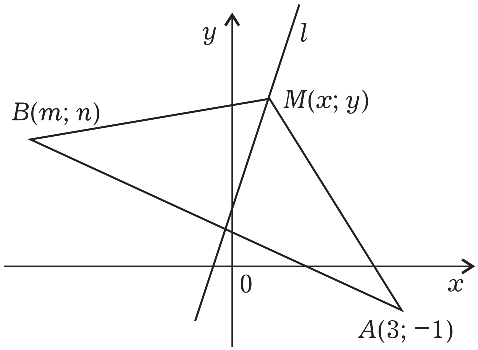

Рис. 1

ось симметрии задана уравнением $2x-y+1=0$. Так как эти уравнения выражают одну и ту же прямую, то все их коэффициенты должны быть пропорциональными:

$$\frac{2(3-m)}{2}=\frac{-2(1+n)}{-1}=\frac{m^2+n^2-10}{1}.$$

Мы получили систему уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{cases} m+2n=1, \\ m^2+n^2+m=13. \end{cases}$$

Система имеет две пары решений $(3;\,-1)$ и $\left(-\frac{17}{5};\frac{11}{5}\right)$. Первое решение соответствует точке A, второе соответствует точке B. Итак $B\left(-\frac{17}{5};\frac{11}{5}\right)$ искомая точка.

II способ

Пусть $M \in l$ и имеет координаты x и $2x + 1$ (рис. 2). Переходя от равенства $MA^2 = MB^2$ к координатам получаем:

$$(x-3)^2+((2x+1)+1)^2=$$

$$=(x-m)^2+((2x+1)-n)^2 \text{ или}$$

$$2(m+2n-1)x+12-m^2-n^2+2n=0.$$

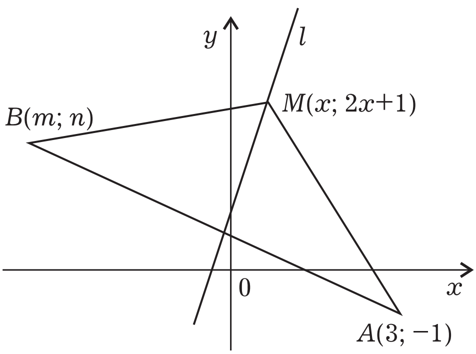

Рис. 2

Поскольку этому уравнению удовлетворяет любое значение x, то коэффициенты уравнения равны нулю:

$$\begin{cases} m+2n-1=0, \\ m^2+n^2-2n-12=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим координаты точки B: $B\left(-\frac{17}{5};\frac{11}{5}\right)$.

III способ

Пусть P и Q – точки пересечения l с осями координат (рис. 3). Так как $PA^2 = PB^2$ и $QA^2 = QB^2$, то приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} m^2+(n-1)^2=9+4, \\ \left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2=\frac{49}{4}+1, \end{cases}$$

или $\begin{cases} m^2+n^2-2n-12=0, \\ m^2+n^2+m-13=0. \end{cases}$

Решив систему, находим координаты точки B: $m=-\frac{17}{5}$, $n=\frac{11}{5}$.

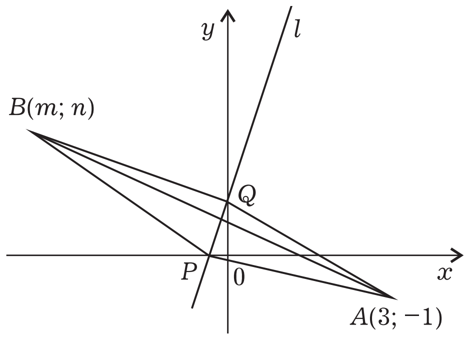

Рис. 3

IV способ

Пусть $M \in l$ и $M(x; 2x+1)$ (рис. 4) Рассмотрим квадрат длины отрезка MA как функцию x.

Имеем $MA^2=(x-3)^2+(2x+2)^2=$ $=5x^2+2x+13=f(x)$. Минимум этой функции достигается при $x=-\frac{1}{5}$.

Тогда точка E имеет координаты $\left(-\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$. По формуле деления отрезка пополам находим координаты точки B. Имеем: $B\left(-\frac{17}{5};\frac{11}{5}\right)$.

