Петрашев Владимир Иванович
Доцент кафедры высшей математики Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова.

О разнообразии способов и методов решения задач

Предлагаем вам, уважаемый читатель, поупражняться в разносторонних подходах к решению задач. Такая привычка бывает полезна не только в математике.

1. Начнём с задачи из алгебры. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Система может заинтересовать тем, что уравнений в ней два, а неизвестных n.

Поиск решения начнём так, как часто поступают математики: заменяют сначала задачу близкой по содержанию, но более простой, например, положив $n = 2$. Из получившейся простой системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

способом подстановки найдём её единственное решение

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

и перейдём к системе при $n = 3$. Теперь уже легко заметить, что система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

тоже имеет решение вида $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$. Но может быть у неё есть другие решения?

Возвращаясь к системе при $n = 2$, замечаем, что её можно интерпретировать и с геометрической точки зрения: второе уравнение – это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а первое есть уравнение касательной к этой окружности. Координаты точки касания $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и есть единственное решение системы.

К системе при $n=3$ применим другой подход, будем рассматривать векторы $\vec{a}=\{1;1;1\}$ и $\vec{b}=\{x_1;x_2;x_3\}$. Их скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3=1$ согласно первому уравнению системы. С другой стороны $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\phi$, где ϕ - угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Но тогда $\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_2^2}\cdot\cos\phi=$ $=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\cos\phi$ тоже равно 1. Отсюда $\cos\phi=1, \phi=0$, что означает коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и, следовательно, пропорциональность их координат: $\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{1}=\frac{x_3}{1}$, то есть подтверждается единственность решения системы, а также то, что плоскость $x_1+x_2+x_3=1$ – касается сферы $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2$ в точке $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Ясно, что данная система имеет решение $x_1=x_2=x_3=\dots x_n=\frac{1}{n}$. Единственность его можно доказать «от противного». Допустим, что существует еще решение, $x_1=\frac{1}{n}+\lambda_1, x_2=\frac{1}{n}+\lambda_2,\dots,x_n=\frac{1}{n}+\lambda_n$, где хотя бы одно из чисел $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n$ отлично от нуля. Тогда, согласно первому уравнению системы:

$$\left(\frac{1}{n}+\lambda_1\right)+\left(\frac{1}{n}+\lambda_2\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}+\lambda_n\right)=1,$$

то есть $n\frac{1}{n}+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$.

Отсюда: $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=0$.

Согласно второму уравнению:

$$\left(\frac{1}{n}+\lambda_1\right)^2+\left(\frac{1}{n}+\lambda_2\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{n}+\lambda_n\right)^2=$$
$$=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\lambda_1+\lambda_1^2+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\lambda_2+\lambda_2^2+\dots$$
$$+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\lambda_n+\lambda_n^2=\frac{1}{n}.$$

Следовательно:

$$n\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)+$$
$$+\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_n^2\right)=\frac{1}{n}.$$

Но так как $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=0$, то $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_n^2=0$. Это возможно лишь при $\lambda_1=\lambda_2=\dots.=\lambda_n=0$. Пришли к противоречию с допущением.

Исходную систему (в том числе и все её частные случаи) можно решить также, применяя известное неравенство

$$n\left(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\right)\ge\left(x_1+x_2+\dots+x_n\right)^2,$$

в котором равенство возможно лишь при $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{1}{n}$.

2. Докажите неравенство:

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\ge5\sqrt[5]{ab}, a\ge0, b\ge0.$$

Заметив, что неравенство выполняется при $a=0$ или $b=0$, будем доказывать его при $ab\ne0$. Приведя в нём корни к общему показателю:

$$2\sqrt[30]{a^{15}}+3\sqrt[30]{b^{10}}\ge5\sqrt[30]{a^6b^6}$$

и разделив потом на $\sqrt[30]{a^6b^6}$, получим $2\cdot\sqrt[30]{\dfrac{a^9}{b^6}}+3\sqrt[30]{\dfrac{b^4}{a^6}}\geq 5.$ Обозначив $\sqrt[30]{\dfrac{a^3}{b^2}}=t\succ 0$, получим сначала:

$2t^3+\dfrac{3}{t^2}\geq 5$, и потом:

$$f(t)=2t^5-5t^2+3\geq 0.$$

Далее применим методы анализа: найдём производную

$$f'(t)=(2t^5-5t^2+3)'=10t(t^3-1),$$

при $t>0$ она обращается в нуль только при $t=1$. В этой точке функция $f(t)$ имеет минимум, равный нулю. Следовательно, неравенство истинно при всех $t\in(0;+\infty)$, а значит, и данное неравенство доказано.

