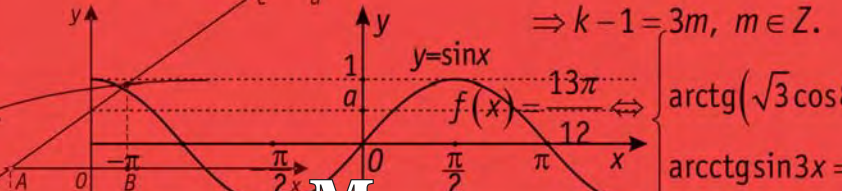


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Математика



Лукьянов Андрей Александрович

Кандидат физико-математических наук, доцент,
сотрудник лаборатории по работе с одарёнными
детьми МФТИ.

Несложное алгебраическое решение сложной геометрической задачи

Приведено сравнительно простое алгебраическое решение сложной задачи, которая волнует любителей математики полтора столетия.

Известно, что если в треугольнике две высоты равны друг другу, то такой треугольник равнобедренный. Совсем простое доказательство этого основано на формуле для площади треугольника: записываем её дважды – через разные основания и высоты $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b$, где h_a, h_b – высоты треугольника на стороны a и b . Из равенства высот $h_a = h_b$ немедленно следует равенство сторон $a = b$.

Несложно доказать, что треугольник равнобедренный и если в нём равны друг другу две медианы. (Докажите это самостоятельно.)

Значительно сложнее доказать, что треугольник равнобедренный из равенства двух его биссектрис. Доказательство этого носит даже название особой **теоремы Штейнера** –

Лемуса, (1840). Есть мнение, впрочем, что С.М. Лемус просто попросил швейцарского математика Якоба Штейнера дать **геометрическое** доказательство данного факта.

Штейнер дал довольно сложное доказательство, которое, как пишут Г.С. Коксетер и Л.С. Грейтцер в книге «Новые встречи с математикой» (1978), «*вдохновило многих других на поиски более простых методов. Работы по теореме Штейнера – Лемуса появлялись в различных журналах в 1842, 1844 и 1848 годах и почти каждый год с 1856 года по 1864 год, а также в большом количестве и в течение следующего столетия.*

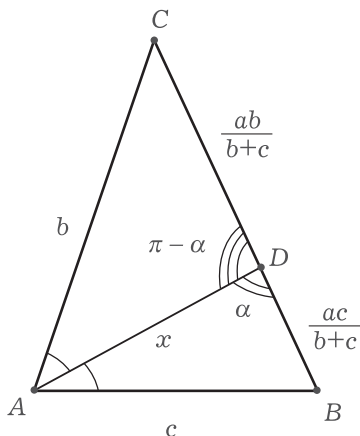
Одно из простейших доказательств ...было придумано дву-

мя английскими инженерами Г. Джилбертом и М. Мак-Доннеллом и опубликовано в *American Mathematical Monthly* 7 (1963), стр.79-80». Заметьте: к решению, казалось бы, частной задачи был привлечён крупный математик Я. Штейнер! История решений задачи насчитывает полтора столетия! Как пишут в той же книге Г.С. Коксетер и Л.С. Грейтцер, «Существует ряд геометрических задач, которые околдовывают каждого, кто по воле случая сталкивается с ними. По-видимому, это было характерно для геометрии даже в древние времена».

Автор предлагает читателям самим испытать свои силы и попробовать самостоятельно доказать равнобедренность треугольника из равенства двух его биссектрис. Не отчаивайтесь, если не получится (или получится не сразу).

Приводим далее несложное алгебраическое («по формулам», но с

применением теорем геометрии) доказательство этой теоремы. Со времён Декарта (1596 – 1650) алгебры в геометрии значительно прибавилось. Не будем пренебрегать возможностями алгебры.