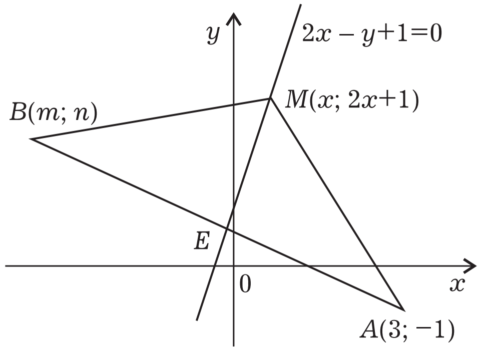

Рис. 4

V способ

Пусть E – середина отрезка AB (рис. 5). Легко видеть, что E имеет координаты: $E\left(\frac{m+3}{2};\frac{n-1}{2}\right)$. Так как $E\in l$, то $2\left(\frac{m+3}{2}\right)-\frac{n-1}{2}+1=0.$ или

$2m-n+9=0$ (1)

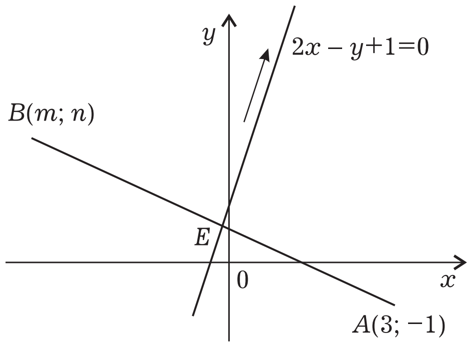

Рис. 5

Рассмотрим точки $M_1\in l$, $M_2\in l$, где $M_1(x_1;2x_1+1)$, $M_2(x_2;2x_2+1)$.

Тогда $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1;2(x_1-x_1)\right)$. Возьмем $\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{M_1M_2}$, где $\vec{a}(1;2)$. Так как $\vec{a}\perp\overrightarrow{AB}$, то $(m-3)+(n+1)2=0$ или $2n+m-1=0$ (2)

Из (1) и (2) имеем $m=-\frac{17}{5}$, $n=\frac{11}{5}$.

VI способ

Пусть E – середина отрезка AB (рис. 6). Учитывая, что $E\in l$ можно записать $E(x_0;2x_0+1)$. Применяя формулы деления отрезка пополам имеем: $B(2x_0-3;4x_0+3)$. Из третьего способа известно, что $Q\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Тогда $BQ^2=AQ^2=\frac{53}{4}$ или

$\left(2x_0-\frac{5}{2}\right)^2+(4x_0+3)^2=\frac{53}{4}$ или

$10_0^2+7x_0+1=0$, откуда $x_0=-\frac{1}{2}$, $x_0=-\frac{1}{5}$. Первое значение не годится, так как совпадает с координатой точки E. Значит $x_0=-\frac{1}{5}$, следовательно $B\left(-\frac{17}{5};\frac{11}{5}\right)$.

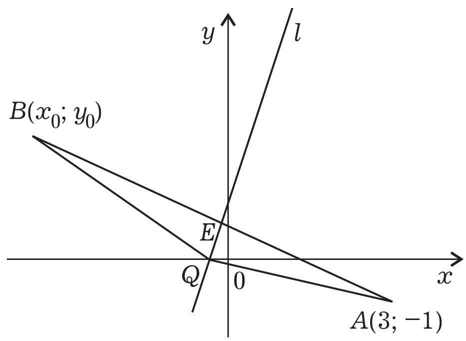

Рис. 6

VII способ

Определим Q из условия $AQ\parallel Ox$ и $Q\in l$ (рис. 7). Так как $Q\in l$, то $Q(-1;-1)$. Если $B(x_0;y_0)$, то $E\left(\frac{3+x_0}{2};\frac{-1+y_0}{2}\right)$. Из того, что $E\in l$ и $BQ=AQ$ имеем

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 + 9 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 + 2y_0 = 14. \end{cases}$$

Решив эту систему находим координаты точки B: $x_0 = -\frac{17}{5}$, $y_0 = -\frac{11}{5}$.

