Хорошилова Елена Владимировна
*Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики
ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.*

О линейных диофантовых уравнениях

В статье рассказывается об основных способах решения в целых числах алгебраических уравнений 1-й степени с целыми коэффициентами.

Историческая справка

Статья посвящена одному из старейших и интереснейших разделов теории чисел – решению уравнений в целых числах. Вообще, решение в целых числах алгебраических уравнений с целыми коэффициентами и более чем с одним неизвестным является одной из труднейших проблем в теории чисел, в чём легко убедиться, посмотрев специальную литературу по этой теме. Этими задачами много занимались самые выдающиеся математики древности, такие как греческий математик Пифагор (VI век до н.э.), александрийский математик Диофант (II – III век н.э.), и лучшие математики более близкой к нам эпохи – П. Ферма (XVII век), Л. Эйлер (XVIII век), Ж. Лагранж (XVIII век) и другие.

К настоящему времени существует большое количество хороших серьёзных, а также популярных книг для школьников, посвящённых теории и решению алгебраических уравнений в целых числах (см. [1] – [8]).

Назовём *диофантовыми уравнениями* алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в такой системе должно превышать число уравнений (их в этом случае называют неопределёнными). По этой причине диофантовы уравнения если имеют, то бесконечно много решений.

На протяжении веков математики надеялись отыскать общий способ решения произвольного диофантова уравнения. И лишь в 1970 году ленинградский математик Ю.В. Матиясевич доказал, что такой общий метод решения не существует. Однако известны общие методы решения для отдельных типов диофантовых уравнений. Мы остановимся здесь только на одном, но очень важном и наиболее изученном типе задач, встречающихся на олимпиадах, а также среди задач ЕГЭ. Это – линейные диофантовы уравнения, или линейные алгебраические уравнения с целыми коэффициентами и двумя (реже – тремя и более) неизвестными, решаемые в целых (натуральных) числах.

Где возникают линейные диофантовы уравнения и для чего школьнику нужно уметь их решать?

Эти уравнения на первоначальном этапе представляют самостоятельный интерес. Кроме того, они нередко возникают при решении текстовых задач с натуральными неизвестными, при нахождении общих членов арифметических прогрессий, в тригонометрии при учёте ОДЗ.

Обратимся к определениям, затем рассмотрим методы решения и приложения из других разделов, приводящие к этой группе уравнений.

Однородные линейные диофантовы уравнения 1-й степени с двумя неизвестными

Так называются уравнения вида

$$mx + ny = 0, m, n, x, y \in \mathbb{Z}, mn \neq 0. \quad (1)$$

Если числа m и n имеют отличный от единицы наибольший общий делитель, то на него можно сократить, приведя уравнение к виду, в котором коэффициенты m и n уже являются взаимно простыми[1]. Будем считать, что это так с самого начала.

Теорема 1. Если коэффициенты m и n – взаимно простые числа, то любое решение уравнения $mx + ny = 0$ имеет вид:

$$x = nk,\ y = -mk,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Перепишем уравнение в виде $mx = -ny$. Так как правая часть уравнения делится нацело на N, то и левая часть этого уравнения должна делиться на n. Но m не кратно n, следовательно, x должно делиться нацело на n. Это означает, что x можно представить в виде $x = nk,\ k \in \mathbb{Z}$. Мы нашли все возможные значения x. Чтобы найти соответствующие им значения y, подставим найденное x в уравнение и получим, что $y = -mk,\ k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, уравнение решено. Оно имеет бесконечно много решений в виде пар $x = nk,\ y = -mk,\ k \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что любое однородное линейное диофантово уравнение 1-й степени всегда имеет бесконечно много решений и легко решается обычным анализом делимости нацело левой и правой частей уравнения. Обратимся к примерам.

[1] Напомним, что два или несколько натуральных чисел называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.

Пример 1. Известно, что $4n=5m$. Найти n и m, если они натуральны.

Решение. Заметим, что левая часть уравнения кратна четырём, следовательно, это означает, в свою очередь, что $m \vdots 4$, т.е. m представимо в виде $m=4k$, где $k\in N$. Подставим в уравнение, чтобы найти n. Имеем: $4n=5\cdot 4k$, и после сокращения на 4 получим $n=5k$.

Ответ. $\{(5k;4k),k\in N\}$.

