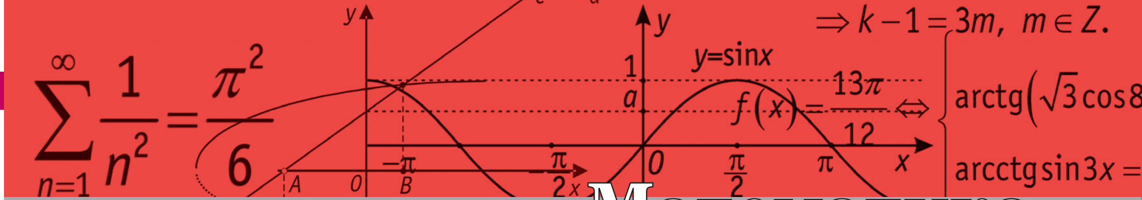

Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».

Новые текстовые задачи ЕГЭ (экономические, задача 17)

Задачи этого типа в ЕГЭ имеют, на взгляд автора, некоторые особенности.

1. В условия входят довольно большие числа, которые, по словам составителей ЕГЭ, соответствуют реальным задачам банков. Однако, как показывает опыт, вычисления «в лоб» на калькуляторе не дают верного результата – не хватает цифр в ответе. Поэтому, прежде чем подставлять числа, надо очень тщательно произвести упрощения числовых выражений.

2. Во многих случаях сначала задачу удобно решить в общем виде, а в конечную формулу подставить заданные числа. Кто-то скажет, что надо запомнить готовые формулы для разных задач. Однако это не очень хорошо, так как в формулы входит много данных (без шпаргалки трудно!), в разных источниках обозначения одних и тех же величин разные – легко что-то перепутать. Кроме того, всегда может возникнуть несколько изменённая формулировка условий, а тогда пригодится умение решать в общем виде.

3. Условия некоторых задач не сразу «доходят» до неискушённого в кредитах или прибыли заводов школьника.

Поэтому здесь приведены решения многих задач, не зависимые друг от друга, чтобы можно было смотреть задачи в любом порядке.

Кредит, долг, выплаты…

Обозначения. Пусть некто берёт кредит на некоторую сумму в S рублей на определённый срок – n лет, месяцев или дней. Как правило, долг D_i в конце i-го года (месяца или дня) возрастает по сравнению с долгом в конце предыдущего года (месяца или дня), например, на $a\%$. Долг в год взятия кредита мы будем обозначать D_0. Какую-то часть долга в сумме b_i рублей этот некто возвращает до конца года (месяца или дня), при этом условия возврата могут быть самые разные: кто-то выплачивает ежегодно (ежемесячно, ежедневно) одинаковые суммы, кто-то выплачивает так, что ежегодно (ежемесячно, ежедневно) долг уменьшается на одну и ту же сумму, кто-то выплачивает конкретно оговоренные суммы и т. д. Вот такие задачи мы и рассмотрим.

Пример 1. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

1) каждый январь долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года,

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите число a, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 55 000 руб., а во второй 69 000 руб.

Решение. По условию, в январе первого после взятия кредита года долг D_1 (янв) стал равен $\left(S+\frac{S}{100}a\right)$ рублей, а после выплаты b_i рублей D_1 (июль) $=S\left(1+\frac{a}{100}\right)-b_1$. Аналогично,

$$D_2(\text{янв})=\left(S\left(1+\frac{a}{100}\right)-b_1\right)\left(1+\frac{a}{100}\right),$$

$$D_2(\text{июль})=\left(S\left(1+\frac{a}{100}\right)-b_1\right)\left(1+\frac{a}{100}\right)-$$

$$-\,b_2=S\left(1+\frac{a}{100}\right)^2-b_1\left(1+\frac{a}{100}\right)-b_2.$$

В данной задаче клиент полностью выплатил кредит за два года – значит,

$$D_2(\text{июль})=0\Leftrightarrow$$

$$S\left(1+\frac{a}{100}\right)^2-b_1\left(1+\frac{a}{100}\right)-b_2=0.$$

Отсюда можно выразить любую величину через остальные. Нас интересует значение a:

$$S\left(1+\frac{a}{100}\right)^2-b_1\left(1+\frac{a}{100}\right)-b_2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\left(\frac{b_1+\sqrt{b_1^{\,2}+4Sb_2}}{2S}-1\right)100.$$

Подставим данные числа:

$$a=\frac{27500+\sqrt{275^2\cdot 10^4+69\cdot 10^8}}{10^3}-100=$$

$$=\frac{25\cdot 11+25\sqrt{121+1104}}{10}-100=$$

$$=\frac{5\cdot 11+5\cdot 35}{2}-100\Leftrightarrow a=15\%.$$

Ответ. 15.

