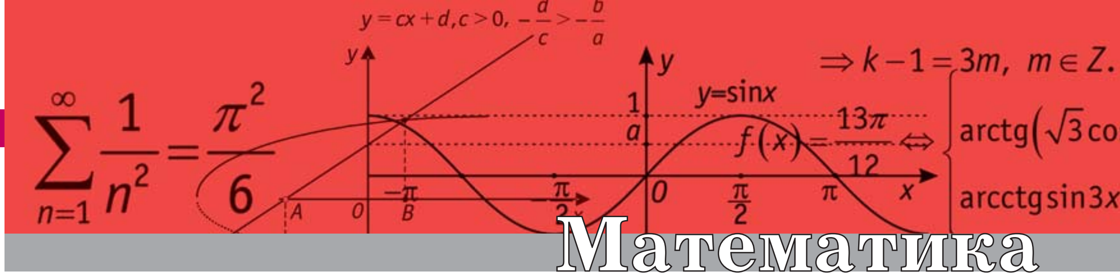

Крылов Евгений Васильевич
Математик-программист, доцент кафедры информационно-компьютерных дисциплин Обнинского института атомной энергетики (филиал МИФИ).

Всегда ли нужна производная?

Можно ли обойтись без понятия производной при решении задач о свойствах касательных к графикам квадратных трёхчленов (параболам)? Можно, но это требует специального определения касательной. В статье даётся такое определение и приводятся примеры решения задач.

В курсе геометрии касательной к окружности называется прямая, которая имеет с ней ровно одну общую точку.

Прямое использование такого определения для касательной к графику функции невозможно. Так, например, прямая $x=0$ и парабола $y=x^2$ имеют только одну общую точку, но считать касательной эту прямую, конечно, нельзя. С другой стороны, пример синусоиды показывает, что касательная может иметь даже бесконечно много общих точек с графиком функции: прямая $y=1$ является касательной к графику $y=\sin x$.

Дадим следующее определение (рис. 1): *касательной* к графику квадратного трёхчлена (параболе) $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ называется такая прямая вида $y=kx+d$, которая имеет ровно одну общую точку с этим графиком.

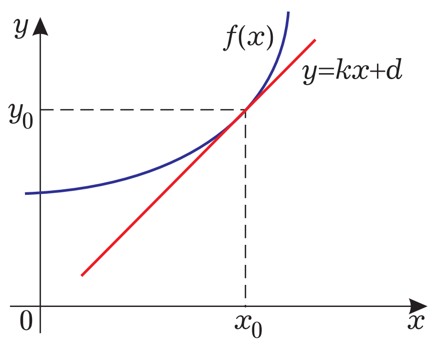

Рис. 1

Чтобы найти уравнение касательной к графику функции $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ в точке (x_0, y_0), рассмотрим прямую $y=k(x-x_0)+y_0$, которая содержит эту точку. По определению касательной уравнение $ax^2+bx+c=k(x-x_0)+y_0$ имеет только один корень $x=x_0$, и поэтому

$$ax^2+(b-k)x+c+kx_0-y_0=$$

$$= a(x-x_0)^2 = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2.$$

Приравнивая коэффициенты, найдём, что $b-k=-2ax_0$. Таким образом, искомое уравнение касательной имеет вид

$$y=(2ax_0+b)(x-x_0)+y_0, \quad y_0 = ax_0^2+bx_0+c. \tag{1}$$

Подчеркнём, что при таком подходе мы получили уравнение касательной в точке графика квадратичного трёхчлена без использования понятия производной. Читатель, который знаком с понятием производной, легко убедится в правильности наших выводов.

При решении конкретных задач часто бывает неизвестна точка графика (x_0, y_0), в которой прямая его касается. В этом случае часто полезно использовать тот факт, что уравнение $ax^2+(b-k)x+c+kx_0-y_0=0$ имеет один корень только в том случае, когда дискриминант D этого уравнения равен нулю.

Задача 1. Найти уравнение касательной к графику функции $y=0{,}5x^2-3x+1$, образующей с прямой $y=0$ угол в 45°.

Решение. Прямые, которые образуют углы в 45° с прямой $y=0$ (осью Ox), могут быть одного из двух видов (рис. 2): $y=x+d_1$ и $y=-x+d_2$. В первом случае уравнение

$$0{,}5x^2-3x+1-x-d_1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5x^2-4x-d_1+1=0$$

должно иметь только один корень. Поэтому его дискриминант равен нулю, то есть $D=14+2d_1=0$. Отсюда $d_1=-7$.