Пример 2. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}7889x^3=2875y^3,\\ |y|\le 8.\end{cases}$$

Решение. Раскладывая на простые множители большие коэффициенты при x^3 и y^3, получаем, что уравнение системы имеет вид $23\cdot 7^3\cdot x^3=23\cdot 5^3\cdot y^3$, т.е. $(7x)^3=(5y)^3$. Извлекая кубический корень, приходим к однородному линейному диофантову уравнению . Решая его, находим, в частности, что $y \vdots 7$. Неравенству $|y|\le 8$, или $-8\le y\le 8$, удовлетворяют лишь три значения y, делящихся нацело на 7, это $-7; 0; 7$. Из уравнения для каждого из этих y вычисляем соответствующее значение x.

Ответ. $\{(-5;-7),(0;0),(5;7)\}$.

Неоднородные линейные диофантовы уравнения 1-й степени с двумя неизвестными

Так называются уравнения вида[1]

$$mx+ny=c,\ mnc\ne 0, m,n,c,x,y\in\mathbb{Z}. \quad (1)$$

При решение таких уравнений возможны два случая: либо число c делится нацело на $r=\text{НОД}(m,n)\ne 1$, либо нет.

В первом случае можно разделить обе части уравнения на r и свести задачу к решению в целых числах уравнения $m_1x+n_1y=c_1$, коэффициенты которого $m_1=\frac{m}{r}$, $n_1=\frac{n}{r}$ взаимно просты. Поэтому мы можем ограничиться случаем, когда в неоднородном уравнении (1) коэффициенты m и n взаимно просты.

Во втором случае, как будет показано ниже в теореме 4, уравнение не имеет целочисленных решений.

Приведём несколько теорем, отражающих условия существования и вид решений.

Теорема 2. Если r – наибольший общий делитель *натуральных* чисел m и n, то найдутся такие *целые* числа k и l, что $r=km+ln$.

Доказательство этой теоремы основано на известном *алгоритме Евклида*[2] нахождения наибольшего общего делителя натуральных чисел при помощи процесса деления с остатком. С этим доказательством можно ознакомиться, например, в [6, с. 76].

---

[1] Считается, что первое упоминание об общем методе решения в целых числах линейных уравнений с двумя неизвестными было найдено в рукописях индийского математика и астронома Брахмагупты (около 625 г. н.э.).

[2] Алгоритм Евклида. Пусть требуется найти НОД(a, b) двух натуральных чисел a и b. Для этого надо разделить большее из этих чисел на меньшее, потом меньшее из чисел на остаток при первом делении, затем остаток при первом делении разделить на остаток при втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдёт деления без остатка (так как остатки убывают, то это на каком-то шаге случится). Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД(a, b).

Теорема 3. Если числа m, n, c взаимно простые (т.е. НОД$(m, n, c) = 1$), и числа m, n также взаимно простые, то уравнение (1) имеет, причём бесконечно много, целочисленных решений, общий вид которых зависит от одного целочисленного параметра $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = m_0 - nk, y = n_0 + mk, k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где (m_0, n_0), $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ – какое-либо решение уравнения (найденное, например, подбором).

Доказательство. Пусть (m_0, n_0) – какое-либо решение[1] уравнения (1), т.е.

$$m_0 x + n_0 y = c. \quad (3)$$

Покажем, как найти все решения уравнения (1). Вычтем для этого из уравнения (1) числовое тождество (3) и получим уравнение, с одной стороны, эквивалентное исходному, и, с другой стороны, однородное относительно $(x - m_0), (y - n_0)$ линейное диофантово уравнение

$$m(x - m_0) + n(y - n_0) = 0,$$

которое мы уже умеем решать. Перепишем его так, чтобы слагаемые оказались по разные стороны от знака равенства:

$$m(x - m_0) = -n(y - n_0).$$

Поскольку числа m и n взаимно просты и левая часть уравнения делится нацело на m, то и правая часть уравнения должна быть кратна m. Это означает, что

$$y - n_0 = km, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Подставим в уравнение вместо $y - n_0$ выражение km и получим

$$m(x - m_0) = -nkm.$$

После сокращения на m имеем

$$x - m_0 = -nk, \text{ т.е. } x = m_0 - nk.$$

Таким образом, мы получили

$$x = m_0 - kn, y = n_0 + km, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Теорема доказана.

Решение, записанное в виде (2), называют *общим решением* уравнения (1). Подставив вместо k конкретное целое число, получим так называемое *частное решение* этого уравнения.

Теорема 4. Если $r = $ НОД$(m, n) \neq 1$ и свободный член c (правая часть) в уравнении $mx + ny = c$ не делится на r, то уравнение $mx + ny = c$ не имеет целочисленных решений.

Доказательство. Действительно, так как при любых целых x и y число $mx + ny$ делится на r, оно не может равняться числу c, которое на r не делится.

Рассмотрим примеры решения неоднородных линейных диофантовых уравнений.