1. Одинаковые выплаты

В задачах этого пункта клиент ежегодно выплачивает одну и ту же сумму, которую мы обозначим буквой b.

Пример 2. В июле планируется взять кредит на сумму 8 052 000 рублей. Условия его возврата таковы:

1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года,

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить

ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?

Решение. Пусть планируется взять кредит на сумму S рублей, тогда в январе долг возрастает на $a\%$ и становится равным

$$S+\frac{S}{100}a=S\left(1+\frac{a}{100}\right) \text{ рублей,}$$

а после выплаты b рублей в июле долг становится равным

$$D_1=S\left(1+\frac{a}{100}\right)-b \text{ рублей.}$$

Рассуждая аналогично и учитывая, что выплаты одинаковы, получим, что долги в июле следующих лет будут следующими:

$$D_2=\left(S\left(1+\frac{a}{100}\right)-b\right)\left(1+\frac{a}{100}\right)-b=S\left(1+\frac{a}{100}\right)^2-b\left(1+\frac{a}{100}\right)-b,$$

$$D_3=\left(S\left(1+\frac{a}{100}\right)^2-b\left(1+\frac{a}{100}\right)-b\right)\left(1+\frac{a}{100}\right)-b=$$

$$=S\left(1+\frac{a}{100}\right)^3-b\left(1+\frac{a}{100}\right)^2-b\left(1+\frac{a}{100}\right)-b,$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$D_n=S\left(1+\frac{a}{100}\right)^n-b\left(1+\frac{a}{100}\right)^{n-1}-\ldots-b\left(1+\frac{a}{100}\right)-b.$$

Обозначим, для удобства, $1+\frac{a}{100}=q.$ Тогда

$$D_n=Sq^n-$$
$$-b\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1\right)= \qquad (1)$$
$$=Sq^n-b\cdot\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Если кредит выплачен полностью за n лет, то

$$D_n=0 \Leftrightarrow Sq^n-b\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=0.$$

Отсюда следует, что тогда

$$D_n=0 \Leftrightarrow b=\frac{Sq^n(q-1)}{q^n-1}. \qquad (2)$$

Подставим в формулу (2) числовые данные задачи:

$$b=\frac{8\,052\,000\cdot(1,2)^4\cdot 0,2}{(1,2)^4-1}=$$
$$=\frac{8\,052\,000\cdot 1,44\cdot 1,44\cdot 0,2}{0,44\cdot 2,44}=$$
$$=\frac{8\,052\,000\cdot 144\cdot 144\cdot 0,2}{44\cdot 244}=$$
$$=\frac{805\,200\cdot 36\cdot 36\cdot 2}{11\cdot 61}=$$
$$=\frac{73\,200\cdot 36\cdot 36\cdot 2}{61}=$$
$$=1200\cdot 36\cdot 36\cdot 2=3\,110\,400.$$

Ответ. 3 110 400.

Пример 3. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года,

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.

Сколько млн рублей было взято в банке, если известно, что он был погашен тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

Решение. Воспользуемся формулой (2), но разрешим её относительно S:

$$D_n=0 \Leftrightarrow S=\frac{b\left(q^n-1\right)}{q^n(q-1)}. \qquad (3)$$

Подставляя числовые данные задачи, получим:

$$S = 2{,}16 \cdot \frac{(1{,}2)^3 - 1}{0{,}2 \cdot (1{,}2)^3} =$$

$$= 2{,}16 \cdot \frac{0{,}728}{0{,}2 \cdot 1{,}728} = 216 \cdot \frac{728}{20 \cdot 1728} =$$

$$= \frac{182}{5 \cdot 8} = \frac{91}{5 \cdot 4} = 4{,}55 \text{ млн руб.}$$

Ответ. 4,55.

