Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал».
Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Несколько задач тренировочных вариантов ЕГЭ

В статье показаны решения задач, отличные от тех, что приведены в Интернете.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=2a$$

имеет два решения.

►Решим задачу графически. Построим сначала пунктиром эскизы графиков функций

$$y_1(x)=\sqrt{x},\ y_1(3)=\sqrt{3},\ y_2(x)=$$
$$=\sqrt{3-x}, y_2(0)=\sqrt{3}$$ – рис. 1.

Затем сложим эти графики – получим эскиз графика суммы $y(x)=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$ – сплошная кривая на рис. 1.

Заметим, что

$$\sqrt{x}=\sqrt{3-x}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-x,\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2},$$

кривая симметрична относительно прямой $x=\dfrac{3}{2}$, при этом

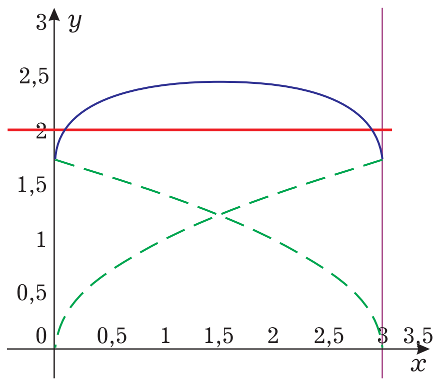

Рис.1

$$y(0)=\sqrt{3}=y(3),\ y\left(\frac{3}{2}\right)=2\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Теперь очевидно, что уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=2a$ имеет два решения, если $y(0)<2a<y\left(\dfrac{3}{2}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < a < \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < a < \frac{3}{2}.$$

Ответ. $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$. ◀

Задача 2 (два способа). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^3+4x^2=kx-6$$

имеет один корень на отрезке $[-2;2]$.

► *Первый способ*

Перепишем уравнение:

$$x^3+4x^2=kx-6 \Leftrightarrow (x+4)x=k-\frac{6}{x}.$$

Теперь построим эскизы графиков параболы $y_1=x(x+4)$ и гиперболы $y_2=k-\frac{6}{x}$ при разных k – рис. 2 и 3.

1) Посмотрим на рис 2, где $k>0$.

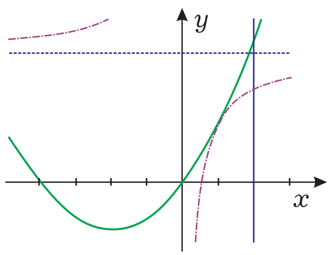

Рис. 2. $k>0$

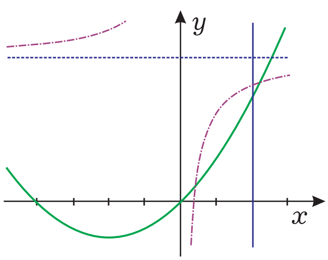

Рис. 3. $k>0$

Проверим, могут ли кривые касаться:

$$y_1'=y_2' \Leftrightarrow 2x+4=\frac{6}{x^2} \Leftrightarrow x^3+2x^2-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+3x+3\right)=0 \Leftrightarrow x=1\in[-2;2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1(1)=y_2(1) \Leftrightarrow 5=k-6 \Leftrightarrow k=11$$

Отсюда следует, что при $k=11$ есть только один корень на отрезке $[-2;2]$.

2) Выясним, возможна ли при $k>0$ такая ситуация, как на рис. 3: $y_1(2)<y_2(2) \Leftrightarrow 12<k-3 \Leftrightarrow k>15$ – возможна, если $k>15$.

3) Рассмотрим теперь случай, когда $k<0$ – рис. 4.

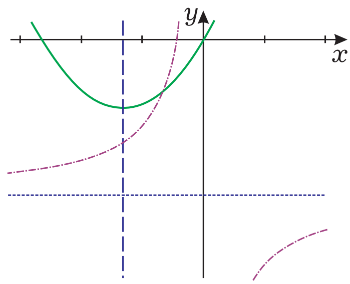

Рис. 4. $k<0$

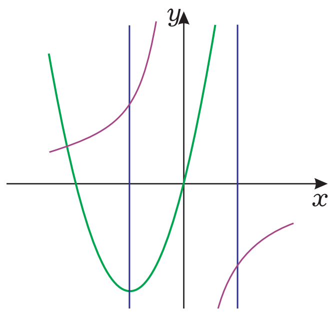

Рис. 5. $k=0$

Видно, что на отрезке $[-2;2]$ один корень, если

$$y_1(-2)\ge y_2(-2) \Leftrightarrow -4\ge k+3 \Leftrightarrow k\le -7.$$

4) Остался случай, когда $k=0$. На рис. 5 видно, что $y_1(x)=-\frac{6}{x}$ и

$y_2(x)=(x+4)x$ на $[-2;2]$. имеют разные знаки – решений уравнения нет.

