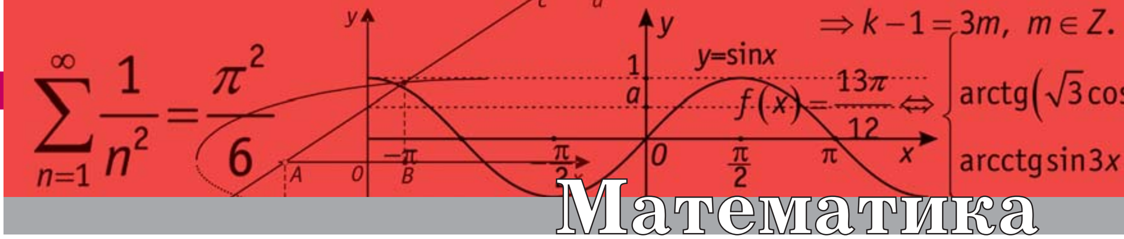

Лупашевская Василиса Юрьевна
Студентка IV курса математического факультета Московского педагогического государственного университета (МПГУ).

Нестандартные задачи на прогрессии

Вполне вероятно, что задачи на прогрессии, членами которых являются целые числа, встретятся этим летом в вариантах Единого государственного экзамена по математике. Надеемся, что данная статья поможет нашим читателям хорошо разобраться в специфике подобных задач.

Задачи олимпиадного типа на прогрессии уже не раз встречались, как в диагностических работах, так и в пособиях МИОО по подготовке к экзамену. Некоторые из них требуют просто аккуратности:

1. Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, ..., a_N и $b_1 = 9$, $b_2 = 14$, ..., b_M совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии. (Диагностическая работа. 19.11.09.)

Решение. Обозначим совпадающие члены как $c_1, c_2, \ldots, c_K$. Тогда первое совпадение – это $c_1 = a_4 = b_2 = 14$, а последнее – это $c_K = a_N = b_M$. Разность между соседними совпадающими членами равна $3 \cdot 5 = 15$. Тогда $c_K = 14 + (k-1) \cdot 15$. Из того, что сумма K членов этой прогрессии равна 815, находим, что $K = 10$ и что $c_{10} = 14 + 9 \cdot 15 = 149$. Затем, из соотношений $a_N = 5 + (N-1) \cdot 3 = 149$ и $b_M = 9 + (M-1) \cdot 5 = 149$, находим M и N.

Ответ: $N = 49$, $M = 29$.

Перед тем, как идти дальше, напомним вам о так называемых *характеристических свойствах арифметической и геометрической прогрессий*. Последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов, то есть для любого $n \geq 2$ выполняется равенство $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1})/2$. В частности, три числа a, b и c образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b=(a+c)/2$.

Последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов, то есть для любого $n \geq 2$ выполняется равенство $(b_n)^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$. В частности, три числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = a \cdot c$.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии пригодится нам при решении следующей очень непростой задачи.

2. Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное при указанных условиях значение b. (Диагностическая работа. 19.05.10.)

Решение. Начнем переводить условие задачи на язык формул. Во-первых, $500 < a < b < c$, a, b, $c \in N$. Во-вторых, $a = n^2$, $b = m^2$, $c = k^2$, n, m, $k \in N$. В-третьих (характеристическое свойство арифметической прогрессии!), $2b = a + c$.

Имеет место соотношение:

$$2m^2 = n^2 + k^2. \qquad (1)$$

Заметив, что n и k – числа одной чётности, выразим m и k через n: $m = n + p$, $k = (n + p) + (p - 2l)$, где p и l – натуральные числа.

Преобразуем соотношение (1), используя формулы сокращённого умножения:

$$(p-2l)^2 = 2l(n+l) \geq 2l(23+l) \qquad (2)$$

При $l=1$ $(p-2l)^2 = 2n+2 \geq 48$. Наименьшие возможные значения n, p и, следовательно, m получаем при $(p-2)^2 = 64$. В этом случае $n = 31$, $m = 41$, $k = 49$.

При $l=2$ $(p-4)^2 = 4n+8 \geq 100$. Наименьшие возможные значения n, p и m получаем при $(p-4)^2 = 100$. В этом случае $n = 23$, $m = 37$, $k = 47$.

Покажем, что значения, меньшие, чем 37, число m принимать не может. Посмотрим внимательно на (2).

При $l \geq 3$ величина $(p-2l)^2 = 2l(n+l) \geq 2l(23+l) > 100$. Следовательно, $(p-2l) > 10$, $p > 10 + 2l > 16$, поэтому для $m < 37$ $n = m - p < 23$, а это противоречит условию задачи.

Ответ: $b = 37^2 = 1369$.