Пример 4. В июле планируется взять кредит на сумму 4 026 000 рублей. Условия его возврата таковы:

1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года,

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью выплачен за 4 года, по сравнению со случаем, если кредит будет полностью выплачен за 2 года?

Решение. В силу формулы (2)

$$b = \frac{Sq^n (q-1)}{q^n - 1}.$$

Пусть при погашении за 4 года ежегодная выплата равна b_1 рублей, а при погашении за 2 года b_2 рублей. Тогда

$$4b_1 = 4\frac{4026000(1{,}2)^4 \, 0{,}2}{(1{,}2)^4 - 1} =$$

$$= \frac{4 \cdot 4026000 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}44 \cdot 1{,}44}{0{,}44 \cdot 2{,}44} =$$

$$= \frac{402600 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 144}{11 \cdot 61},$$

$$2b_2 = 2\frac{4026000(1{,}2)^2 \, 0{,}2}{(1{,}2)^2 - 1} =$$

$$= \frac{2 \cdot 402600 \cdot 36 \cdot 2}{11},$$

$$4b_1 - 2b_2 =$$

$$= \frac{402600 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 144}{11 \cdot 61} - \frac{2 \cdot 402600 \cdot 36 \cdot 2}{11} =$$

$$= \frac{402600 \cdot 36 \cdot 4(72-61)}{11 \cdot 61} =$$

$$= \frac{402600 \cdot 36 \cdot 4}{61} = 144 \cdot 6600 =$$

$$= 950400.$$

Ответ. 950 400.

Пример 5. Оля хочет взять кредит на 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, быть может, последней) после начисления процентов. Ставка 10% годовых.

На какое минимальное количество лет Оля может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей?

Решение. Воспользуемся формулой (2):

$$b = \frac{Sq^k (q-1)}{q^k - 1} = \frac{S(q^k - 1 + 1)(q-1)}{q^k - 1} =$$

$$= S(q-1) + \frac{S(q-1)}{q^k - 1}.$$

Чем меньше значение $k \, (q \geq 1)$, тем больше величина выплаты. Значит, минимальное k находится из неравенства

$$b = \frac{Sq^k (q-1)}{q^k - 1} \leq 24000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Sq^k (q-1) \leq 24000q^k - 24000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^k \geq \frac{24000}{24000 - S(q-1)}.$$

Подставим заданные числа. В нашем случае

$$S = 100\,000,\ a = 10\% \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = 1 + \frac{a}{100} = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1,$$

$$(1{,}1)^k \geq \frac{24000}{24000 - 10000} = \frac{12}{7} \cong 1{,}71\ldots$$

Неравенство в целых числах не решается, но нам нужна нижняя граница k. Поэтому посмотрим степени $1{,}1$:

$$(1{,}1)^2 = 1{,}21 \Rightarrow (1{,}1)^4 = 1{,}4641 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1{,}1)^5 = 1{,}61051 < 1{,}7,$$

$$(1{,}1)^6 = 1{,}77\ldots > 1{,}71\ldots$$

Следовательно, $k_{\min} = 6$.

Можно, наверное, написать и такой ответ:

$$k \geq \frac{\lg \frac{12}{7}}{\lg 1{,}1} \Leftrightarrow k_{\min} = \left[\frac{\lg \frac{12}{7}}{\lg 1{,}1}\right] + 1.$$

Ответ. 6.

Пример 6. В июле планируется взять кредит на сумму 1 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:

1) каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года,

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 000 рублей?

Решение. Воспользуемся формулой (2):

$$b = \frac{1\,300\,000\,(1{,}1)^k\,0{,}1}{(1{,}1)^k - 1} \leq 350\,000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{13\,(1{,}1)^k}{(1{,}1)^k - 1} \leq 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1{,}1)^k \geq \frac{35}{22} = 1{,}5909\ldots$$

$$(1{,}1)^2 = 1{,}21 \Rightarrow (1{,}1)^4 = 1{,}4641 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1{,}1)^5 = 1{,}61051 > 1{,}5909\ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{\min} = 5.$$

Ответ. 5.