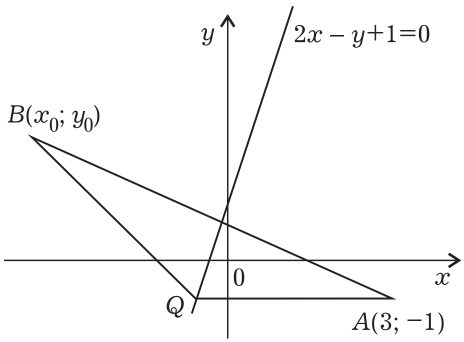

Рис. 7

VIII способ

Возьмем произвольную точку на прямой l: $P(2;5)$ (рис8). Составим уравнение окружности с центром в точке A и радиусом AP. Имеем:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 37.$$

Решаем совместно уравнения окружности и прямой l:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y - 27 = 0, \\ 2x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

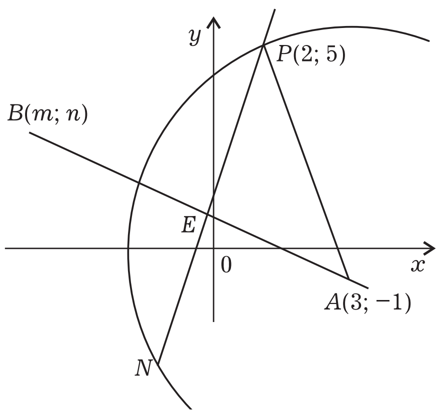

Рис. 8

Эта система имеет две пары решений: $(2;5)$ и $\left(-\frac{12}{5}; -\frac{19}{5}\right)$.

Эти решения соответствуют точкам P и N. Так как точка E является серединой отрезка PN, то легко можно найти координаты точки E: $x_E = -\frac{1}{5}$, $y_E = \frac{3}{5}$.

Теперь зная координаты точек A и E находим координаты точки B: $B\left(-\frac{17}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

IX способ

В курсе аналитической геометрии доказывается, что угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 k_2 = -1$, $k_l = 2$ (рис. 9). Тогда $k_{AB} = -\frac{1}{2}$. Составим уравнение прямой AB по формуле $y = kx + b$. Имеем $y = -\frac{1}{2}x + b$. Учитывая, что $A \in AB$ имеем $-1 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$, откуда $b = \frac{1}{2}$. Тогда уравнение AB запишется в виде $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ или $2y + x - 1 = 0$. Возьмем точку $M(1;3)$ принадлежа-

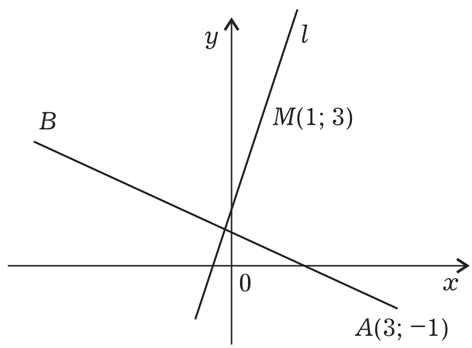

Рис. 9

щую прямой l. Тогда $AM=\sqrt{20}$. Составим уравнение окружности с центром в точке M и радиусом MB: $(x-1)^2+(y-3)^2=20$.

Теперь для нахождения координаты точки B составляем систему уравнений

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=20,\\ x+2y-1=0.\end{cases}$$

Решив систему находим координаты точки B. Имеем $\left(-\frac{17}{5};\frac{11}{5}\right)$.

X способ

Как в IX способе составляем уравнение прямой AB: $2y+x-1=0$. Решим это уравнение совместно с уравнением данной прямой l:

$$\begin{cases}x+2y-1=0,\\ 2x-y+1=0.\end{cases}$$

и найдем координаты точки E: $x_E=-\frac{1}{5}$, $y_E=\frac{3}{5}$. Теперь легко можно найти координаты точки B: $B\left(-\frac{17}{5};\frac{11}{5}\right)$.