Условия следующих трёх задач взяты из книг И.В. Ященко, С.А. Шестакова и П.И. Захарова «Подготовка к ЕГЭ по математике в 2011 году. Методические указания» (МЦНМО, 2011) и М.Я. Пратусевича, С.Е. Рукшина, К.М. Столбова и И.В. Ященко «ЕГЭ 2011. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра» (МЦНМО, 2011).

3. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 250. Если все её члены увеличить на 1 или все её члены увеличить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 250. Какие значения в этих условиях может принимать величина n^2d, где d – разность прогрессии, а n – число её членов?

Решение. Пусть в нашей прогрессии k неотрицательных членов и $(l+m)$ отрицательных, причём l членов меньших, чем -1 $(a_i<-1)$, и ещё m таких, что $0\le(a_i+1)<1$. Понятно, что количество неотрицательных членов нашей прогрессии не больше, чем количество отрицательных, иначе увеличение на единицу всех членов прогрессии увеличит сумму их модулей. Покажем, что в данной прогрессии количество неотрицательных членов k в точности равно количеству отрицательных $(n=2k)$.

При увеличении всех членов прогрессии на единицу сумма S_1 неотрицательных её членов увеличится на k, сумма S_3 модулей тех членов, что не превосходят -1, уменьшится на l, а сумма S_2 оставшихся m членов станет равной $(m - S_2)$, то есть изменится на $(m - 2S_2)$.

Так как при этих изменениях сумма модулей членов полученной прогрессии осталась равной 250, получаем, что $k-l+(m-2S_2)=0$, или $l=k+(m-2S_2)$, или $(k+m)=(l+2S_2)$.

В полученной новой прогрессии уже $(k+m)$ неотрицательных членов и l отрицательных. Так как при увеличении всех членов новой прогрессии ещё на единицу сумма их модулей опять не меняется, то количество $(k+m)$ неотрицательных её членов опять не должно превышать количества отрицательных, то есть должно выполняться соотношение $(k+m)\le l$. А так как ранее уже было показано, что $(k+m)=(l+2S_2)$, то всё это возможно лишь в случае, когда $S_2=0$ и $m=0$. Отсюда следует, что $k=l$, а $n=2k$.

Если x – самый маленький неотрицательный член исходной прогрессии, то модуль ближайшего к нулю отрицательного члена равен $|d|-x$. Теперь запишем сумму модулей членов исходной прогрессии:

$$(2x+(k-1)\cdot|d|)\cdot k/2+(2|d|-2x+(k-1)\times$$
$$\times|d|)\cdot k/2=(2x+(k-1)\cdot|d|+2|d|-2x+$$
$$+(k-1)\cdot|d|)\cdot k/2=|d|\cdot k^2=$$
$$=|d|\cdot n^2/4=250,$$

откуда следует, что $n^2d=\pm1000$.

Ответ. ±1000.

4. В арифметической прогрессии пятый член равен 2. При каком значении разности прогрессии сумма всевозможных попарных произведений четвёртого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наименьшей?

Решение. $a_4=a_5-d=2-d$; $a_7=$ $=2+2d$; $a_8=2+3d$. После упрощений сумма попарных произведений $a_4\cdot a_7+a_4\cdot a_8+a_7\cdot a_8=d^2+16d+12=$ $=(d+8)^2-52$. При $d=-8$ эта сумма минимальна.

Ответ. -8.

5. Отношение суммы первых трёх членов возрастающей арифметической прогрессии к сумме её последующих семи членов равно 7:3. Найдите разность прогрессии, если известно, что у неё имеются два соседних члена, произведение которых равно $-7/4$.

Решение. Условие $3\cdot(a_1+a_2+a_3)=$ $=7\cdot(a_4+a_5+...+a_{10})$ приводит после упрощений к соотношению $8a_1=$

$=-57d$. Так как $d>0$, то $a_1<0$. Последний отрицательный член прогрессии – это $a_8=a_1+7d=-d/8$, тогда $a_9=-d/8+d=7d/8>0$. Произведение именно этих соседних членов прогрессии равно $-7/4$. Итак, $a_8\cdot a_9=-(7d^2)/64=-7/4$, $d^2=16$, $d=4$.

Ответ. 4.

Теперь рассмотрим несколько очень интересных задач из практики вступительных экзаменов в МГУ, возможно, они являются «прототипами» задач будущих экзаменов.

6. Сумма первых одиннадцати членов арифметической прогрессии больше 203, но меньше 217. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Пятый член равен 16. Найдите сумму первых пятидесяти членов этой прогрессии. (ВМК МГУ, 2001.)

Решение. Так как все члены данной прогрессии – натуральные числа, то её разность d – целое число. $S_{11}=(a_1+5d)\cdot 11$, из условия задачи следует, что $203/11<a_1+5d<217/11$. Этот промежуток содержит единственное натуральное число, поэтому $a_1+5d=19$. Учтя то, что $a_5=a_1+4d=16$, находим, что $d=3$, $a_1=4$ и $S_{50}=3875$.