2. Уменьшение ежегодного долга на одну и ту же величину

В задачах этого пункта условия выплаты кредита другие – клиент выплачивает в каждый последующий год такую сумму, чтобы в конце каждого года долг был на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего года. Эту одну и ту же величину мы обозначим буквой c.

Пример 7. В июле планируется взять кредит на сумму 6 млн рублей. Условия его возврата таковы:

1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года,

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга,

3) в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует взять кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,8 млн рублей?

Решение. В год взятия кредита долг равен взятой сумме S, а в конце этого года долг мы обозначаем $D_0 = S$. По условию, в конце следующего года долг должен быть равным $D_0 - c = S - c$. С другой стороны, по условию:

$$D_1(\text{янв}) = S\left(1 + \frac{a}{100}\right),$$

а после июня

$$D_1 = S\left(1 + \frac{a}{100}\right) - b_1 = S - c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = S + b_1 - S\left(1 + \frac{a}{100}\right) =$$

$$= b_1 - S \cdot \frac{a}{100},$$

то есть

$$c = b_1 - S \cdot \frac{a}{100}. \qquad (4)$$

Далее долг выражается простыми формулами:

$$D_2 = S - 2c,$$
$$D_3 = S - 3c,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$D_n = S - nc$$

и т. д.

Подставим вместо c найденное значение (4):

$$D_k = S - k\left(b_1 - S \cdot \frac{a}{100}\right) =$$

$$= S\left(1 + k\frac{a}{100}\right) - kb_1.$$

Если кредит гасится за n лет, то

$$D_n = 0 \Leftrightarrow S\left(1 + n\frac{a}{100}\right) - nb_1 = 0,$$

откуда следует, что

$$D_n = 0 \Leftrightarrow n = \frac{S}{b_1 - S \cdot \frac{a}{100}}. \qquad (5)$$

Разрешим соотношение (5) относительно b_1:

$$D_k = 0 \Leftrightarrow b_1 = \frac{S\left(1 + k\frac{a}{100}\right)}{k}. \qquad (6)$$

Подставим заданные числа:

$$b_1 = \frac{6(1 + 0{,}2k)}{k} \le 1{,}8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}6k \ge 6 \Leftrightarrow k \ge 10.$$

Ответ. 10.

Пример 8. В июле планируется взять кредит на сумму 20 млн рублей. Условия его возврата таковы:

1) каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года,

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга,

3) в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 47 млн рублей?

Решение. Эту одну и ту же величину мы обозначим буквой c. Проследим за последовательными выплатами:

$$D_1 = S\left(1 + \frac{a}{100}\right) - b_1 = S - c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_1 = S\left(1 + \frac{a}{100}\right) - (S - c) = S \cdot \frac{a}{100} + c.$$

Обозначим, для удобства, $\frac{a}{100} = q$. Тогда

$$b_1 = Sq + c, \qquad (7)$$

$$D_2 = (S - c)(1+q) - b_2 = S - 2c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_2 = (S - c)(1+q) - (S - 2c) =$$

$$= Sq + c(1 - q),$$

$$D_3 = (S - 2c)(1+q) - b_3 = S - 3c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_3 = (S - 2c)(1+q) - (S - 3c) =$$

$$= Sq + c(1 - 2q),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$b_k = (S - (k-1)c)(1+q) - (S - kc) =$$

$$= Sq + c\left(1 - (k-1)q\right).$$

Если k-й платёж последний, т. е. $S = kc$, то

$$b_k = c(1+q) \quad \text{и} \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_k =$$

$$= Sqk + kc - cq\frac{(1 + (k-1))}{2}(k-1) =$$

$$= Sqk + kc - cq \cdot \frac{k(k-1)}{2}.$$

Если кредит выплачен за k лет, то, так как $D_k = S - kc$, отсюда следует, что $kc = S$, а тогда сумма выплат за k лет равна

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_k = Sqk + ck - \dfrac{qck(k-1)}{2}, \\ ck = S \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_k = Sqk + S - \frac{qS}{2}(k-1) = \frac{S\left(q(k+1) + 2\right)}{2}.$$

Итак,

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = \frac{S\left(q(k+1) + 2\right)}{2}. \qquad (9)$$

Разрешим соотношение (9) относительно n:

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = \frac{Sqk}{2} + \frac{S(q+2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2\sum_{i=1}^{k} b_i - S(q+2)}{Sq}.$$

Решим поставленную задачу:

$$k = \frac{94 - 20 \cdot 2,3}{20 \cdot 0,3} = 8.$$

Ответ. 8.