Суммируя результаты 1) – 4), получаем, что

$k\in(-\infty;-7]\cup\{11\}\cup(15;+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;-7]\cup\{11\}\cup(15;+\infty)$.

Второй способ

Перепишем уравнение по-другому:

$x^3+4x^2=kx-6\Leftrightarrow(x+4)x^2=kx-6$.

Прикинем эскизы графиков функций $y_1=(x+4)x^2$ (зелёная линия), $y_2=kx-6$ при разных значениях k (синяя линия) – рис. 6.

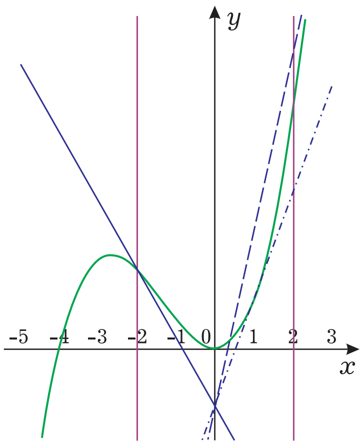

Рис. 6

Видно, что один корень будет, если: или прямая $y_2=kx-6$ будет пересекать линию $x=2$ выше кривой $y_1=x^3+4x^2$, то есть

$y_1(2)\le y_2(2)\Leftrightarrow 24<2k-6\Leftrightarrow k>15$;

или прямая $y_2=kx-6$ будет касательной к кривой $y_1=x^3+4x^2$:

$$\begin{cases}(x+4)x^2=kx-6,\\3x^2+8x=k\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4)x^2=\left(3x^2+8x\right)x-6,\\3x^2+8x=k\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+2x^2-3=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+3x+3\right)=0,\\3x^2+8x=k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\k=11\end{cases}$$

или прямая $y_2=kx-6$ будет пересекать линию $x=-2$ не ниже кривой $y_1=x^3+4x^2$, то есть

$y_1(-2)\le y_2(-2)\Leftrightarrow 8\le-2k-6\Leftrightarrow k\le-7$;

$$(y'=3x^2+8x=k\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+3k}}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16+3k\ge0\Leftrightarrow k\ge-\frac{16}{3}>-7).$$

Ответ. $(-\infty;-7]\cup\{11\}\cup(15;+\infty)$. ◀

Задача 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2+2x+2a\right)^2=5x^4+5(x+a)$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$.

▶ Упростим уравнение:

$$\left(x^2+2x+2a\right)^2=5x^4+5(x+a)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2(x+a)\right)^2=5x^4+5(x+a)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^2(x+a)+4(x+a)^2-5x^4-5(x+a)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x^4+4x^2(x+a)-(x+a)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2-x-a\right)^2=0\Leftrightarrow x(2x-1)=a$$

Теперь построим эскиз параболы $y(x)=x(2x-1)$ – рис. 7

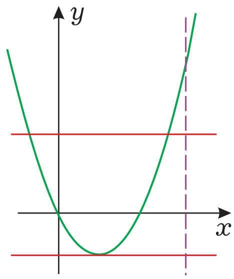

Рис. 7

Проводим разные горизонтали $y=a$ – рис. 7.

Видно, что уравнение $\left(x^2+2x+2a\right)^2=5x^4+5(x+a)$ имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$, если:

или $0<a\le y(2)\Leftrightarrow 0<a\le 6$,

или $y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{8}=a$ – рис.7.

Отсюда следует, что $a\in\left\{-\frac{1}{8}\right\}\cup(0;6]$.

Ответ. $\left\{-\frac{1}{8}\right\}\cup(0;6]$. ◀

Задача 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax\ge 2, \\ \sqrt{x-1}>a, \\ 3x\le 2a+11 \end{cases}$$

имеет единственное решение на отрезке $[3;4]$.