Случай 1: уравнение не имеет решений (c не делится нацело на $r = $ НОД$(m, n) \neq 1$).

Пример 3. Решить в целых числах уравнение $35x - 20y = 13$.

Решение. Заметим, что левая часть в этом уравнении делится на $5 = $ НОД$(35, 20)$ нацело, а правая – нет. Полученное противоречие доказывает, что решений нет.

Случай 2: уравнение имеет решения.

Пусть теперь уравнение имеет решения, т.е. $c = kr, r = $ НОД(m, n). Как их проще найти? На следующих примерах рассмотрим три наиболее удобных способа решения.

1-й способ (не удаётся подобрать частное решение (x_0, y_0)).

[1] Объясним, почему такая пара (m_0, n_0) найдётся. В самом деле, в силу теоремы 2 найдутся такие целые числа x_0 и y_0, что $mx_0 + ny_0 = 1$, тогда пара $cx_0 = m_0$, $cy_0 = n_0$ удовлетворяет уравнению (1).

Пример 4. Найти хотя бы одну пару целых чисел x и y, удовлетворяющих соотношению $72x-59y=3$.

Решение. Коэффициенты уравнения удовлетворяют условию теоремы 3, значит, решение существует. Но в данном случае подобрать частное решение весьма затруднительно, а в условиях экзамена дорога каждая минута. Поэтому не будем тратить время на подбор частного решения, а воспользуемся анализом делимости.

1-й шаг. Заметим, что один из коэффициентов $72 \vdots 3$ и правая часть $3 \vdots 3$, поэтому слагаемое $59y$ также должно делиться нацело на 3, а значит, $y=3n$, где $n \in Z$. Подставив в уравнение $72x-59\cdot 3n=3$ и сократив на 3, получим новое уравнение

$$24x=1+59n.$$

2-й шаг. Заметим, что 24 – чётное число, справа 1 – нечётное число, значит, слагаемое $59n$ должно быть нечётным числом, т.е. $n=2k+1$, $k \in Z$. Подставим в уравнение:

$$24x-59\cdot(2k+1)=1,$$

или, после упрощения, $12x-30=59k$.

3-й шаг. Поскольку $12 \vdots 6$ и $30 \vdots 6$, должно быть $59 \vdots 6$, откуда $k=6l$, $l \in Z$. Подставив в уравнение и сократив на 6, получим

$$2x=59l+5.$$

Обратим внимание, что коэффициент при x с каждым таким шагом уменьшается, и следующий шаг, похоже, окажется последним.

4-й шаг. Так как $2x$ чётно, а 5 нечётно, то $59l$ должно быть нечётным, а значит, и l должно быть нечётным, т.е. $l=2t+1$, $t \in Z$. Подставим в уравнение и упростим его:

$$x=59t+32.$$

Найдём теперь y:

$$y=3n=3(2k+1)=3(26l+1)=$$
$$=3(26(2t+1)+1)=72t+39.$$

Мы нашли все решения этого уравнения:
$(x,y)\in\{(59t+32,72t+39)|t\in Z\}$. В ответе достаточно привести любое частное решение, например, при $t=0$ находим пару.

Ответ. (32, 39).

2-й способ (удаётся подобрать частное решение (x_0,y_0)).

Пример 5. Найти все целочисленные решения уравнения:

$$20x+17y=2017.$$

Решение. Здесь легко подбирается решение $(x_0,y_0)=(100,1)$. Далее вычтем из уравнения тождество $20\cdot 100+17\cdot 1=2017$ и придём к равносильному уравнению:

$$\begin{array}{r} -\ 20x+17y=2017 \\ \underline{20\cdot 100+17\cdot 1=2017} \\ 20(x-100)+17(y-1)=0, \end{array}$$

или $20(x-100)=-17(y-1)$. Сразу можно записать решение

$$x-100=17k, y-1=-20k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\{(100+17k;1-20k),\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3-й способ. Если подобрать частное решение не удалось, то можно воспользоваться анализом делимости, приведённым в примере 4, но оформить покороче:

$$20x+17y=2017 \Leftrightarrow 20x=2017-17y \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=2k+1 \Rightarrow 20x=2017-17(2k+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x=1000-17k \Rightarrow k=10l \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=100-17l \Rightarrow y=2\cdot 10l+1,\ l\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\{(100+17k;1-20k),\ k\in\mathbb{Z}\}$.

В большинстве задач, встречающихся на олимпиадах и в ЕГЭ, знания этих приёмов решения линейных диофантовых уравнений бывает достаточно. Существуют и другие способы решения подобных уравнений, например, можно подбирать частное решение при помощи разложения в конечные цепные дроби (см. [1, с. 12]), применять анализ остатков и др.

