Комбаров Анатолий Петрович
Профессор кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета МГУ.

Несуществующие объекты конкурсной математики

«К счастью, я рано понял,
что если дела обстоят плохо, значит,
пришло время напряженно трудиться».
Гордон Бэнкс, вратарь Сток Сити и сборной Англии.

Опыт вступительных экзаменов показывает, что дела с решением задач по геометрии обстоят не слишком хорошо. К тому же на конкурсных экзаменах по математике иногда предлагаются задачи, для успешного решения которых необходима определенная психологическая подготовка. Проиллюстрируем это на примере следующей задачи, предлагавшейся довольно давно на вступительном экзамене по математике на отделении структурной и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ.

Задача 1. *Окружность, проходящая через точку D и касающаяся сторон AB и BC равнобедренной трапеции $ABCD$, пересекает стороны AD и CD соответственно в точках M и N. Известно, что $AM : DM = 1 : 3$, $CN : DN = 4 : 3$. Найти длину основания BC, если $AB = 7$ и $AD = 6$.*

Первое решение. Обозначим через P и G соответственно точки касания данной окружности со сторонами AB и BC трапеции $ABCD$ (см. рис.1). По теореме о касательной и секущей, проведенной из некоторой точки (в данном случае, из точек C и A), имеем $CG=\sqrt{CD\cdot CN}$ и $AP = \sqrt{AM\cdot AD}$. Поскольку $AM : DM = 1 : 3$ и $AD = AM + MD = 6$, то $AM = \frac{3}{2}$ и $AP = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot 6}=3$. Поскольку $CN : DN = 4 : 3$ и $AB = CD = CN + ND = 7$, то $CN = 4$ и $CG = \sqrt{4\cdot 7}=2\sqrt{7}$.

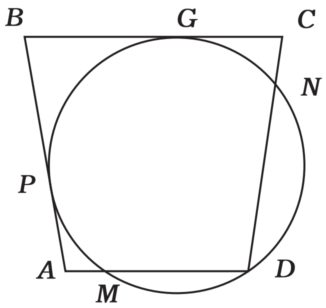

Рис. 1

Поскольку отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки равны, то $BG = BP$. Так как $BP = AB - AP = 7 - 3 = 4$, то $BG = BP = 4$ и $BC = BG + CG = 4 + 2\sqrt{7}$.

Ответ: $BC = 4 + 2\sqrt{7}$.

Второе решение той же самой задачи. Сначала, как и в предыдущем решении, найдем $AB = CD = 7$, $CN = 4$ и $CG = 2\sqrt{7}$. $MD = AD - AM = 6 - \frac{3}{2} = 4{,}5$. Теперь опустим перпендикуляры AR и DT на BC и проведем диаметр GO (рис.2). Диаметр перпендикулярен хорде MD и, следовательно, делит ее пополам в точке L. Точка T лежит на основании BC, поскольку $CG = 2\sqrt{7} > GT = 0,5 \cdot MD = 2,25$.

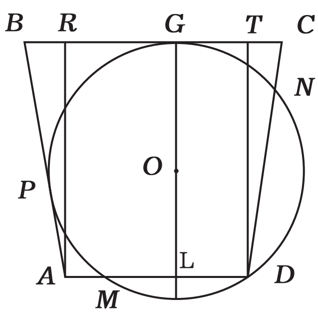

Рис. 2

Поскольку трапеция равнобедренная, то и точка R лежит на основании BC, причем $BR = TC = CG - GT = 2\sqrt{7} - 2{,}25$. Получаем

$$BC = BR + RT + TC = 2TC + AD = 2(2\sqrt{7} - 2{,}25) + 6 = 4\sqrt{7} + 1{,}5.$$

Ответ: $BC = 4\sqrt{7} + 1{,}5$.

Третье решение. На рисунке 2 дополнительно отметим середины Q и S оснований AD и BC соответственно (см. рис 3).