Примечание. Можно было сразу написать и так:

$$D_k(\text{янв}) = (S - (k-1)c)(1+q),$$

$$D_k(\text{июль}) = S - kc.$$

Значит,

$$b_k = D_k(\text{июль}) - D_k(\text{янв}) =$$

$$= (S - (k-1)c)(1+q) - (S - kc) =$$

$$= Sq + c\left(1 - (k-1)q\right).$$

$$b_k = Sq + c\left(1 - (k-1)q\right).$$

Пример 9. В июле планируется взять кредит на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

1) каждый январь долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года,

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга,

3) в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найти a, если известно, что наибольший годовой платёж составляет не более 1,9 млн рублей, а наименьший – не менее 0,5 млн рублей.

Решение. Так как кредит выплачен за 15 лет, то

$$S = kc \Rightarrow 6 = 15c \Leftrightarrow c = 0,4.$$

Наименьший платёж – первый. По формуле (7)

$$b_1 = S \cdot \frac{a}{100} + c = \frac{6a}{100} + 0,4 \le 1,9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \le 25\%.$$

Наибольший платёж – последний. По формуле (8)

$$b_k = c(1+q) =$$
$$= 0,4\left(1 + \frac{a}{100}\right) \ge 0,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \ge 25.$$

Ответ. 25.

Пример 10. В июле планируется взять кредит на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

1) каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года,

2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга,

3) в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Решение. По формуле (9):

$$\sum_{i=1}^{5} b_i = \frac{10(0,1 \cdot 6 + 2)}{2} = 13.$$

Ответ. 13.

Пример 11. 15 января планируется взять кредит на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

1) 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца,

2) со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить некоторую часть долга,

3) 15 числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите p.

Решение. По формуле (9):

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{S(q(n+1)+2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n} b_i - 2S}{S(n+1)} = 2\,\frac{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{S} - 1}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{2(1,2-1)}{40} = 0,01 = \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = 1\%.$$

Ответ. 1.

Прибыль, зарплата

Пример 12. Зависимость объёма Q купленного у фирмы товара от цены P (в рублях) выражается формулой

$$Q = 15000 - P,\ 1000 \le P \le 15000.$$

Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют

3 000 Q + 5 000 000 рублей.

Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако прибыль не изменилась.

На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение. По условию доход от продажи товара равен

$$PQ = 15000P - P^2 \text{ рублей},$$
$$1000 \le P \le 15000.$$

Затраты на производство Q единиц товара составляют

$$3000Q + 5000000 =$$
$$= 3000(15000 - P) + 5000000 \text{ рублей}.$$

Тогда прибыль

$$D = 15000P - P^2 - 3000(15000 - P) -$$
$$- 5000000 = -P^2 + 18000P - 50000000.$$

Фирма уменьшила цену продукции на 20% , однако прибыль не изменилась. Значит,

$$-P^2 + 18000P - 50000000 =$$
$$= -(0,8P)^2 + 18000(0,8P) - 50000000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,36P^2 - 18000 \cdot 0,2P = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P = 10000 \Rightarrow 0,8P = 8000.$$

Итак, новая цена продукции 8000 рублей. Увеличив её на $a\%$, получим цену, равную

$$P_{\text{нов}} = 8000\left(1 + \frac{a}{100}\right) \text{ рублей},$$

и прибыль, равную

$$D(a) = -8000^2\left(1 + \frac{a}{100}\right)^2 +$$
$$+ 18000 \cdot 8000\left(1 + \frac{a}{100}\right) - 50000000$$

рублей.