Итак, требуется доказать:

Если в треугольнике две биссектрисы равны друг другу, то такой треугольник равнобедренный.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC стороны a , b и c лежат против одноименных углов, и пусть $AD=x$ и $BE=y$ – длины биссектрис углов A и B , причём

$$x = y. \quad (1)$$

На рисунке показана лишь одна из биссектрис. Докажем, что равны друг другу длины сторон:

$$a = b. \quad (2)$$

По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника биссектриса AD делит сторону $BC=a$ в отношении

$$CD : DB = b : c. \quad (3)$$

Поэтому длины отрезков CD и DB равны

$$CD = \frac{b}{b+c}a, \quad DB = \frac{c}{b+c}a. \quad (4) - (5)$$

Найдём выражения для длин биссектрис треугольника $AD=x$ и $BE=y$. Чтобы найти одну из них, запишем теорему косинусов дважды – для двух треугольников ABD и ACD – и воспользуемся тем, что

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha. \quad (6)$$

Имеем:

$$c^2 = x^2 + \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} - 2x \frac{ac}{b+c} \cos \alpha, \quad (7)$$

$$b^2 = x^2 + \frac{a^2 b^2}{(b+c)^2} + 2x \frac{ab}{b+c} \cos \alpha. \quad (8)$$

Деля первое из этих равенств на c , а второе – на b , получаем

$$c = \frac{x^2}{c} + \frac{a^2 c}{(b+c)^2} - 2x \frac{a}{b+c} \cos \alpha, \quad (7')$$

$$b = \frac{x^2}{b} + \frac{a^2 b}{(b+c)^2} + 2x \frac{a}{b+c} \cos \alpha. \quad (8')$$

Складывая (7') и (8'), избавляемся от слагаемых $\pm 2x \frac{a}{b+c} \cos \alpha$, содержащих неизвестный $\cos \alpha$:

$$b+c = \frac{b+c}{bc} x^2 + \frac{a^2(b+c)}{(b+c)^2},$$

откуда немедленно находим

$$\begin{aligned} b-a + \frac{ab^2}{(a+c)^2} - \frac{ba^2}{(b+c)^2} &= 0 \Rightarrow b-a + ab \left(\frac{b}{(a+c)^2} - \frac{a}{(b+c)^2} \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow b-a + ab \frac{b(b+c)^2 - a(a+c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} &= 0 \Rightarrow b-a + ab \frac{b^3 + 2b^2c + bc^2 - a^3 - 2a^2c - ac^2}{(a+c)^2(b+c)^2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow b-a + ab \frac{b^3 - a^3 + 2b^2c - 2a^2c + bc^2 - ac^2}{(a+c)^2(b+c)^2} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow b-a + ab \frac{(b-a)(b^2 + ba + a) + 2c(b-a)(b+a) + c^2(b-a)}{(a+c)^2(b+c)^2} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (b-a) \left[1 + ab \frac{(b^2 + ba + a) + 2c(b+a) + c^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, не просто положительна, но больше единицы (к единице прибавляется заведомо положительное чис-

$$x^2 = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right). \quad (9)$$

Выражение для квадрата длины биссектрисы $BE=y$ получается аналогично прямо из (9) заменой $a \leftrightarrow b$ во всех местах формулы (9):

$$y^2 = ac \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2} \right). \quad (10)$$

По условию задачи две биссектрисы равны друг другу, т.е. $x^2 = y^2$, или

$$bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) = ac \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2} \right). \quad (11)$$

Дальше – алгебра. После сокращения (11) на c :

ло). Поэтому равенство нулю левой части (12) возможно, лишь если равняется нулю скобка $(b-a)$, т.е. $a=b$, что и требовалось доказать.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Не стыдно и не вредно не знать. Всего знать никто не может, а стыдно и вредно притворяться, что знаешь, чего не знаешь.

Л.Н. Толстой

Природа – это не площадка для игр, а сам человек – не игрушка природы. По отношению к природе неуместны как высокомерие, так и подчинение ей.

В. Холличер