Ответ. $S_{50}=3875$.

7. Сумма первых шестнадцати членов арифметической прогрессии равна 104. Известно, что её первый и двенадцатый члены – натуральные числа. Чему равен девятый член прогрессии? (Мехмат МГУ, 2002, май.)

Решение. По условию $S_{16}=(2a_1+15d)\cdot 8=104$, поэтому $13=2a_1+15d$. Умножив обе части на 11, получим: $143=22a_1+11\cdot 15d=22a_1+15\cdot(a_{12}-a_1)=15a_{12}+7a_1$. Так как a_{12} и a_1 – натуральные числа, можно заметить, что $1\le a_{12}\le 9$, причём разность $143-a_{12}$ делится на 7, так как $143-a_{12}=7\cdot(2a_{12}+a_1)$. Это возможно только при $a_{12}=3$. Далее последовательно находим: $a_1=14$, $d=-1$, $a_9=14-8=6$.

Ответ. 6.

8. Квадратное уравнение $x^2-6px-2q=0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q – четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найти x_1 и x_2. (Географический факультет МГУ, 2002, июль.)

Указание. Для того чтобы ненулевые числа p, x_1, x_2, q образовывали геометрическую прогрессию, необходимо и достаточно выполнения двух равенств: $px_2=x_1^2$ и $qx_1=x_2^2$. Выразив отсюда p и q и воспользовавшись теоремой Виета, вы получите систему для нахождения x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1+x_2=6p, \\ x_1x_2=-2q. \end{cases}$$

Ответ: (6, −18), (−4, −8).

Следующая задача в своём варианте шла под первым номером, но оказалась очень трудной для решения.

9. Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых семи членов отличается от суммы следующих семи членов менее чем на 400, а сумма первых шести членов превышает более чем на 3 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии. (Мехмат МГУ, 2003, март.)

Решение. $|(a_8+a_9+...+a_{14})-(a_1+$ $+a_2+...+a_7)|=|(a_8-a_1)+(a_9-a_2)+...+$ $+(a_{14}-a_7)|=|7\cdot 7d|=|49d|<400$. Так как d – целое число, получаем, что $|d|\le 8$. Это получить легко. Гораздо труднее придумать, как использовать второе условие задачи: «*более чем на 3*». Для целых чисел «более чем на 3» означает «не менее чем на 4», а это уже как-то перекликается с полученной ранее оценкой $|d|\le 8$.

Попробуем оценить два последовательных члена прогрессии: $S_6-S_7=-a_7\ge 4$, $S_6-S_5=a_6\ge 4$. Получается, что $a_7-a_6=d\le -8$. Следовательно, $d=-8$, $a_6=4$, $a_7=-4$, тогда $a_1=a_6-5d=44$.

Ответ. 44.

А вот более простая задача.

10. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 15, а сумма её членов со второго по последний не меньше 23. Найти знаменатель прогрессии. (Мехмат МГУ, 2003, июль.)

Указание. По условию $0<b_n-$ $-b_1\le 15$ и $b_2+...+b_n\ge 23$. Комбинируя эти два неравенства, можно получить оценку $15q/(q-1)\ge 23$, откуда получаем, что $1<q\le 23/8$.

Ответ. 2.

11. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма её членов со второго по последний не меньше 26. Найти знаменатель прогрессии. (Мехмат МГУ, 2003, июль.)

Ответ. 2.

А вот совсем свежая задача.

12. Числа 24 и 2187 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии. («Ломоносов – 2010».)

Решение. Заметим, что $24=2^3\cdot 3$, а $2187=3^7$. Знаменатель прогрессии $q\ne 1$, так как $24\ne 2187$. Для определённости будем считать нашу прогрессию возрастающей, то есть $q>1$.

Тогда $2187=24\cdot q^n$, причём $n>0$, откуда $q^n=3^6/2^3$. Любой член данной прогрессии можно записать как $N=2^3\cdot 3\cdot q^m=3^{1+6m/n}\cdot 2^{3-3m/n}$. При целых и неотрицательных степенях $(1+6m/n)$ и $(3-3m/n)$ число N будет натуральным, нам осталось выяснить, при каких целых значениях m это будет выполняться.

Если $\text{НОД}(m, n)\ne 1$, сократим дробь m/n так, что $m/n=m_1/n_1$, $\text{НОД}(m_1, n_1)=1$.

Степени будут целыми лишь при двух значениях n_1: 1 и 3, а для каждого из них находим лишь по два значения m_1, при которых степени неотрицательны. Всего четыре решения: $n_1=1$, $m_1=0$ ($N=24$), $n_1=1$, $m_1=1$ ($N=2187$), $n_1=3$, $m_1=1$ ($N=108$), $n_1=3$, $m_1=2$ ($N=486$).

Ответ. 24, 108, 486, 2187.