►Начертим в плоскости $(x;a)$ последовательно эскизы (рис. 8) гиперболы $a_1=\frac{2}{x}$ при $x>0$ (сплошная линия), полупараболы $a_2=\sqrt{x-1}$ (пунктир), прямой $a_3=1{,}5x-5{,}5$ (сплошная линия); заштриховываем при этом части, удовлетворяющие неравенствам противоположного знака, чтобы «не мешались». Получился незаштрихованный криволинейный треугольник, удовлетворяющий заданной системе.

Видно, что единственное решение только в одной точке:

$$\begin{cases} a_1=a_3, \\ x>0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{2}{x}=1{,}5x-5{,}5\Leftrightarrow 1{,}5x^2-5{,}5x-2=0, \\ x>0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{5{,}5\pm 6{,}5}{3}, \\ x>0 \end{cases}\Leftrightarrow x=4\Rightarrow a_1=a_3=\frac{1}{2}.$$

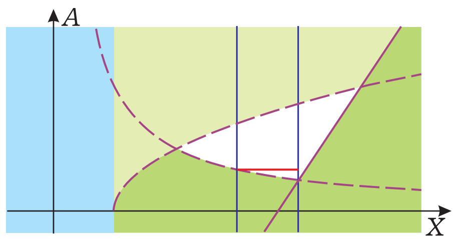

Рис. 8

Ответ. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. ◀

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(|x|-5\right)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

►Заметим, что

$(|x|-5)^2+(y-4)^2=9$ – это две окружности:

$x \ge 0: (x-5)^2+(y-4)^2=9,$

$x \le 0: (x+5)^2+(y-4)^2=9$ – рис. 9.

Рис. 9

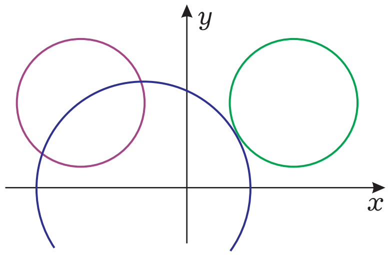

Рис. 10

Видно, что $(x+2)^2+y^2=a^2$ – это тоже окружность – рис. 10, причём решение единственно, если третья окружность касается одной из заданных окружностей (внешним или внутренним образом). Известно, что тогда центры касающихся окружностей и точка касания находятся на одной прямой.

Проведём прямую через центры левой и третьей окружности – она пройдёт и через точки касания – рис. 11.

Тогда (рис. 11)

$$(r_1+3)^2=4^2+(5-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_1=2 \Rightarrow r_2=5+3=8.$$

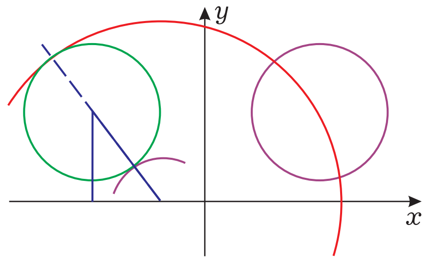

Рис. 11

Однако видно – рис. 11, что окружность радиусом 8 пересекает правую окружность – поэтому решением будет только $r_1=2$.

Теперь рассмотрим правую окружность и третью – рис. 12.

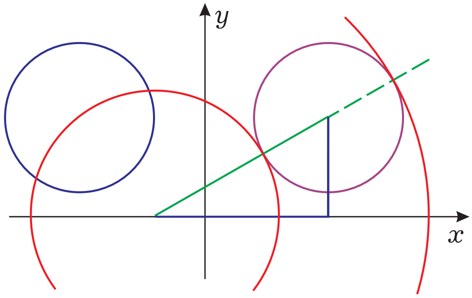

Рис. 12

Проводим прямую через их центры и продолжаем до точки касания – рис. 12.

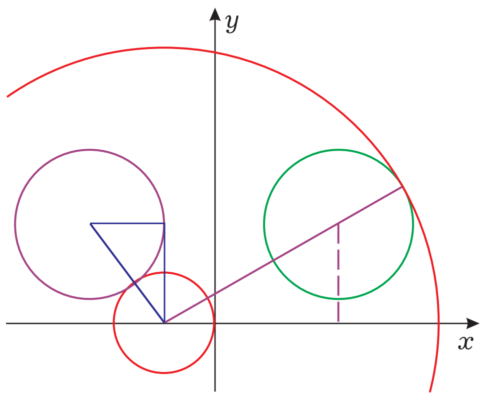

Рис. 13

Тогда

$$(R_1+3)^2=7^2+4^2 \Leftrightarrow R_1=\sqrt{65}-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_2=\sqrt{65}+3.$$

Теперь, наоборот: окружность радиусом $R_1=\sqrt{65}-3$ пересекает левую окружность – поэтому решением будет только $R_2=\sqrt{65}+3$.