XI способ

Воспользуемся формулой расстояния от точки $A(x_0;y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$: $\rho=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (рис. 10) По этой формуле имеем:

$$AE=\frac{3\cdot 2-1(-1)+1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}},$$

$\tan<KAE=\frac{1}{2}$ (это следует из IX способа). Тогда

$$\cos\angle KAE=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \sin\angle KAE=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

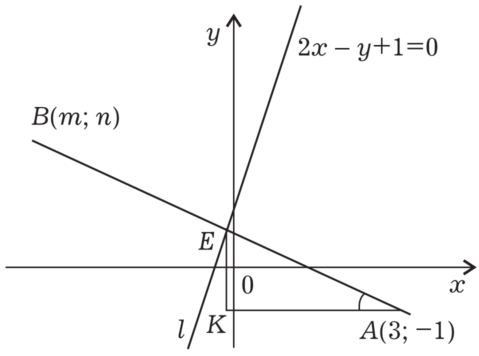

Рис. 10

Следовательно, $EK=AE\cdot\sin\angle KAE=$ $=\frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{8}{5}$. Аналогично находим AK:

$$AK=AE\cdot\cos\angle KAE=\frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{16}{5}.$$

Поэтому $x_E=-AK+x_A=-\frac{16}{5}+3=-\frac{1}{5}$ и $y_E=KE-|y_A|=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$. Тогда $B\left(-\frac{17}{5};\frac{11}{5}\right)$.

XII способ

Пусть прямая $l'\parallel l$ (рис. 11). Тогда ее уравнение имеет вид: $2x-y+c=0$. По предыдущему способу $AE=\frac{8}{\sqrt{5}}$ и $AB=\frac{16}{\sqrt{5}}$. Составим уравнение окружности с центром в точке A и радиусом AB. Имеем $(x-3)^2+(y+1)^2=\frac{256}{5}$. Тогда координаты точки B определятся из системы уравнений

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+1)^2=\frac{256}{5},\\ 2x-y+c=0.\end{cases}$$

откуда

$$5x^2+2x(2c-1)+c^2+2c+10-\frac{256}{5}=0,$$

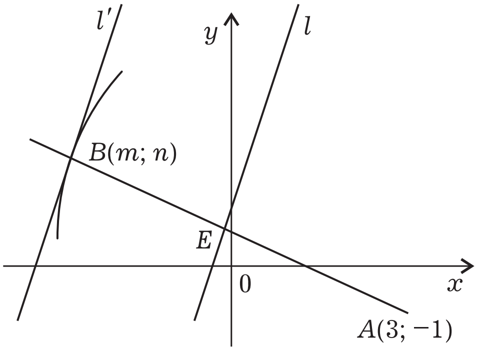

Рис. 11

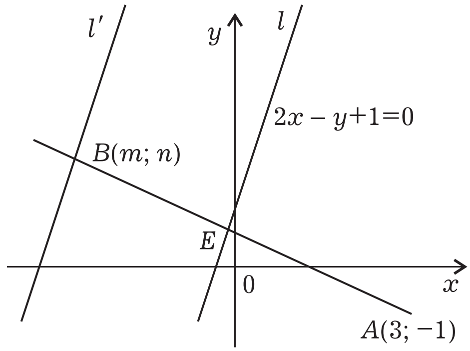

Рис. 12

а так как точка B является точкой касания прямой и окружности, то дискриминант этого квадратного уравнения должен равняться нулю $D_1=(2c-1)^2-5\left(c^2+2c+10-\frac{256}{5}\right)=0$ откуда получаем уравнение $c^2+14c-207=0$. Это уравнение имеет два корня $c_1=9$ и $c_2=-23$. Соответственно получим две прямые $2x-y+9=0$ и $2x-y-23=0$. Второе уравнение не годится по смыслу задачи. Тогда $x_B=\frac{1-2c}{5}=-\frac{17}{5}$ и $y_B=2x_B+9=\frac{11}{5}$.

XIII способ

Так как $AE=\frac{8}{\sqrt{5}}$, то ГМТ, отстоящих от прямой l на расстоянии $\frac{8}{\sqrt{5}}$ имеет вид: $\frac{8}{\sqrt{5}}=\pm\frac{2x-y+1}{5}$, откуда получаем два уравнения $2x-y-7=0$ или $2x-y+9=0$ (рис. 12) Первое уравнение не годится так как точка $A\notin l'$. Значит прямая определяется уравнением $2x-y+9=0$.