Так как $D(a)$ – квадратный трёхчлен с отрицательным коэффициентом при квадрате переменной, наибольшее значение достигается в его вершине, т. е.

$$1 + \frac{a}{100} = \frac{18000 \cdot 8000}{2 \cdot 8000^2} = \frac{9}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{100}{8} = 12,5\%.$$

Ответ. 12,5.

Пример 13. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит

$$px - \left(0,5x^2 + 2x + 6\right).$$

Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей.

При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Решение. По условию прибыль

$$D = px - \left(0,5x^2 + 2x + 6\right) =$$
$$= -0,5x^2 + x(p - 2) - 6.$$

Так как $D(x)$ – квадратный трёхчлен с отрицательным коэффициентом при квадрате переменной, наибольшее значение достигается в его вершине, т. е. $x = \frac{p-2}{2 \cdot 0,5} = p - 2.$

При этом ежегодная прибыль

$$D = -0,5(p-2)^2 + (p-2)^2 - 6 =$$
$$= \frac{(p-2)^2}{2} - 6.$$

Строительство завода окупится не более чем за 3 года, если

$$\left(\frac{(p-2)^2}{2} - 6\right)3 \ge 78 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4p - 60 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p \le -6, \\ p \ge 10. \end{array}\right.$$

Отсюда следует, что наименьшее значение $p = 10$.

Ответ. 10.

1. Задачи на исследование условного экстремума, которые сводятся к нахождению минимума или максимума хорошо известного квадратного трёхчлена

В задачах этого типа речь пойдёт о наибольшей прибыли предприятия, наименьшей сумме, требующейся на оплату труда рабочих, и т. д.

С точки зрения математики это задачи на исследование так называемого условного экстремума, когда необходимо найти наибольшее или наименьшее значение, например, функции $f(x, y)$ при условии, что переменные связаны некоторым соотношением – условием $g(x, y) = \text{const}$.

В следующих задачах необходимо найти минимум или максимум функции двух переменных $z(x, y) = ax^2 + by^2$ при условии, что $\alpha x + \beta y = \text{const}$. Выразив x или y из соотношения $\alpha x + \beta y = \text{const}$ и подставив в $z(x, y) = ax^2 + by^2$, получим квадратный трёхчлен, который необходимо исследовать на экстремум.

Будут приведены алгебраические способы решения и, если возможно, геометрические.

Пример 14. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся *суммарно* t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся *суммарно* t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом заводе) Владимир платит 500 рублей.

Владимиру нужно каждую неделю 580 единиц товара.

Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение. Пусть на первом заводе рабочие трудятся *суммарно* x^2 часов в неделю, а на втором заводе y^2 часов. Тогда им заплатят $S = 500\left(x^2 + y^2\right)$ рублей. При этом первый завод произведёт $2x$ единиц товара, а второй $5y$ единиц. Владимиру нужно, чтобы было

$$2x + 5y = 580.$$

Первый способ (*алгебраический, в «лоб»*). Итак,

$$S = 500\left(x^2 + y^2\right) =$$

$$= 500\left(y^2 + \frac{(580 - 5y)^2}{4}\right) =$$

$$= 125\left(29y^2 - 5800y + 580^2\right).$$

Так как это квадратный трёхчлен с положительным коэффициентом при квадрате и никаких огра-

ничений на y нет, минимальное значение достигается в вершине:

$$y_{\min} = \frac{5800}{58} = 100.$$

Отсюда следует, что

$$S_{\min} = 500\left(10^4 + \frac{(580-500)^2}{4}\right) =$$

$$= 125 \cdot 10^2 (400 + 64) =$$

$$= 5800000 \ (\text{рублей}).$$

Ответ. 5800000.

Второй способ (с привлечением геометрический интерпретации и касательной). Задача состоит в том, чтобы найти минимальное значение S, при котором система

$$\begin{cases} 2x + 5y = 580, \\ S = 500\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}$$

имеет решение. Начертим прямую $2x + 5y = 580$ (рис. 1).