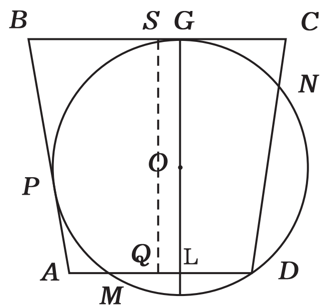

Рис. 3

По-предыдущему $LD = GT = 2,25$. Так как точка Q является серединой AD, то $QD = 3$, и следовательно, $QL = QD - LD = 0,75$. Но $SG = QL$. Значит $SG = 0,75$. Отрезки касательных BP и BG равны, поэтому $BG = 4$, а значит $BS = BG - SG = 3,25$. Таким образом $BC = 2BS = 6,5$.

Ответ: $BC = 6,5$.

Какой же ответ правильный? Поскольку $4\sqrt{7} + 1{,}5 \neq 4 + 2\sqrt{7}$, и каждое из этих двух чисел не равно 6,5, полученное противоречие показывает, что **правильный ответ** состоит в том, что трапеция, удовлетворяющая условиям задачи, существовать не может. Но как же в жестких экзаменационных условиях додуматься до правильного решения в подобной ситуации? Ответ на этот вопрос давно известен: с помощью хорошего чертежа. И чертеж этот следует делать не только в начале, но и в конце решения задачи, стараясь учесть, по возможности, все величины, полученные в процессе решения. Например, в данной задаче уже из геометрических соображений ясно, что невозможно равенство $BP = CN$ (рис. 4). В самом деле, если отрезок EP' симметричен отрезку BP относительно оси GO, то EP' параллелен CN и, очевидно, $CN < EP'$, но $BP = EP' = 4$ и $CN = 4$. Противоречие.

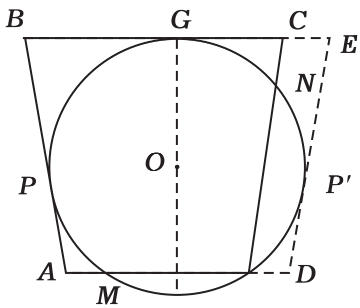

Рис. 4

Интересна история этой задачи. Первое решение было позаимствовано вместе с рисунком 1 из журнала «Математика в школе». А вот журнал «Квант» в своей публикации эту задачу заменил на геометрическую задачу из другого варианта. Автор этой заметки обратился с соответствующим вопросом к тогдашнему заместителю главного редактора журнала «Квант» профессору механико-математического факультета Юрию Петровичу Соловьеву. И Юрий Петрович сообщил, что задачу заменили сразу после того, как пришел художник «Кванта» и сказал, что он не может «это» нарисовать!! Прекрасная иллюстрация хорошо известного высказывания, что «хороший чертеж – это половина решения геометрической задачи»!

Еще пример: следующая задача предлагалась на вступительном экзамене по математике на психологическом факультете МГУ. Эта задача интересна тем, что доказательство невозможности геометрической ситуации, описываемой в условии, гораздо проще и естественнее псевдорешения, заканчивающегося числовым ответом.

Задача 2. *В угол с вершиной в точке K величиной в $120°$ вписана окружность с центром в точке O. Точки M и N расположены на сторонах этого угла так, что отрезок MN касается этой окружности и пересекается с отрезком KO в точке L. Найти отношение $KO : OL$, если радиус окружности, вписанной в треугольник KMN, равен $2\sqrt{3}$ и $MN = 11$.*

Рассмотрим сначала одно из возможных «решений». Обозначим точки касания вписанной в треугольник KMN окружности со сторонами MK, KN и MN соответственно через P, T и S, а ее центр через Q (рис. 5). Пусть U и V точки касания

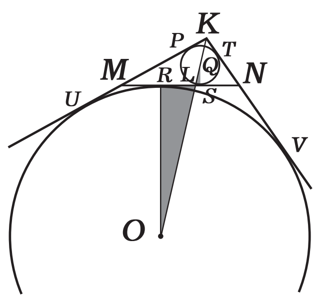

Рис. 5

окружности O со сторонами угла, а R − точка касания той же окружности с отрезком MN. Точки K, Q, L и O, очевидно, лежат на одной прямой. Из прямоугольного треугольника KPQ находим $KP = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 2$, $KQ = 4$. Очевидно, $KT = KP = 2$. Полагая $MS = x = MP$, получаем $SN = 11 - x = NT$. Поэтому периметр треугольника KMN равен $(2 + x) + 11 + ((11 - x) + 2) = 26$ и равен $KU + KV$, так как $MR = MU$ и $NR = NV$. Итак $KU = KV = 13$, и из прямоугольного треугольника KUO находим $KO = 26$, $OU = 13\sqrt{3} = OR$. Прямоугольные треугольники LQS и ORL подобны, поэтому $OL : QL = OR : QS = 13\sqrt{3} : 2\sqrt{3}$. Кроме того $OL + QL + KQ = KO = 26$ и $KQ = 4$. Из полученной системы уравнений находим $OL = \frac{22\cdot 13}{15}$, и, следовательно, $KO : OL = \frac{15}{11}$.