Решение задачи на рис. 13

Ответ. $\{2;\sqrt{65}+3\}$. ◀

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=\left|x^2+y^2-1\right|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

▶

$$\begin{cases} 2x-2y-2=\left|x^2+y^2-1\right|, \\ y=a(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0, \\ 2x-2y-2=x^2+y^2-1, \\ y=a(x-1); \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-1<0, \\ 2x-2y-2+x^2+y^2-1=0, \\ y=a(x-1) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0, \\ (x-1)^2+(y+1)^2=1, \\ y=a(x-1); \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-1<0, \\ (x+1)^2+(y-1)^2=5, \\ y=a(x-1) \end{cases} \end{array}\right.$$

Нарисуем все три окружности – рис. 14.

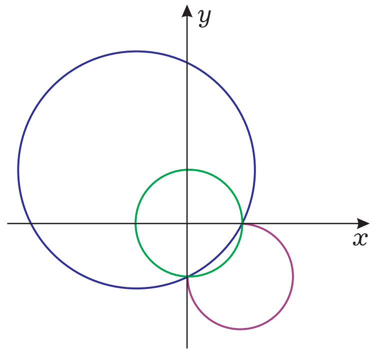

Рис. 14

Заметим, что все прямые $y=a(x-1)$ проходят через точку $(1;0)$ – рис.15.

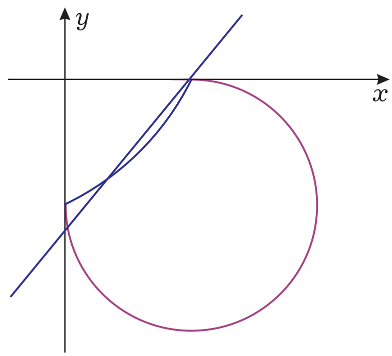

Рис. 15

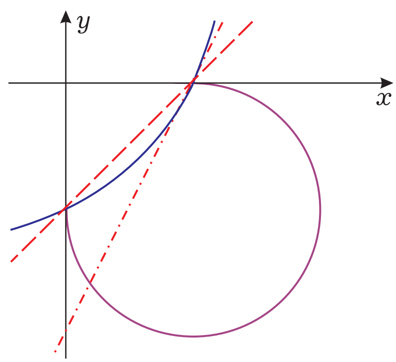

Рис.16

На рис. 15 видно, что более двух решений будет, если прямая $y=a(x-1)$ проходит между прямой, которая проходит через точки пересечения окружностей, и касательной к окружности

$$(x+1)^2+(y-1)^2=5 \text{ – рис. 16.}$$

Найдём первую «граничную» прямую: $-1=a(-1)\Leftrightarrow a=1$. Теперь найдём касательную (двумя способами).

Первый способ (которым может решить даже девятиклассник).

Прямая касается окружности, значит, она имеет с ней единственную общую точку:

$$\begin{cases}2x-2y-2+x^2+y^2-1=0,\\ y=a(x-1)\end{cases}\Rightarrow$$

$$x^2\left(1+a^2\right)+2x\left(1-a(a+1)\right)+(a+1)^2-4=0$$

– решение единственно, если дискриминант равен 0, то есть

$$D=1-2a(a+1)-\left(a^2+2a+1\right)+4\left(1+a^2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-4a+4=0\Leftrightarrow a=2$$

Ответ. $(1;2)$.

Второй способ нахождения касательной (для тех, кто знает производные и геометрический смысл производной в точке). Для искомой касательной надо найти только a, а это значение производной функции $y=1-\sqrt{5-(x+1)^2}$ (нижняя часть окружности $(x+1)^2+(y-1)^2=5$) в точке $(1;0)$:

$$y'=\frac{x+1}{\sqrt{5-(x+1)^2}}\Rightarrow y'(1)=2.$$

Заметим, что с точки зрения количества вычислений, так проще.

Ответ. $(1;2)$. ◄

Задача 7. Решите неравенство $\log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(2x^2-3x\right)\ge\log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(17x-20-3x^2\right)$.

►Выражение довольно громоздкое – поэтому найдём ОДЗ отдельно.

