Епифанова Татьяна Николаевна
Учитель математики высшей категории старших классов ГОУ СОШ №1358 г. Москвы, отличник народного просвещения. Автор ряда методических статей в научно-теоретических и методических журналах. Победитель конкурса лучших учителей РФ в рамках ПНПО в 2009 году.

Нестандартные способы решения рациональных уравнений

Существует много рациональных уравнений, при решении которых ученики могут применять нестандартные методы. Рассмотрим некоторые частные приёмы решения рациональных уравнений.

1. Непосредственное упрощение уравнения

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{x^2+8x+20}{x+4}+\frac{x^2+10x+30}{x+5}=$$
$$=\frac{x^2+6x+12}{x+3}+\frac{x^2+12x+42}{x+6}.$$

Выделяя полный квадрат в числителе каждой дроби, получим:

$$\frac{(x+4)^2+4}{x+4}+\frac{(x+5)^2+5}{x+5}=$$
$$=\frac{(x+3)^2+3}{x+3}+\frac{(x+6)^2+6}{x+6}.$$

Выделяя целые части из каждой дроби, получим равносильное уравнение:

$$x+4+\frac{4}{x+4}+x+5+\frac{5}{x+5}=$$
$$=x+3+\frac{3}{x+3}+x+6+\frac{6}{x+6},$$

или $\dfrac{4}{x+4}+\dfrac{5}{x+5}=\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{6}{x+6}.$

Перепишем это уравнение в удобном для дальнейшего решения виде:

$$\frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+3}=\frac{6}{x+6}-\frac{5}{x+5}.$$

Приведя к общим знаменателям левую и правую части, получим:

$$\frac{x}{(x+4)(x+3)}=\frac{x}{(x+6)(x+5)}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \dfrac{1}{(x+4)(x+3)}=\dfrac{1}{(x+6)(x+5)} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ \begin{cases} x^2+7x+12=x^2+11x+30 \\ x\neq-6, x\neq-5, x\neq-4, x\neq-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-4,5. \end{array}\right.$$

Ответ. $-4,5;\ 0.$

2. Способ замены неизвестных

Некоторые рациональные уравнения решаются значительно проще, если заменить выражение, содержащее неизвестное, новым неизвестным, относительно которого уравнение становится более простым. Иногда выбор такой замены требует большой изобретательности от учеников.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2+\frac{25x^2}{(x-5)^2}=56.$$

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$x^2+\frac{10x^2}{x-5}+\frac{25x^2}{(x-5)^2}-\frac{10x^2}{x-5}-56=0.$$

Выделим полный квадрат:

$$\left(x+\frac{5x}{x-5}\right)^2-\frac{10x^2}{x-5}-56=0,$$

$$\left(\frac{x^2}{x-5}\right)^2-\frac{10x^2}{x-5}-56=0.$$

Введём новую переменную $t=\dfrac{x^2}{x-5}$. Тогда уравнение примет вид $t^2-10t-56=0.$

Решением квадратного уравнения являются $t_1=14$ и $t_2=-4.$

Рассмотрим совокупность двух уравнений относительно переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x-5}=14,\\ \dfrac{x^2}{x-5}=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2-14x+70=0,\\ x^2+4x-20=0,\end{array}\right.\\ x\neq 5\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2+2\sqrt{6},\\ x=-2-2\sqrt{6}.\end{array}\right.$$

Ответ. $-2+2\sqrt{6}$, $-2-2\sqrt{6}$.

Пример 3. Найти сумму корней уравнения

$$\frac{30}{(x+2)(x+5)}-\frac{40}{(x+10)(x+1)}=\frac{1}{x}. \quad (2)$$

1-й способ. Приведём уравнение (2) к виду

$$\frac{30}{x^2+10+7x}-\frac{40}{x^2+10+11x}=\frac{1}{x}.$$

Обозначив x^2+10 через t, перепишем уравнение так:

$$\frac{30}{t+7x}-\frac{40}{t+11x}=\frac{1}{x}. \quad (3)$$

При выполнении условий $x\neq 0$, $t\neq -7x$, $t\neq -11x$ уравнение (3) будет равносильно следующему:

$$30x(t+11x)-40x(t+7x)=(t+7x)(t+11x),$$

или

$$t^2+28xt+27x^2=0. \quad (4)$$

Поскольку $x\neq 0$, то, разделив обе части уравнения (4) на x^2, получим квадратное уравнение относительно t/x:

$$\left(\frac{t}{x}\right)^2+28\frac{t}{x}+27=0. \quad (5)$$

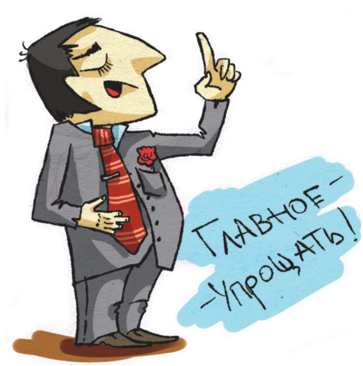
Решая уравнение (5), получим $\dfrac{t}{x}=-27$ или $\dfrac{t}{x}=-1$, т. е. $t=-27x$ или $t=-x$.

Рассмотрим совокупность двух уравнений относительно x:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+27x+10=0,\\ x^2+x+10=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-27+\sqrt{689}}{2},\\ x=\dfrac{-27-\sqrt{689}}{2}.\end{array}\right.$$

Следовательно, сумма корней исходного уравнения равна -27.

Ответ. -27.



2-й способ. Поскольку число 0 не является корнем уравнения (2), то, домножив обе его части на $x \neq 0$, получим равносильное уравнение:

$$\frac{30x}{x^2+10+7x}-\frac{40x}{x^2+10+11x}=1.$$

Разделив числитель и знаменатель каждой дроби на x, перепишем уравнение в виде:

$$\frac{30}{x+\dfrac{10}{x}+7}-\frac{40}{x+\dfrac{10}{x}+11}=1. \qquad (6)$$

Сделав замену переменных $x+\dfrac{10}{x}=t$, перепишем уравнение (6) так: $\dfrac{30}{t+7}-\dfrac{40}{t+11}=1.$

Решая его, получим корни $t_1=-27$, $t_2=-1$.

Рассмотрим совокупность двух уравнений относительно x:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{10}{x}=-27, \\ x+\dfrac{10}{x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+27x+10=0, \\ x^2+x+10=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-27+\sqrt{689}}{2}, \\ x=\dfrac{-27-\sqrt{689}}{2}. \end{array}\right.$$

Следовательно, сумма корней исходного уравнения равна -27.

Ответ. -27.

Пример 4. Найти произведение корней уравнения

$$5x^2+\frac{4500}{x^2}=x-\frac{30}{x}+306. \qquad (7)$$

Разделив обе части уравнения на 5, получим:

$$x^2+\frac{900}{x^2}=\frac{x}{5}-\frac{6}{x}+61,2.$$

Это уравнение равносильно следующему:

$$x^2+\frac{900}{x^2}-60=\frac{x}{5}-\frac{6}{x}+1,2,$$

или

$$25\left(\frac{x^2}{25}+\frac{36}{x^2}-\frac{12}{5}\right)=\frac{x}{5}-\frac{6}{x}+1,2.$$

Перепишем его в виде:

$$25\left(\frac{x}{5}-\frac{6}{x}\right)^2=\frac{x}{5}-\frac{6}{x}+1,2.$$

Обозначив $\dfrac{x}{5}-\dfrac{6}{x}$ через t, получим квадратное уравнение относительно t: $25t^2-t-1,2=0.$

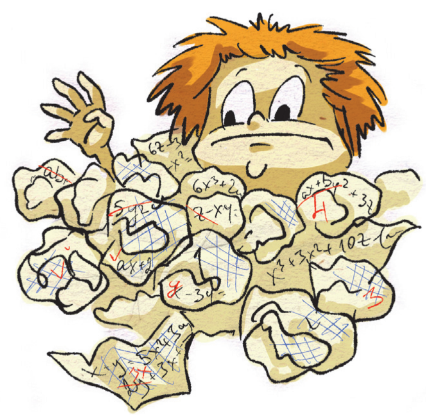
Это уравнение имеет 2 корня $t_1=\dfrac{6}{25}$ и $t_2=-\dfrac{1}{5}$.

Поэтому уравнение (7) будет равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{5}-\dfrac{6}{x}=\dfrac{6}{25}, \\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{6}{x}=-\dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\dfrac{6}{5}x-30=0, \\ x^2+x-30=0. \end{array}\right.$$

Произведение корней исходного уравнения будет равно произведению корней первого уравнения совокупности, умноженному на произведение корней второго уравнения совокупности. Согласно теореме Виета эти произведения равны -30 и -30 соответственно. Значит, искомое произведение равно 900

Ответ. 900.