Но если теперь мы повнимательнее посмотрим на рисунок угла в $120°$ и вписанную в этот угол окружность радиуса $2\sqrt{3}$ (все это, разумеется, приблизительно!), то легко обнаружим, что провести касательную MN длины 11 никак не получается. Догадавшись с помощью чертежа, докажем это. Поскольку $MS = x$, по теореме косинусов для треугольника KMN получаем $11^2 = (x + 2)^2 + ((11-x)+ 2)^2 - 2(x+2)(13-x)\cos 120°$.

После преобразований получаем квадратное уравнение $x^2 - 11x + 78 = 0$, дискриминант которого отрицателен. Поэтому такой треугольник KMN существовать не может. Обратим также внимание на то, что задача сформулирована некорректно. В самом деле, в условии сказано, что «отрезок MN касается этой окружности и пересекается с отрезком KO в точке L». Но эту фразу можно понять и так, что точка касания отрезка MN и окружности и есть точка L! Тогда несуществование треугольника KMN доказывается еще проще. Докажите это сами!

Итак, основной инструмент решения геометрической задачи (и не только геометрической!)− это чертежи. Читая условие задачи, начинаем рисовать эскизы, которые делаем без применения чертежных инструментов. Ведь если сразу попытаться сделать точный чертеж с помощью линейки и циркуля, то на него уйдет очень много времени, и чертеж будет жалко переделывать, а скорее всего этот чертеж окажется неверным, и дальнейшие рассуждения будут проходить по неверному чертежу. По мере продвижения в понимании задачи переделываем чертежи, и, в конце концов, получим хороший правильный чертеж, который и подскажет нам как решать задачу. Очень неплохо догадаться до дополнительных построений, особенно выходящих за пределы чертежа (см., например, рис. 4).

Следующая задача предлагалась на механико-математическом факультете МГУ.

Задача 3. *В треугольнике ABC длина BC равна 6, $\angle BAC = \arcsin\frac{3}{5}$. Хорда LK окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и N соответственно. Известно, что*

$\angle BCA = \angle NMA$, площадь четырехугольника $BCNM$ равна 5, а длина MN равна 4. Найти высоту треугольника LAK, опущенную из вершины A, и его площадь.

В самом деле, треугольник AMN подобен треугольнику ABC по двум углам (рис. 6). Обозначив через S площадь треугольника ABC, получаем $\frac{S}{S-5}=\left(\frac{6}{4}\right)^2$, поскольку отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Итак, $S = 9$. Поскольку $BC = 6$, можно найти высоту AH треугольника ABC: $AH = 3$. По теореме синусов найдем радиус окружности $R=\frac{BC}{2\sin\angle A}=\frac{6}{2\cdot\frac{3}{5}}=5.$ По теореме Пифагора найдем расстояние от центра окружности до

$$BC:\ \sqrt{R^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=4.$$

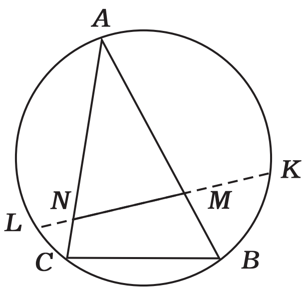

Рис. 6

И вот теперь переделаем чертеж! (см. рис. 7).