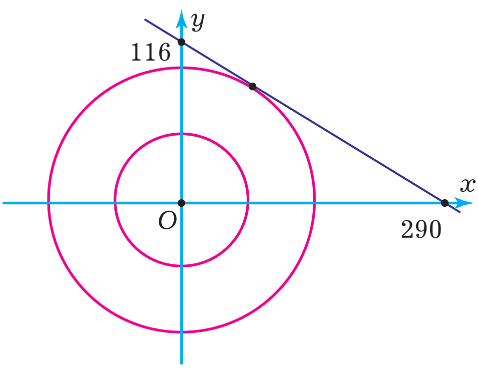

Рис. 1

Теперь будем рисовать концентрические окружности разных радиусов с центром в начале координат. Видно, что «маленькие» окружности не имеют общих точек с прямой, а радиусы больших окружностей больше радиуса окружности, касающейся прямой. Касающаяся окружность и даёт решение задачи. Прямая $2x + 5y = 580$ является касательной к окружности $S = 500\left(x^2 + y^2\right)$ тогда и только тогда, когда прямая и окружность имеют только одну общую точку, т. е. уравнение

$$S = 500\left(x^2 + y^2\right) =$$

$$= 500\left(y^2 + \frac{(580-5y)^2}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 125 \cdot 29y^2 - 125 \cdot 5800y +$$

$$+ 125 \cdot 580^2 - S = 0$$

имеет единственное решение. Значит, дискриминант равен 0:

$$\frac{D}{4} = (125 \cdot 2900)^2 - 125^2 \cdot 580^2 \cdot 29 +$$

$$+ S \cdot 125 \cdot 29 = 0 \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{125^2 \cdot 580^2 \cdot 4}{125 \cdot 29} = 5\,800\,000.$$

Ответ. 5 800 000.

Третий способ (с привлечением геометрический интерпретации и касательной к окружности). Воспользуемся чертежом второго способа, но значение $\frac{S}{500}$, равное квадрату радиуса касающейся окружности, найдём по-другому.

Проведём радиус окружности в точку касания. По свойству касательной к окружности, получившийся угол OBA – прямой, см. рис. 2.

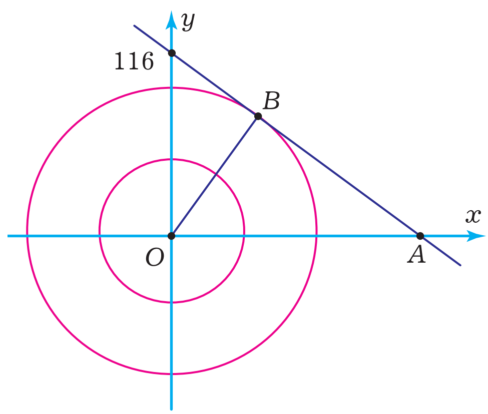

Рис. 2

Тогда

$$(OB)^2=\frac{S}{500}=(290\sin\angle BAO)^2=$$

$$=\left(290\frac{116}{\sqrt{116^2+290^2}}\right)^2=$$

$$=\frac{290^2 116^2}{\left(\frac{580}{5}\right)^2+\left(\frac{580}{2}\right)^2}=\frac{290^2\cdot 116^2\cdot 100}{580^2 29}=$$

$$=116\cdot 100\Leftrightarrow S=5\,800\,000.$$

Ответ. 5 800 000.

2. Задачи на исследование условного экстремума, в которых уже, вообще говоря, нельзя обойтись без производных.

В этих задачах необходимо найти минимум или максимум функции двух переменных $z(x,y)=\alpha x+\beta y$ при условии, что $ax^2+by^2=\text{const}$. Выразив x или y из соотношения $ax^2+by^2=\text{const}$ и подставив в $z(x,y)=\alpha x+\beta y$, получим функцию, экстремум которой придётся искать с помощью дифференцирования.

Пример 15. Антон является владельцем двух заводов с одинаковым технологическим оборудованием в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в одном из городов, трудятся *суммарно* t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час рабочим на первом заводе Антон платит 250 рублей, а рабочим на втором заводе Антон платит 200 рублей.

Антон готов платить всем рабочим в неделю 900 000 рублей.

Какое наибольшее количество единиц товара рабочие сделают за неделю?