Пример 5. Найти произведение корней уравнения

$$\left(\frac{x+7}{x+9}\right)^2+\left(\frac{x-7}{x-9}\right)^2=\frac{130(x^2-49)}{63(x^2-81)}.$$

Введём новые переменные

$$a=\frac{x+7}{x+9},\ b=\frac{x-7}{x-9}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$a^2+b^2=\frac{130}{63}ab. \qquad (8)$$

Из этого уравнения следует, что если $a=0$, то и $b=0$, т. е. одновременно $x=7$ и $x=-7$, что невозможно.

Поскольку $a\neq 0$, то, разделив обе части уравнения (8) на a^2, получим квадратное уравнение относительно $\frac{b}{a}$: $\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{130}{63}\cdot\frac{b}{a}+1=0$.

Решая это уравнение, получим

$$\frac{b}{a}=\frac{7}{9} \text{ или } \frac{b}{a}=\frac{9}{7}.$$

Осталось решить два уравнения относительно переменной x.

1) $\frac{(x-7)(x+9)}{(x-9)(x+7)}=\frac{7}{9}\Leftrightarrow x^2+16x-63=0.$

Это уравнение имеет два корня x_1 и x_2, произведение которых согласно теореме Виета равно -63.

2) $\frac{(x-7)(x+9)}{(x-9)(x+7)}=\frac{9}{7}\Leftrightarrow x^2-16x-63=0.$

Это уравнение имеет два корня x_3 и x_4, произведение которых равно -63.

Находим произведение корней данного уравнения:

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=$$
$$=-63\cdot(-63)=3969.$$

Ответ. 3969.

3. Разложение на множители

Если левую часть уравнения удаётся разложить на множители или в обеих частях уравнения удаётся выделить общий множитель, то, согласно свойствам уравнений, решение исходного уравнения сводится к решению более простых уравнений.

Пример 6. Найти сумму корней уравнения

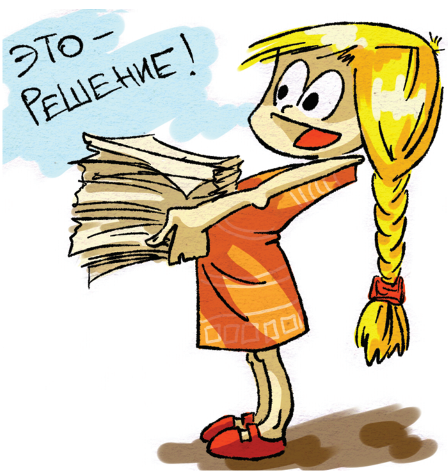
$$\frac{2(x^2+9)}{x^2-9}=\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2\cdot\frac{x+3}{x-3}+$$
$$+\left(\frac{x+16}{x-16}\right)^2\cdot\frac{x-3}{x+3}.$$

Заметим, что

$$\frac{2(x^2+9)}{x^2-9}=\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}.$$

Тогда после перенесения всех членов в правую часть и перегруппировки слагаемых в исходном уравнении получаем:

$$\frac{x+3}{x-3}\left(\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2-1\right)+$$



$$+\frac{x-3}{x+3}\left(\left(\frac{x+16}{x-16}\right)^2-1\right)=0.$$

После упрощения выражения в скобках перепишем уравнение в виде:

$$-\frac{16x}{(x+4)^2}\cdot\frac{x+3}{x-3}+\frac{64x}{(x-16)^2}\cdot\frac{x-3}{x+3}=0,$$

или

$$16x\left(\frac{4}{(x-16)^2}\cdot\frac{x-3}{x+3}-\frac{1}{(x+4)^2}\cdot\frac{x+3}{x-3}\right)=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \dfrac{4}{(x-16)^2}\cdot\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{1}{(x+4)^2}\cdot\dfrac{x+3}{x-3}=0. \quad (9)\end{array}\right.$$

Число 0 является корнем исходного уравнения.

Решим уравнение (9). Поскольку $x\neq 3$, $x\neq -3$, то, домножив обе части уравнения (9) на $(x-3)(x+3)$, получим:

$$4\left(\frac{x-3}{x-16}\right)^2-\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2\cdot\dfrac{x-3}{x-16}=\dfrac{x+3}{x+4}, \\ 2\cdot\dfrac{x-3}{x-16}=-\dfrac{x+3}{x+4}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2+15x+24=0, \\ x^2-\dfrac{11}{3}x-24=0.\end{array}\right.$$

Дискриминант первого уравнения положителен, поэтому оно имеет два корня x_1 и x_2, сумма которых по теореме Виета равна -15.