Уже ясно, что, если $BC = 6$, то $MN < 4$. Докажем это. Угол ACB тупой, поэтому точка H лежит вне отрезка BC. Следовательно $HC = AT - \frac{1}{2}BC = \sqrt{5^2-1^2}-3=2\sqrt{6}-3,$ $HB = HC + BC = 2\sqrt{6}+3.$

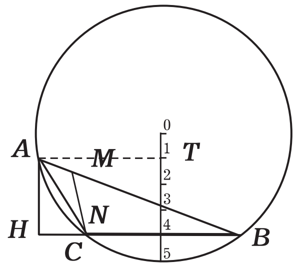

Рис. 7

Таким образом $\text{tg}\angle ACB = -\frac{3}{2\sqrt{6}-3}$ и $\text{tg}\ \angle B = \frac{3}{2\sqrt{6}+3}$. Угол ϕ между прямыми MN и CB, очевидно, равен разности углов ACB и B, поэтому $\text{tg}\ \phi=\frac{\text{tg}\angle ACB-\text{tg}\angle B}{1+\text{tg}\angle ACB\cdot\text{tg}\angle B}=-2\sqrt{6}$ (угол ϕ оказался тупым!). Проекция отрезка MN на радиус, проходящий через точку T, очевидно, не превосходит 3. Но тогда проекция отрезка MN на перпендикулярную этому радиусу прямую CB не превосходит $\frac{3}{2\sqrt{6}}$. Теперь с помощью теоремы Пифагора убеждаемся, что $MN \le \sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2\sqrt{6}}\right)^2}<4.$ Таким образом геометрическая ситуация, описанная в задаче, существовать не может.

Продемонстрируем теперь, что аналогичные ситуации возникают и в конкурсных задачах по алгебре. Следующая текстовая задача предлагалась на геологическом факультете МГУ. Заметим, что эта задача отличается громоздкой формулировкой. И это не случайно. Очень часто внутренне противоречивые задачи выглядят громоздко.

Задача 4. *Четыре бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году в течение четырех месяцев работы не производились, а всё остальное время работала только одна из бригад. Отношения времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны: в первый год 4:1:2:5 и 10 млн.т; во второй год 2:3:2:1 и 7 млн.т; в третий год 5:2:1:4 и 14 млн.т. Сколько млн.т сланцев выработали бы за 4 месяца четыре бригады, работая все вместе?*

А вот и решение этой задачи, позаимствованное из книги (Математика. Задачи вступительных экзаменов с ответами и решениями. Составители: Мельников И.И., Олехник С.Н., Сергеев И.Н., Издание второе, исправленное и дополненное, М., 1996. Стр.157). Пусть производительности бригад равны x_1, x_2, x_3 и x_4 млн. т/мес соответственно. Тогда по условию имеем систему уравнений: (1) $4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 10$; (2) $2x_1+3x_2+2x_3+x_4 = 7$; (3) $5x_1+2x_2 + +x_3 +4x_4 = 14$. Сложим первое уравнение со вторым и первое с третьим. Получим (3) $6x_1+4x_2+4x_3+6x_4 = 17$ и (4) $3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8$. А теперь возьмем разность уравнений (3) и (4): (5) $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$, откуда (6) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$. Учетверив последнюю величину, получим ответ 12 млн.т.

Сделаем теперь замену $u = x_1+x_2$, $v = x_3 + x_4$, $w = x_2 - x_4$ в уравнениях (1),(2),(3). Получим определенную систему из трех уравнений с тремя неизвестными, решив которую найдем $v = -\frac{1}{2}$, что невозможно по смыслу задачи. Таким образом мы доказали, что ситуация, описываемая в задаче, невозможна.

Следующая задача предлагалась на механико-математическом факультете.

Задача 5.

Вычислить $\log^2_{\frac{x}{y}} x + \log^2_{\frac{y}{x}} y$,

если $\log_{\frac{x}{y}}\left(x^7\right) = \log_{\sqrt{y}} \frac{y}{x}$.

Предполагалось следующее решение. Заметив, что $x \neq 1$, преобразуем равенство, данное в условии, следующим образом:

$$\frac{7}{1-\log_x y} = 2\left(1-\frac{1}{\log_x y}\right).$$

Обозначив $\log_x y = z$, после преобразований получим уравнение $2z^2 + + 3z + 2 = 0$, не имеющее корней. Следовательно, такие числа x и y не существуют. Безусловно в этой задаче квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом получили многие абитуриенты, но и многие из них не справились с ситуацией и теряли драгоценное время, стараясь найти в своих выкладках какие-то ошибки.

Поэтому предварительное знакомство с подобными задачами абитуриентов, собирающихся поступать в вузы с повышенными требованиями по математике, представляется необходимым и полезным.