Решение. Пусть на первом заводе рабочие трудятся *суммарно* x^2 часов в неделю, а на втором заводе y^2 часов. Тогда им заплатят $250x^2+200y^2$ рублей. При этом первый завод произведёт x, $x\ge 0$, единиц товара, а второй y, $y\ge 0$, единиц, а вместе $z(x,y)=x+y$. Нужно найти наибольшее значение $z(x,y)=x+y$ при условии, что

$$900\,000=250x^2+200y^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18\,000=5x^2+4y^2.$$

Первый способ (с производной, в «лоб»). Подставим x из первого соотношения

$$18000=5(z-y)^2+4y^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z(y)=y+\sqrt{\frac{18000-4y^2}{5}}$$

(перед корнем взят знак +, так как $z=x+y\ge y$).

Теперь найдём максимум $z(y)$ с помощью дифференцирования:

$$z'=1+\frac{-4y\sqrt{5}}{\sqrt{18000-4y^2}\cdot 5}\Rightarrow$$

$$z'=0\Leftrightarrow\sqrt{18000-4y^2}=\frac{4y}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\cdot 18000=36y^2\Leftrightarrow y=50\Rightarrow$$

$$z=50+\sqrt{\frac{8000}{5}}=90.$$

Ответ. 90.

Второй способ (с привлечением геометрический интерпретации и касательной, без производной). Задача состоит в том, чтобы найти максимальное значение z, при котором система

$$\begin{cases}x+y=z,\\ 18\,000=5x^2+4y^2\end{cases}$$

имеет решение.

Уравнение

$$18000 = 5x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{60^2} + \frac{y^2}{\left(30\sqrt{5}\right)^2} = 1$$

есть уравнение эллипса с центром в начале координат. Прямая $x + y = z$ пересекает эллипс и пересекает оси координат в точках $(z;0)$ и $(0;z)$. Как видно, максимальное значение z достигается, когда прямая касается эллипса, см. рис. 3.

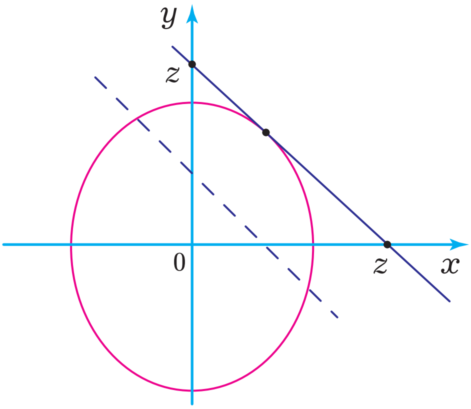

Рис. 3

Прямая $x + y = z$ является касательной к эллипсу

$$18000 = 5(z - y)^2 + 4y^2$$

тогда и только тогда, когда прямая и эллипс имеют только одну общую точку, т. е. уравнение

$$18000 = 5(z - y)^2 + 4y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9y^2 - 10zy + 5z^2 - 18000 = 0$$

имеет единственное решение. Значит, дискриминант равен 0:

$$25z^2 - 45z^2 + 18000 \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow z = 90.$$

Ответ. 90.

Третий способ (с привлечением геометрический интерпретации и производной). Если не знать или не помнить, что касательная с эллипсом имеет только одну общую точку, то можно найти точку на эллипсе, в которой наклон касательной совпадает с наклоном прямой $x + y = z$:

$$18000 = 5x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{18000 - 5x^2}}{2}$$

(перед корнем взят знак +, так как $y \geq 0$).

Найдём производную:

$$y' = \frac{-5x}{2\sqrt{18000 - 5x^2}}.$$

Тогда

$$y'_{\text{эллипса}} = y'_{\text{прямой}} \Leftrightarrow \frac{-5x}{2\sqrt{18000 - 5x^2}} =$$

$$= -1 \Leftrightarrow 25x^2 = 4\left(18000 - 5x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$x = 40 \Rightarrow y = 50 \Rightarrow z = 90.$$

Ответ. 90.

Комментарий. Последние два способа годятся только для тех школьников профильного уровня, которые представляют, что такое эллипс.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Знание – единственное лекарство против суеверия.

Г. Бокль