Так как третий член второго уравнения отрицателен, то оно также имеет два корня x_3 и x_4, сумма которых равна $\frac{11}{3}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет 5 корней. Найдём их сумму:

$$0+x_1+x_2+x_3+x_4=$$

$$=-15+\frac{11}{3}=-11\frac{1}{3}.$$

Ответ. $-11\frac{1}{3}$.

3. Метод неопределённых коэффициентов в разложении дробей на простейшие

Пример 7. Решить уравнение

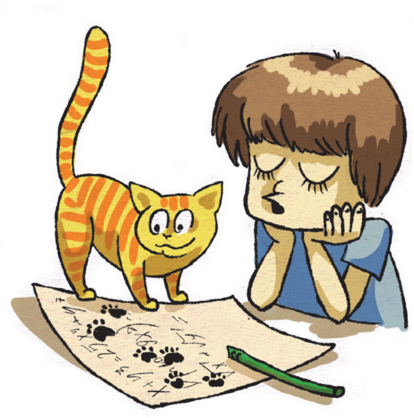
$$\frac{1}{(5x+1)(x+4)}+\frac{1}{(5x+1)(5x+39)}+$$

$$+\frac{1}{5x^2+59x+156}=\frac{1}{49}.$$

Представим каждую из дробей в виде суммы простейших дробей, используя метод неопределённых коэффициентов, суть которого состоит в том, что оба многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

Поскольку каждый из двучленов $5x+1$ и $x+4$ входит в знаменатель в первой степени, то рациональная дробь $\frac{1}{(5x+1)(x+4)}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{(5x+1)(x+4)}=\frac{A}{5x+1}+\frac{B}{x+4}.$$



Вычислим неопределённые коэффициенты A и B. Освобождаясь от знаменателей, получим:

$$A(x+4)+B(5x+1)=1.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями: $(A+5B)x+$ $+4A+B=1$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+5B=0, \\ 4A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{19}, \\ B=-\dfrac{1}{19}. \end{cases}$$

Следовательно, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{1}{(5x+1)(x+4)}=\frac{5}{19(5x+1)}-\frac{1}{19(x+4)}.$$

Аналогично разложим две другие дроби:

$$\frac{1}{(5x+1)(5x+39)}=\frac{1}{38(5x+1)}-\frac{1}{38(5x+39)},$$

$$\frac{1}{5x^2+59x+156}=\frac{1}{(x+4)(5x+39)}=$$

$$=\frac{1}{19(x+4)}-\frac{5}{19(5x+39)}.$$

Тогда исходное уравнение перепишем так:

$$\frac{5}{19(5x+1)}-\frac{1}{19(x+4)}+$$

$$+\frac{1}{38(5x+1)}-\frac{1}{38(5x+39)}+$$

$$+\frac{1}{19(x+4)}-\frac{5}{19(5x+39)}=\frac{1}{49}.$$

Упростив, получим:

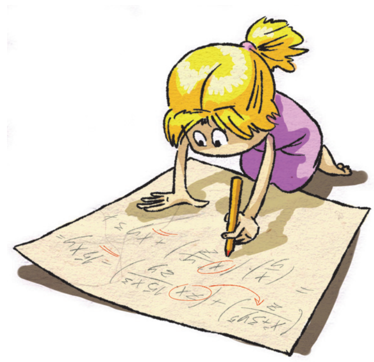
$$\frac{11}{38(5x+1)}-\frac{11}{38(5x+39)}=\frac{1}{49} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5x+1}-\frac{1}{5x+39}=\frac{38}{539} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5x+1)(5x+39)=539 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-10, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ. -10; 2.



Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

«Исчезающий» барельеф

В конце прошлого века в одном из кварталов Парижа на глухой стене здания был сделан замечательный «теневой» барельеф. Он представляет собой «портрет» львёнка, который образуют тени множества бетонных бугорков, расположенных на стене строго определённым образом. И потому виден только тогда, когда Солнце находится близко к зениту, а потом изображение постепенно размывается и исчезает (см. рисунок: верхний снимок сделан в 12 ч. 35 мин., нижний около – 18 ч.). С помощью компьютера были рассчитаны размеры, форма и расположение бугорков так, что наиболее чётким изображение львёнка бывает во время пребывания Солнца в зодиаке под знаком Льва (22 июля – 22 августа).