С другой стороны, вспомнив известное неравенство

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}\geq\sqrt[5]{x_1x_2x_3x_4x_5},$$

левую часть доказываемого неравенства запишем предварительно в виде:

$$\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b},$$

но тогда

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}{5}\geq$$

$$\geq\sqrt[5]{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b}}=\sqrt[5]{ab},$$

откуда и следует истинность данного неравенства.

3. Найдите значение выражения $ab+cd$, если

$$\begin{cases}a^2+b^2=1,\\c^2+d^2=1,\\ac+bd=0.\end{cases}$$

Рассмотрим векторы $\vec{p}=\{a;b\}$ и $\vec{q}=\{c;d\}$. Тогда $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$, а их скалярное произведение $\vec{p}\cdot\vec{q}=$ $=ac+bd=0$ согласно условию. Следовательно, эти единичные векторы перпендикулярны (рис. 1).

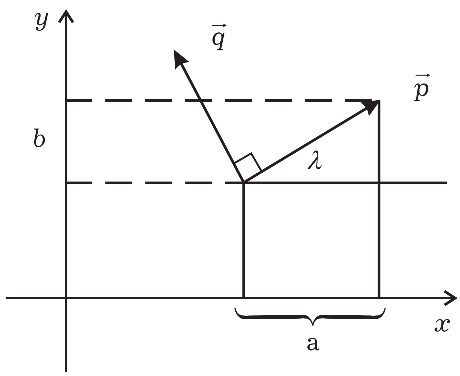

Рис.1

Выразим координаты вектора $\vec{p}$: $p_x=a=1\cdot\cos\lambda,\ p_y=b=1\cdot\sin\lambda,$

тогда координаты вектора $\bar{q}$ соответственно:

$$q_x=c=1\cdot\cos\left(90^\circ+\lambda\right)=-\sin\lambda,$$

$$d_y=d=1\cdot\sin\left(90^\circ+\lambda\right)=\cos\lambda.$$

Поэтому

$$ab+cd=\cos\lambda\cdot\sin\lambda+(-\sin\lambda)\cdot\cos\lambda=0.$$

Другое решение задачи: первое и второе уравнения с суммами квадратов, равными 1, могут вызвать ассоциации с основным тригонометрическим тождеством и подсказать применение тригонометрических подстановок:

$$a=\cos x,b=\sin x,c=\cos y,d=\sin y.$$

Тогда

$$ac+bd=\cos x\cos y+\sin x\sin y=$$
$$=\cos(x-y)=0.$$

Отсюда: или $x-y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, или $x-y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in z$.

Пусть: $x=y+\frac{\pi}{2}+2\pi k$, тогда $\cos x=\cos(y+\frac{\pi}{2}+2\pi k)=-\sin y$,

$$\sin x=\sin(y+\frac{\pi}{2}+2\pi k)=\cos y.$$

Перемножив левые части и, соответственно, правые части двух последних равенств, получим: $\sin x\cos x=-\sin y\cos y$.

Но $ab+cd=\cos x\sin x+\cos y\sin y$, а в соответствии с предыдущим равенством имеем

$$ab+cd=-\sin y\cos y+\cos y\sin y=0.$$

Возможно, кому-то придётся по вкусу еще один вариант решения. Умножим обе части равенства $ac+bd=0$ на $ad+bc$. Тогда:

$$(ac+bd)(ad+bc)=$$
$$=a^2cd+d^2ab+c^2ab+b^2cd=$$
$$=ab\left(c^2+d^2\right)+cd\left(a^2+b^2\right)=0.$$

Но, так как по условию каждое выражение в скобках равно 1, то отсюда получаем искомое $ab+cd=0$.