Во втором случае имеем:

$$0{,}5x^2-3x+1+x-d=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5x^2-2x-d+1=0.$$

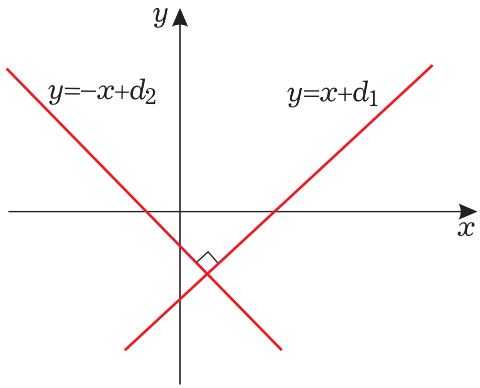

Рис. 2

Дискриминант этого уравнения равен $D=2+2d_2$. Приравнивая его к нулю, получим: $d_2=-1$.

Ответ: $y=x-7$ или $y=-x-1$.

Задача 2. Найти уравнения касательных к параболе $y=x^2-5x+6$, проходящих через точку $M(1,\ 1)$.

Решение. Заметим, что $y(1)=2$, и поэтому точка M не лежит на параболе (рис. 3).

Общее уравнение прямой (кроме прямой $x=1$), проходящей через точку $M(1,\ 1)$, имеет вид: $y=k(x-1)+1$.

Такая прямая является касательной, если дискриминант уравнения

$$x^2-5x+6-kx+k-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-(k+5)x+k+5=0$$

равен нулю, то есть когда

$$D=(k+5)^2-4(k+5)=(k+5)(k+1)=0.$$

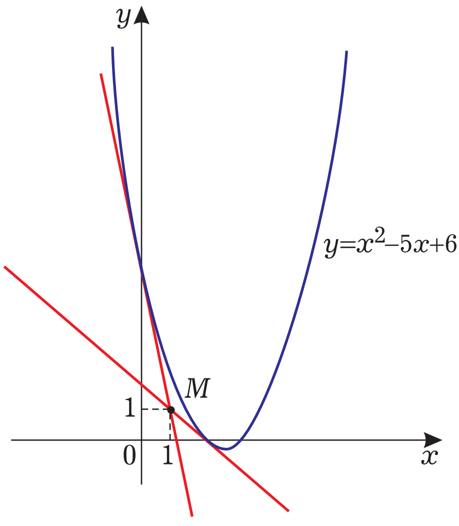

Рис. 3

Это уравнение имеет два решения: $k_1=-1$, $k_2=-5$. В результате находим две искомые касательные: $y=-x+2$ и $y=-5x+6$.

Ответ: $y=-x+2$ и $y=-5x+6$.

Задача 3. Найти уравнение общей касательной к графикам функций $f_1(x)=x^2+4x+8$ и $f_2(x)=x^2+8x+4$.

Приведём два способа решения этой задачи.

Решение 1. Из (1) следует, что уравнения касательных к графикам данных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках $(x_1,\ f_1(x_1))$ и $(x_2,\ f_2(x_2))$ соответственно имеют вид:

$$y=(2x_1+4)(x-x_1)+x_1^2+4x_1+8$$

и $\quad y=(2x_2+8)(x-x_2)+x_2^2+8x_2+4.$

Поскольку мы ищем уравнение общей касательной, то эти уравнения должны совпадать, то есть

$$(2x_1+4)(x-x_1)+x_1^2+4x_1+8\equiv$$

$$\equiv(2x_2+8)(x-x_2)+x_2^2+8x_2+4.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему

$$\begin{cases}2x_1+4=2x_2+8,\\ -x_1^2+8=-x_2^2+4.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x_1=2$ и $x_2=0$. Теперь легко находим, что искомая общая касательная имеет уравнение: $y=8x+4$.

Решение 2. Прямая $y=kx+d$ будет общей касательной к данным параболам (рис. 4), если каждое из уравнений

$$x^2+4x+8-kx-d=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-(k-4)x+8-d=0$$

и

$$x^2+8x+4-kx-d=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-(k-8)x+4-d=0$$