Тогда координаты точки B определятся из системы уравнений

$$\begin{cases}2x-y+9=0,\\ 2y+x-1=0.\end{cases}$$

Решив эту систему, находим $x_B=-\frac{17}{5}$ и $y_B=\frac{11}{5}$.

XIV способ

В этом способе воспользуемся различными формулами площади треугольника (рис 13). Пусть $E\in l$. Как в XI способе находим $AE=\frac{8}{\sqrt{5}}$. Так как $C\in l$, то $C(-1;-1)$. Отсюда $AC=4$ и $CE=\frac{4}{\sqrt{5}}$. Найдем площадь треугольника ABC. Имеем $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{16}{\sqrt{5}}=\frac{32}{5}$. Составим уравнение прямой AB: $2y+x-1=0$. Для этого воспользуемся формулой площади треугольника по координатам трех вершин:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

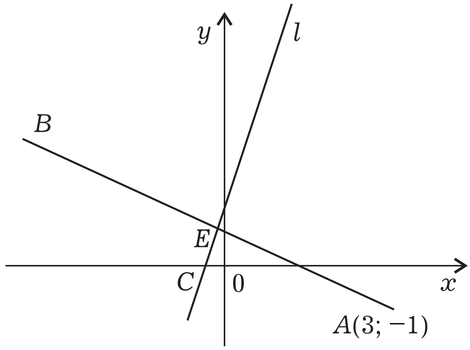

Рис. 13

Имеем $\frac{32}{5}=\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, откуда $y=\frac{11}{5}$, то есть $y_B=\frac{11}{5}$. Так как $BC=$ $=CA$, то $(x+1)^2+\left(\frac{11}{5}+1\right)^2=16$, поэтому $x+1=\pm\frac{12}{5}$, откуда $x=-\frac{17}{5}$. Значение $x=\frac{7}{5}$ не годится по смыслу.

XV способ

Пусть $K(1;\,3)$ (рис 14). Составим уравнение прямой AK: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-4}$ или $2x+y-5=0$. Найдем угловые коэффициенты прямых AK и KE: $k_{AK}=-2$, $k_{KE}=2$. Напишем выражение для тангенса угла между прямыми AK и KE:

$$\tan\angle AKE=\frac{2+2}{1-4}=-\frac{4}{3}.$$

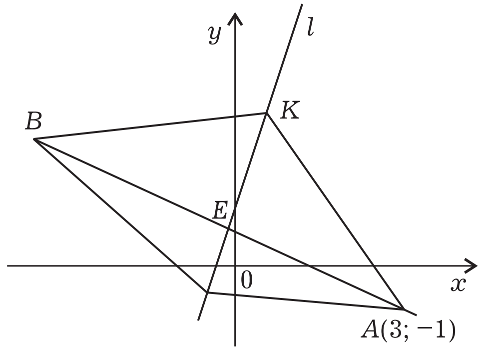

Рис. 14

Пусть $k_{BK}=k$. Тогда $\frac{k-2}{1+2k}=-\frac{4}{3}$ или $3k-6=-4-8k$, откуда $k_{BK}=\frac{2}{11}$. Составим уравнение прямой BK. Имеем $2x-11y+31=0$. Для нахождения координат точки B решим систему

$$\begin{cases} 2x-11y+31=0, \\ x+2y-1=0, \end{cases}$$

откуда находим $x=-\frac{17}{5}$ и $y=\frac{11}{5}$.

Литература

1. *Ажгалиев У*. Задача одна, решений дюжина «Потенциал» 2014 г. (№4).

2. *Ажгалиев У*. Десять способов решения одной олимпиадной задачи «Потенциал» 2013 г. (№3).

3. *Бахвалов С.В., П.С. Моденов, А.С Пархоменко*. Сборник задач по аналитической геометрии. Издательство «Наука» М. 1964.

4. *Александров А.Д., А.Л. Вернер, В.И. Рыжик*. Геометрия. Учебное пособие для 9 класса с углублённым изучением математики Москва «Просвещение» 1999.