Графические методы помогут нам разобраться и с ситуацией на дороге в «задаче на движение».

4. По шоссе с постоянными, но различными скоростями движутся автомобиль, велосипедист, телега и пешеход. В полночь (0 часов) велосипедист обогнал пешехода, потом через какое-то время встретил телегу, далее, через такое же время, встретился с автомобилем. После встречи с велосипедистом автомобиль через некоторое время встретил пешехода, а потом через такое же время обогнал телегу. Встреча с пешеходом у автомобиля произошла в 1 час ночи. В котором часу пешеход встретил телегу?

Естественно, без графического представления в системе координат $(t;S)$ в этой запутанной истории трудно разобраться. Начало координат $(t;S)$ совместим с моментом обгона велосипедистом пешехода, обозначив их скорости $v_в$ и $v_П$ соответственно. Графики движения велосипедиста, пешехода, автомобиля и телеги обозначим на чертеже 1;2;3 и 4 соответственно. Уравнение движения велосипедиста: $S=v_вt$, пешехода: $S=v_Пt$.

Обозначив момент встречи велосипедиста и телеги t_1, получим по условию момент его встречи с автомобилем $2t_1$, а автомобиля и телеги $2-2t_1$ (см. рис.2).

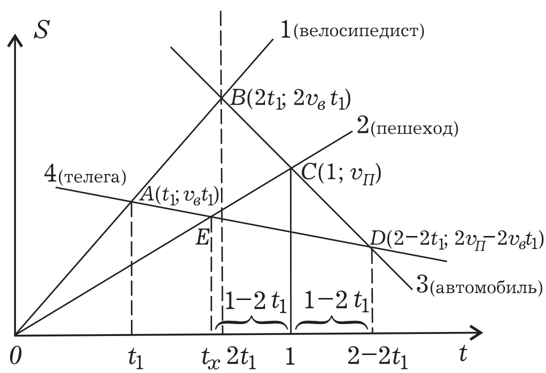

Рис. 2

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, по координатам точек B и C (на рис. 2) составим уравнение прямой BC:

$$\frac{t-2t_1}{1-2t_1}=\frac{S-2v_1t_1}{v_n-2v_1t_1}.$$

Из этого уравнения, зная абсциссу точки D, равную $2-2t_1$. Найдём ее ординату S_D из уравнения:

$$\frac{2-2t_1-2t_1}{1-2t_1}=\frac{S_D-2v_1t_1}{v_\Pi-2v_1t_1},$$

$$S_D=2v_\Pi-2v_в t_1.$$

Теперь по координатам точек $A(t_1;v_в t_1)$ и $D(2-2t_1;2v_\Pi-2v_в t_1)$ получим уравнение прямой AD:

$$\frac{t-t_1}{2-3t_1}=\frac{S-v_в t_1}{2v_n-3v_в t_1},$$

а так как уравнение прямой OE: $S=v_\pi t$, то подставив это значение в уравнение прямой AD, получим уравнение

$$\frac{t-t_1}{2-3t_1}=\frac{v_n t-v_в t_1}{2v_n-3v_в t_1},$$

из которого найдём $t=t_x$ – абсциссу точки пересечения этих прямых $t_x=\frac{2}{3}$, то есть встреча пешехода и телеги произошла в ноль часов сорок минут. Длинно, сложно? Привыкайте! Так как у многих задач простого решения может и не быть. А у этой – пожалуйста! Соединив точки O и D, получим треугольник OBD, у которого OC и AD – медианы (так как $OA=AB$ и $BC=CD$), поэтому согласно свойству медиан: $OE=\frac{2}{3}OC$, но тогда и $t_x=\frac{2}{3}$ часа. Алгебра плюс геометрия – сила!

Если читатель – одиннадцатиклассник, ему предлагаем ещё одну задачу с тригонометрической подстановкой. Рекомендуем этот приём запомнить, потому что, он – не редкость в математике, и на ЕГЭ может пригодиться.