Рассмотрим несколько задач, которые сводятся к линейным диофантовым уравнениям.

Пример 6. В результате решения некоторого тригонометрического уравнения получили систему

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi m}{3}, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2}, \end{cases} \text{ где } n,\ \ m \in \mathbb{Z}.$$

Как будет выглядеть ответ?

Решение. Выясним, когда серии совпадают: $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi m}{3} = \dfrac{\pi n}{2}$. Сократив на π и умножив на 6, приходим к линейному диофантову уравнению: $2 + 4m = 3n$. Приведём три способа решения.

1-й способ. Подберём решение $m = 1,\ \ n = 2$:

$$\begin{array}{r} -\ \ 2 + 4m = 3n \\ 2 + 4 \cdot 1 = 3 \cdot 2 \\ \hline 4(m-1) = 3(n-2), \end{array}$$

откуда находим $(m-1) \vdots 3$, т.е. $m = 1 + 3l$, где $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ.

$$\left\{ \frac{\pi(2m+1)}{3}, m \neq 3l+1, m, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2-й способ. Воспользуемся анализом делимости:

$2 + 4m = 3n \Rightarrow n = 2k \Rightarrow 2m = 3k - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2l + 1 \Rightarrow m = 3l + 1,\ l \in \mathbb{Z}.$

Ответ.

$$\left\{ \frac{\pi(2m+1)}{3},\ m \neq 3l+1,\ m,\ l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3-й способ. Решим теперь систему

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi m}{3} = \dfrac{\pi(2m+1)}{3}, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi(2m+1)}{3} \neq \frac{\pi n}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2(2m+1) = 3m + m + 2 \neq 3n$ *методом анализа остатков.* Последнее неравенство означает, что число $m+2$ не должно делиться нацело на 3. А это значит, что число $m+2$ при делении на 3 даёт в остатке или 1, или 2, т. е.

$m + 2 \neq 3n \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m + 2 = 3k + 1, \\ m + 2 = 3l + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3k - 1, \\ m = 3l \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi(6k-1)}{3}, \\ x = \dfrac{\pi(6l+1)}{3}. \end{array} \right.$$

Ответ. $\left\{ \dfrac{\pi(6k-1)}{3}, \dfrac{\pi(6l+1)}{3}, k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.

Примечание. Ответ получился принципиально в другой форме – в «положительной», т. е. указаны те формулы, которые работают при любых $k, l \in \mathbb{Z}$. Кстати,

$$m \neq 3l + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3l, \\ m = 3k + 2 = 3(k+1) - 1. \end{array} \right.$$

Пример 7. При каких натуральных n дробь $\dfrac{3n+4}{5}$ является целым числом?

Решение. По условию $\dfrac{3n+4}{5} = m \in \mathbb{Z}$. Умножим на 5 и решим полученное уравнение:

$$\begin{array}{r} -\ \ 3n + 4 = 5m \\ 3 \cdot 2 + 4 = 5 \cdot 2 \\ \hline 3(n-2) = 5(m-2), \end{array}$$

откуда $n - 2 = 5t$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\{2 + 5t,\ t \geq 0,\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Пример 8. Остаток от деления натурального числа n на 12 равен 5, остаток от деления n на 16 равен 9. Чему равен остаток от деления наименьшего из возможных n на 24?

Решение. Условия задачи можно представить в виде системы:

$$\begin{cases} n \in N, \\ n = 12q + 5, \\ n = 16p + 9, \\ n_{min} = 24s + r, \\ r = ? \end{cases}$$

Приравняем: $12p + 5 = 16q + 9$, или $3p = 4q + 1$. Подобрав частное решение, вычтем:

$$\begin{array}{c} \_\,3p = 4q + 1 \\ \underline{3 \cdot 3 = 4 \cdot 2 + 1} \\ 3(p-3) = 4(q-2), \end{array}$$

откуда $p - 3 = 4t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Итак, $p = 3 + 4t$, $t \in \mathbb{Z}$, тогда $n = 41 + 48t$. Так как $n \in N$, то $t \geq 0$. Заметим, что наименьшему значению n соответствует наименьшее значение t, значит, $t = 0$. Следовательно, $n_{min} = 41 = 24 + 17$, т. е. остаток равен 17.

Ответ. 17.

Пример 9. Найти сумму чисел, одновременно являющихся членами двух арифметических прогрессий: 2, 5, 8,..., 332 и 7, 12, 17, ..., 157.