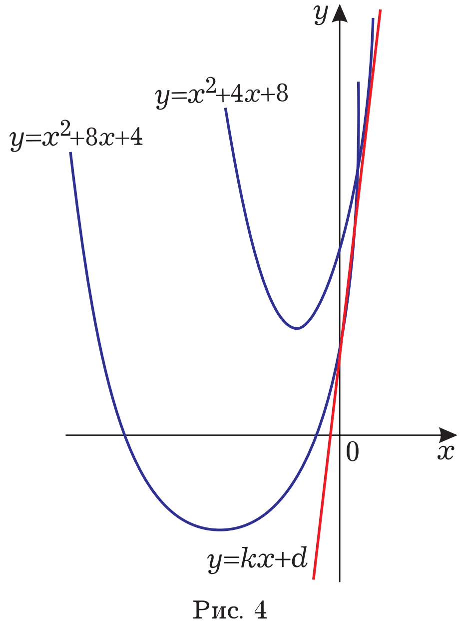

Рис. 4

имеет единственное решение. Таким образом, для нахождения неизвестных чисел k и d имеем систему

$$\begin{cases}D_1=(k-4)^2-4(8-d)=0,\\ D_2=(k-8)^2-4(4-d)=0.\end{cases}$$

Решая систему, получим $k=8$, $d=4$.

Ответ: $y=8x+4$.

Задача 4. При каких значениях параметра p прямая $y=px-5$ касается параболы $y=3x^2-4x-2$?

Решение. Прямая $y=px-5$ будет касательной, если уравнение

$$3x^2-4x-2-px+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-(p+4)x+3=0$$

имеет единственное решение. Следовательно,

$$D=(p+4)^2-4\cdot 3\cdot 3=p^2+8p-20=0.$$

Отсюда $p_1=2$, $p_2=-10$. Итак, имеются две касательных к данной параболе нужного вида (рис. 5).

Ответ: $p=\{2,\ -10\}$.

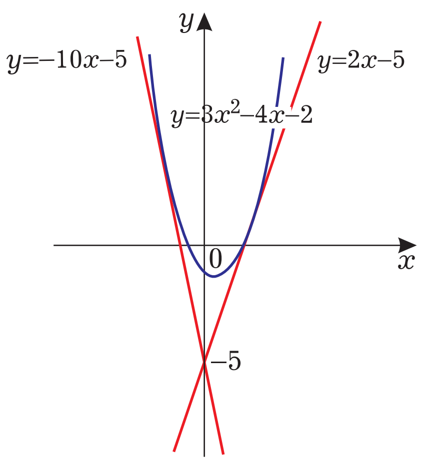

Рис. 5

Задача 5. Найти все такие точки $(a,\ b)$ плоскости Oxy, для которых касательные к графику функции $y=x^2$ пересекаются в этой точке $(a,\ b)$ и перпендикулярны.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку $(a,\ b)$, имеет вид (кроме прямой $x=a$, которая нас не интересует) $y=k(x-a)+b$. Две прямые $y=k_1(x-a)+b$, $y=k_2(x-a)+b$ перпендикулярны только тогда, когда $k_1\cdot k_2=-1$. Так как эти прямые являются касательными (рис. 6), то каждое из уравнений

$$x^2-k_1x+k_1a-b=0,$$

$$x^2-k_2x+k_2a-b=0$$

имеет только один корень.

Приравнивая к нулю дискриминанты этих уравнений, получим систему

$$\begin{cases} k_1^2-4k_1a+4b=0, \\ k_2^2-4k_2a+4b=0, \end{cases}$$

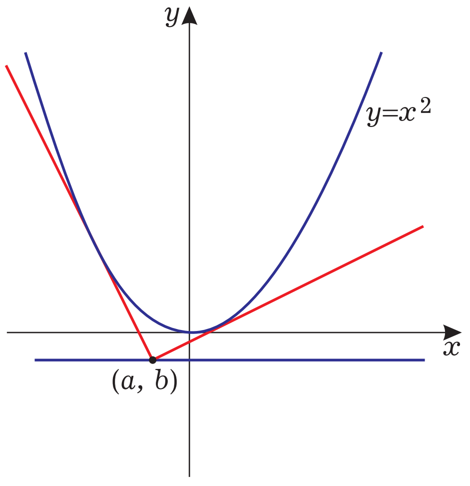

Рис. 6

которая показывает, что числа k_1 и k_2 являются корнями квадратного уравнения $z^2-4az+4b=0$. Из теоремы Виета заключаем, что

$$k_1\cdot k_2=4b.$$

Поэтому если точка $(a,\ b)$ такова, что через неё можно провести две перпендикулярные касательные, то эта точка должна принадлежать прямой $y=-1/4$. Легко проверить, что через любую точку прямой $y=-1/4$ проходит ровно две касательных к параболе $y=x^2$ и они перпендикулярны (сделайте это самостоятельно).

Ответ: прямая $y=-1/4$.