Так, в книге под редакцией Ф.Ф. Лысенко и С.Ю. Кулабухова Математика. Подготовка к ЕГЭ, 2013» есть задача №1294:

5. Решить уравнение

$$x\left(1-2x^2\right)\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{8}.$$

Его решения авторы не приводят. На наш взгляд наиболее коротким путём является именно подстановка $x=\cos t$ с последующим приведением к виду:

$$\cos t\left(1-2\cos^2 t\right)\left|\sin t\right|=\frac{1}{8}.$$

Отсюда получим две системы.

$$а)\begin{cases}\sin t>0,\\ -\cos t\cdot\cos 2t>0,\\ -\cos t\cdot\cos 2t\cdot\sin t=\frac{1}{8},\end{cases}$$

$$б)\begin{cases}\sin t<0,\\ -\cos t\cdot\cos 2t>0,\\ \sin 4t=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

а) Из её решений оставим только четыре:

$$t_1=\frac{\pi}{24};\ t_2=\frac{11\pi}{24};\ t_3=\frac{23\pi}{24};\ t_4=\frac{35\pi}{24},$$

из которых только t_2 и t_3 удовлетворяют одновременно и системе, и являются решениями данного уравнения: $x_1=\cos\frac{11\pi}{24}$ и $x_2=\cos\frac{23\pi}{24}$. Другие решения системы не дают новых решений этого уравнения.

б) Из решений этой системы

$$\begin{cases} \sin t < 0, \\ \cos t \cdot \cos 2t > 0, \\ \sin 4t = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

оставляем два: $\frac{7\pi}{24}$ и $\frac{19\pi}{24}$ и соответственно получаем ещё два решения $x_3 = \cos\frac{7\pi}{24}$ и $x_4 = \cos\frac{19\pi}{24}$.

Из множества решений системы а) оставим, например, только

$$t_1 = \frac{7\pi}{24},\ t_2 = \frac{11\pi}{24},\ t_3 = \frac{19\pi}{24},\ t_4 = \frac{23\pi}{24},$$

которые удовлетворяют одновременно и системе, и дают все решения данного уравнения:

$$x_1 = \cos\frac{7\pi}{24},\ x_2 = \cos\frac{11\pi}{24},$$

$$x_3 = \cos\frac{19\pi}{24},\ x_4 = \cos\frac{23\pi}{24}.$$

Другие решения этой системы, как и решения системы б) новых решений уравнения не дают. Проверьте!

На наш взгляд, читателю было бы полезно решить это уравнение и с помощью подстановки $x = \sin t$, особенно при последующем сравнении с приведённым выше решением.

Автор желает читателю усердия, настойчивости, успехов в овладении всеми методами математики.

Новости Новости Новости Новости

Российская сборная завоевала два золота и четыре серебра на Международной математической олимпиаде

С 15 по 21 июля в городе Бате в Великобритании прошла 60-я Международная математическая олимпиада (IMO-2019). В ней принял участие 621 школьник из 112 стран мира.

Сборная России заняла 6 место в командном зачете. Члены команды завоевали две золотых и четыре серебряных медали:

- Олег Смирнов из СУНЦ МГУ имени А. Н. Колмогорова – золотая медаль;
- Тимофей Ковалёв из СУНЦ МГУ имени А. Н. Колмогорова – золотая медаль;
- Владимир Петров из Президентского физико-математического лицея №239 в Санкт-Петербурге – серебряная медаль;
- Алексей Львов из образовательного центра «Горностай» в Новосибирске – серебряная медаль;
- Валерий Кулишов из школы №57 в Москве – серебряная медаль;
- Иван Гайдай-Турлов из школы №57 в Москве – серебряная медаль.

Международная математическая олимпиада – это Чемпионат мира по математике среди школьников старших классов. Он проходит ежегодно с 1959 года. В первый раз олимпиада состоялась в Румынии с участием семи стран. На соревновании 2018 года российская сборная получила 5 золотых и 1 серебряную медаль, заняв второе место в общем зачете после США.