ОДЗ* (ОДЗ* отличается от ОДЗ тем, что здесь нет неравенства $\frac{3x-4}{x+1}\ne 1$):

$$\begin{cases}\frac{3x-4}{x+1}>0\\ (2x-3)x>0,\\ 17x-20-3x^2>0\Leftrightarrow 3x^2-17x+20<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right),\\ x\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right),\\ x\in\left(\frac{5}{3};4\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{5}{3};4\right)$$

Теперь воспользуемся тем, что

$$\log_{a(x)}f(x)-\log_{a(x)}g(x)\vee 0\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)-g(x)}{a(x)-1}\vee 0,$$

то есть тем, что знак разности $\log_{a(x)}f(x)-\log_{a(x)}g(x)$ совпадает со знаком дроби $\frac{f(x)-g(x)}{a(x)-1}$ в ОДЗ*:

$$\log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(2x^2-3x\right)\ge\log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(17x-20-3x^2\right)\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}\frac{\left(2x^2-3x\right)-\left(17x-20-3x^2\right)}{\frac{3x-4}{x+1}-1}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{2x-5}{x+1}} \geq 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(x-2)^2}{2x-5} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \{2\} \cup \left(\frac{5}{2};+\infty\right).$$

Учтём ОДЗ* и получим, что

$x \in \{2\} \cup \left(\frac{5}{2};4\right)$.

Ответ. $\{2\} \cup \left(\frac{5}{2};4\right)$.

Примечание. Этот пример решён в тренировочных вариантах 2018 г., но без всяких пояснений.◀

Задача 8. Решите неравенство $\log_{|x-1|}(x-2)^2 \leq 2$.

►Как это ни странно, но в том же сборнике решён и этот пример, но совсем по-другому – без равносильных преобразований. Мы предлагаем такое же решение, как и в предыдущем примере, но ОДЗ включим в равносильную систему. При этом «уберём» модуль в знаменателе получившейся дроби, умножив его на сопряжённое положительное выражение $|x-1|+1$:

$$\log_{|x-1|}(x-2)^2 \leq 2 = \log_{|x-1|}(x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, x \neq 0, x \neq 2, \\ \dfrac{(x-2)^2-(x-1)^2}{|x-1|-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ \dfrac{(2x-3)}{x(x-2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0;1) \cup \left(1;\frac{3}{2}\right) \cup (2;+\infty).$$

Ответ. $(0;1) \cup \left(1;\frac{3}{2}\right) \cup (2;+\infty)$. ◀

Задача 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$2x^3+9x+3|x+a-2|+2|2x-a+2|+$$
$$+\sqrt[5]{2x-3} \leq 16$$

выполняется для всех значений $x \in [-2;1]$.

►Неравенство такого типа встречается в литературе уже лет 10. Приведём ещё раз его решение.

Очевидно, что $y_1(x)=2x^3+\sqrt[5]{2x-3}$ – монотонно возрастающая функция на всей числовой оси.

Заметим, что графиком функции $y_2(x)=9x+3|x+a-2|+2|2x-a+2|$ является ломаная, причём, тангенсы наклонов отрезков прямых, её составляющих, всегда положительны: это или $9\mp3\pm4$, или $9\pm3\pm4$ и т. д. Поэтому функция

$$y_2(x)=9x+3|x+a-2|+2|2x-a+2|$$

тоже монотонно возрастает на всей оси

Значит, и

$$y(x)=2x^3+9x+3|x+a-2|+$$

$+2|2x-a+2|+\sqrt[5]{2x-3}$ монотонно возрастает на всей оси, и своё максимальное значение на отрезке $x \in [-2;1]$, она принимает в точке $x=1$. Отсюда следует, что $y(x) \leq 16$ на $x \in [-2;1]$, если

$$y(1)=10+3|a-1|+2|4-a| \leq 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|a-1|+2|4-a|-6 \leq 0 \text{ при любом } a.$$

Заметим, что график функции $y_3(x)=3|a-1|+2|a-4|-6$ – тоже ломаная. Но...при $a \geq 1$ тангенсы наклонов $3\pm2>0$ и $-3\pm2<0$ при $a<1$. Отсюда следует, что

$$y_{3\min}=y_3(1)=0,$$

и неравенство $3|a-1|+2|a-4|-6 \leq 0$ выполняется только при $a=1$.

Ответ. $\{1\}$. ◀