Решение. Члены первой прогрессии описываются формулой $a_n = 2 + 3(n-1)$, где $n = 1, 2, ..., 111$. Члены второй прогрессии – формулой $b_k = 7 + 5(k-1)$, где $k = 1, 2, ..., 31$. Для того чтобы найти общие члены прогрессий, надо решить уравнение в натуральных числах: $a_n = b_k$, т.е. $2 + 3(n-1) = 7 + 5(k-1)$, или $3n - 3 = 5k \Rightarrow$ $\Rightarrow k = 3m$, $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n - 1 = 5m$. Поэтому формула общего члена двух прогрессий имеет вид

$$c_m = 7 + 5(3m - 1) = 2 + 15m \leq 157 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m = 1, 2, ..., 10 \Rightarrow$$
$$S_{\text{общ.}} = \frac{17 + 152}{2} \cdot 10 = 169 \cdot 5 = 845.$$

Ответ. 845.

Пример 10. Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x:

$$x^2 + 2(y - 5z)x + 5y^2 + 34z^2 - 22yz = 0.$$

Выпишем условие неотрицательности дискриминанта:

$$D = -4(2y - 3z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2y = 3z$. Тогда уравнение имеет единственный корень $x = 5z - y$. Итак, исходное уравнение равносильно системе двух линейных диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} 2y = 3z, \\ x = 5z - y. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $z = 2t$, $y = 3t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Подставляя во второе уравнение, получаем $x = 7t$.

Ответ. $\{(7t, 3t, 2t),\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Пример 11. Решить в целых числах уравнение $5x - 7y + 8z = 3$.

Решение. Это линейное диофантово уравнение с тремя неизвестными. Перепишем уравнение в виде $5x - 7y = 3 - 8z$. Заметим, что $5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$ (см. теорему 2, здесь $r = 1$). Умножим это равенство на $3 - 8z$:

$$5 \cdot 3 \cdot (3 - 8z) - 7 \cdot 2 \cdot (3 - 8z) = 3 - 8z.$$

Вычтем из уравнения $5x - 7y = 3 - 8z$ полученное равенство:

$$5 \cdot (x - 3(3 - 8z) - 7 \cdot (y - 2(3 - 8z)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5 \cdot (x - 9 + 24z) = 7 \cdot (y - 6 + 16z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + 24z - 9 = 7k \Leftrightarrow x = 9 - 24z + 7k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 6 - 16z + 7k,$$

z при этом остаётся произвольным целым числом. Обозначим его буквой m.

Ответ.

$\{(9 - 24m + 7k, 6 - 16z + 7k, m),\ m,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Нелинейные диофантовы уравнения – следующий этап в решении уравнений в целых числах, и там разнообразие приёмов и методов решения значительно возрастает.

Литература

1. *Гельфонд А.О.* Решение уравнений в целых числах. Серия «Популярные лекции по математике». – М.: Наука, 1978.

2. *Серпинский В.* О решении уравнений в целых числах. – М.: Физматгиз, 1961.

3. *Ченцов Н.Н., Шклярский Д.О., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра. Сборник задач. – 5-е изд. – М.: Наука, 1976. – 384 с.

4. *Алфутова Н.Б., Устинов А.В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. – М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.

5. *Галкин Е.В.* Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7 – 11 кл. – Челябинск: Взгляд, 2005. – 271 с.

6. *Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф.* За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. для учащихся 10 – 11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 1996. – 320 с.

7. *Галкин В.Я., Сычугов Д.Ю., Хорошилова Е.В.* Конкурсные задачи, основанные на теории чисел: Учеб. пособие. – М.: МАКС Пресс, 2012. – 4-е изд., стереотипное. – 180 с.

8. *Гринько Е.П., Головач А.Г.* Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиадам. Учебно-метод. пособие. – Брест: БрГУ имени А.С. Пушкина, 2013.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Гимн теоретиков

В прошлом веке физики-теоретики Петербургского (тогда Ленинградского) физико-технического института сочинили такой гимн:

Мы теории физической жрецы –
В воду ловко прячем все концы...
Мы на волнах вероятности плывём,
На классическую физику плюём,
Изучаем недра атомов и звёзд
И к эксперименту строим мост.
Кто своею жизнью дорожит –
К нам по этому мосту не побежит.

Когда и как была создана первая говорящая машина

У прославленного американского изобретателя Томаса Эдисона спросили:

– Ведь это Вы изобрели первую в мире говорящую машину?

– Нет, нет, - поспешно ответил тот. – Первая говорящая машина была создана очень давно, ещё в библейские времена.

Выдержав паузу и опасливо оглядевшись, он заговорщически тихо закончил:

– ... из ребра Адама.